МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ по дисциплине «Алгебра»

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
Профиль подготовки	Информационные системы и технологии в бизнесе

Невинномысск, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Целями освоения дисциплины Алгебра является формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению, обучение основным математическим понятиям и методам линейной алгебры; дать базовые знания и практические навыки для успешного освоения фундаментальных, общетехнических и специальных дисциплин учебного плана. Дисциплина является одной из важнейших теоретических и прикладных математических дисциплин, определяющих уровень профессиональной подготовки современного специалиста по направлению Информационные системы и технологии. Для освоения дисциплины поставлены следующие задачи:

- обучение студентов основным математическим методам алгебры, необходимым при решении теоретических и практических задач в области экономики, финансов и бизнеса;
- развитие логического и алгоритмического мышления общего уровня математической культуры;
- выработка навыков математического исследования прикладных вопросов, необходимых для экономического анализа, организации и управления;
- обучение студентов методам обработки и анализа результатов численных и натуральных экспериментов;
- привитие студентам умения самостоятельного изучения учебной литературы по алгебре и ее приложениям.

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-1** выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее анализ и диагностику на основе системного подхода	Понимает основы операций и алгебраических систем, методологию и основные методы. Использует понятия: эквивалентные матрицы и элементарные преобразования; системы линейных уравнений; матричный метод решения систем линейных уравнений; формулы Крамера
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-2** осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации	Способен распознавать в задачах предметной области матрицы и действия над ними; определители и их основные свойства; алгебраические дополнения и миноры; формулировку теоремы Лапласа, применять на практике математические модели, методы и средства проектирования и автоматизации систем на практике
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-3** определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения	Обеспечивает владение навыками теоретического и экспериментального исследования, понятий: обратная матрица, ее основные свойства, метод вычисления; линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы; необходимое и достаточное условия линейной зависимости строк; ранг матрицы, методы его вычисления; теорема о базисном миноре. Обеспечивает применение навыков работы с компьютерными

		программами для дистанционного образования в области алгебры, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач алгебры, предполагающими самостоятельный выбор метода решения
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-1** знаком с основами естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Понимает теорию основных методов алгебры в профессиональной деятельности, анализирует теоретические и экспериментальные данные алгебраических вычислений в профессиональной деятельности
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-2** анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, методы	Умеет анализировать естественнонаучные и общеинженерные знания, методы, применять знания алгебраических вычислений в профессиональной деятельности
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-3** применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Владеет навыками решения задач, связанных с алгеброй, навыками решения задач, связанных с основами алгебраических вычислений в профессиональной деятельности

Практическое занятие по теме «Линейная алгебра»

Цель: Целью освоения темы «Линейная алгебра» является формирование набора универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Линейная алгебра» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы алгебры и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области алгебры, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач алгебры, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

1. Матрицей $A=(a_{ij})$ размера $m \times n$ называется множество чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица размера $n \times n$ называется квадратной матрицей n –го порядка. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, . . . , a_{nn} образуют главную диагональ матрицы.

2. Определитель (детерминант) квадратной матрицы n –го порядка – это число Δ, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам. Обозначается:

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n –го порядка называется определитель $(n\text{-}1)$ –го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i –й строки и j –го столбца. Исследование системы линейных уравнений осуществляется с помощью теоремы Кронекера-Капелли: **для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы A был равен рангу расширенной матрицы A_p**, т.е. $\text{rang}\, A = rang\, A_p = r$. При этом:

1) если $r = n$ (ранг равен числу неизвестных), то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера;

2) если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Свободные $(n - r)$ неизвестных выбираются произвольно, а главные r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные.

Для решения систем линейных уравнений с большим числом неизвестных и уравнений выгодно использовать метод Гаусса, который заключается в последовательном исключении неизвестных. Существует много вариантов этого метода. Рассмотрим схему с выбором главного элемента. Пусть исходная система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Пример 1. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид (19)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

откуда следует, что матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$. Собственный вектор X_1, соответствующий $\lambda_1 = 4$, определяется из системы уравнений вида (20)

$$\begin{cases} (1-4)x_1 \quad + 6x_2 = 0, \\ \quad x_1 + (2-4)x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0, \\ \quad x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $x_1 = 2x_2$. Полагая $x_2 = t$, получаем решение в виде $x_1 = 2t$, $x_2 = t$. Пронормируем это решение, т.е. найдем такое значение t, при котором длина собственного вектора равна единице:

$$X_1 = 1 = \sqrt{(2t)^2 + (t)^2},\ t = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, первый собственный вектор есть

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Аналогично найдем второй собственный вектор X_2:

$$\begin{cases} (1+1)x_1 \quad\quad + 6x_2 = 0, \\ \quad\quad x_1 + (2+1)x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = -3t, \\ x_2 = \quad t. \end{cases}$$

$$\sqrt{(-3t)^2 + (t)^2} = 1, \quad t = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица имеет два различных собственных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$ и два собственных вектора.

<u>Пример 2</u>. Исследовать систему уравнений и найти её общее решение

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 \quad\quad = 0, \\ 8x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Однородная система имеет нетривиальное решение, если ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -4 \cdot I \\ -8 \cdot I \end{matrix}$$

меньше числа неизвестных. Приведем матрицу A к трапециидальному виду путем элементарных преобразований. Умножим 1-ю строку на 4 и на 8 и вычтем, соответственно из 2-й и 3-й строки, получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :5 \\ -II \end{matrix}.$$

Вычтем из 3-й строки 2-ю, а затем разделим 2-ю строку на 5:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +II \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +II \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2 и меньше числа неизвестных: $n = 3, \quad rang\ A < n$.

Примем за основные переменные x_1 и x_2; свободная переменная – x_3. Тогда данная система сводится к системе уравнений,

$$\begin{cases} x_1 - 1/4x_3 = 0, \\ x_2 + 4/5x_3 = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}x_3\ , \\ x_2 = -\dfrac{4}{5}x_3.. \end{cases}$$

Придавая свободной переменной x3 произвольные значения x3=5t, где $t \in R$, получим общее решение системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = \ t, \\ x_2 = -4t, \\ x_3 = \ 5t. \end{cases}$$

Вопросы и задания

Задание 1

Доказать совместность системы и решить её тремя способами: по формулам Крамера; методом Гаусса и средствами матричного исчисления.

Номер вар.	Система линейных уравнений	Номер вар.	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-3x_2+3x_3=1 \\ x_2-5x_3=-9 \end{cases}$	11	$\begin{cases} -2x_2-5x_3=-12 \\ -2x_1-x_2+3x_3=7 \\ -x_1+x_2+x_3=4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -3\tilde{o}_1+\tilde{o}_2+3\tilde{o}_3=10 \\ -2\tilde{o}_2-\tilde{o}_3=-4 \\ 2\tilde{o}_1-\tilde{o}_2+3\tilde{o}_3=3 \end{cases}$	12	$\begin{cases} -x_1+2x_3=5 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=10 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=-1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2\tilde{o}_1-\tilde{o}_2-6\tilde{o}_3=-15 \\ 3\tilde{o}_1-\tilde{o}_2+\tilde{o}_3=-2 \\ -\tilde{o}_1+3\tilde{o}_3=7 \end{cases}$	13	$\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+3x_3=-1 \\ -2x_2-3x_3=-8 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-1 \\ -x_1+3x_3=7 \\ x_1+x_2+3x_3=6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x_1-2x_2=-5 \\ x_1-2x_2+x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-2 \\ x_1-2x_2-4x_3=-11 \\ -2x_1-x_2=1 \end{cases}$	15	$\begin{cases} -x_1+3x_2=4 \\ 3x_1-2x_2+x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-x_3=-3 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4x_1+7x_2-3x_3=-10 \\ 2x_1+9x_2-x_3=8 \\ -x_1+6x_2-3x_3=3 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-1 \\ 2x_1+4x_2+x_3=6 \\ -3x_1+3x_2-7x_3=-13 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=-10 \\ -x_1+5x_2-2x_3=5 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=3 \end{cases}$	17	$\begin{cases} -2x_1+5x_2-6x_3=-8 \\ x_1+7x_2-5x_3=-9 \\ 4x_1+2x_2-x_3=-12 \end{cases}$

8	$\begin{cases} -3x_1+5x_2-6x_3=-5 \\ 2x_1-3x_2+5x_3=8 \\ x_1+4x_2-x_3=1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x_1-9x_2+8x_3=5 \\ 2x_1-5x_2+5x_3=4 \\ 2x_1-x_2+x_3=-4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-5 \\ x_1+9x_2-4x_3=-1 \\ -2x_1+6x_2-3x_3=6 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 4x_1-x_2+5x_3=6 \\ x_1-2x_2+4x_3=9 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -2x_1+x_2-3x_3=-4 \\ 4x_1+7x_2-2x_3=-6 \\ x_1-8x_2+5x_3=1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1+7x_2-2x_3=3 \\ 3x_1+5x_2+x_3=5 \\ -2x_1+5x_2-5x_3=-4 \end{cases}$

Задание 2

Исследовать и найти общее решение системы линейных однородных уравнений.

Номер вар.	Система линейных уравнений	Номер вар.	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases}$	13	$\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-2x_4-6x_5=0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases}$	14	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$	15	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-6x_3-3x_4+x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+4x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases}$

7	$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Вопросы для собеседования по теме Линейная алгебра

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?
15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
16. Что называется минором?
17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
19. Перечислите свойства определителя.
20. Какая матрица называется невырожденной?
21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
22. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?
23. Каков алгоритм нахождения матрицы С = А + В
24. Каков алгоритм нахождения матрицы С = А * В
25. Каков алгоритм нахождения определителя третьего порядка.
26. Каков алгоритм нахождения миноров определителя.
27. Каков алгоритм нахождения алгебраических дополнений для определителя.
28. Найдите обратную матрицу для данной матрицы.
29. Сформулируйте теорему Крамера.
30. Запишите формулы Крамера.
31. В чем заключается метод Гаусса.
32. Сформулируйте теорему Кранекера –Капелли..
33. В чем заключпется матричный метод решения системы линейных уравнений

34. Охарактеризуйте значение освоения темы для обработки данных экспериментальных исследований.

35. Охарактеризуйте место темы в решении задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности, при использовании аналитических и численных методов их решения.

Практическое занятие по теме «Векторная алгебра »

Цель: Целью освоения темы «Векторная алгебра » является формирование набора универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Векторная алгебра» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы алгебры для моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области алгебры, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

1. Вектор-столбец

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

называется собственным вектором квадратной матрицы *A* *n*-го порядка, соответствующим собственному значению λ, если он удовлетворяет матричному уравнению:

$A\overline{X} = \lambda\overline{X}$ или $\left(A - \lambda E\right)\overline{X} = 0$.

Здесь *E* – единичная матрица *n*-го порядка, а *0* – нулевой вектор-столбец. При условии, что вектор $\overline{X} \neq 0$, получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений $\lambda : det(A - \lambda E) = 0$ (19)

Координаты собственного вектора X_i, соответствующие собственному значению λ_i, является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

2. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ называется число, определяемое равенствами:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \qquad (21)$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}=\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$ и $\vec{b}=\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$.

Из **(21)** для скалярного квадрата имеем:

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2 \quad \text{или} \quad |\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (22)$$

С помощью скалярного произведения можно найти:

- проекцию вектора $Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$ (23)

- угол между двумя векторами $cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}};$ (24)

- работу силы $\vec{F}=\left\{F_x, F_y, F_z\right\}$ на перемещении $\vec{S}=\left\{S_x, S_y, S_z\right\}$

$$A=|\vec{F}||\vec{S}|cos\varphi=F_x S_x+F_y S_y+F_z S_z. \qquad (25)$$

Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов имеет вид:

$$\vec{a}\vec{b}=0 \quad \text{или} \quad a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0, \qquad (26)$$

а условия их коллинеарности: 1) $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ 2) $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}=\lambda.$ 3) $\vec{a}\times\vec{b}=0$ (27)

3. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

а) имеет длину $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) перпендикулярен к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

в) направлен так, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 1).

Векторное произведение векторов в координатной форме:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}-(a_x b_z-a_z b_x)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}=\left\{c_x; c_y; c_z\right\}. \qquad (28)$$

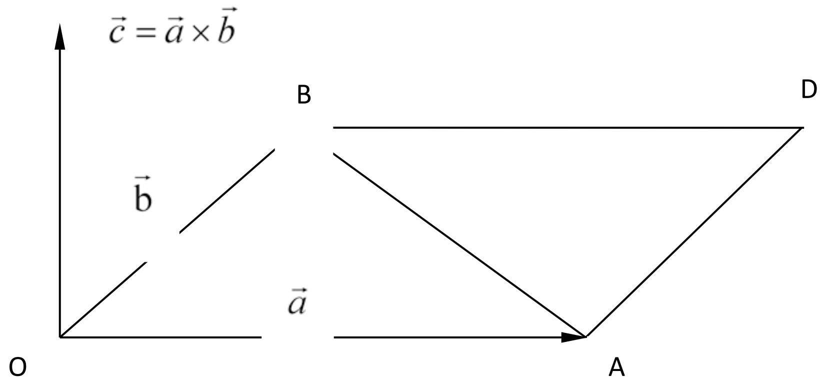

Рисунок 1

4. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$ $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ есть число равное:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен модулю смешанного произведения

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = mod\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{31}$$

5. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид: $Ax + By + C = 0,$ (33)

где $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ - нормальный вектор прямой, т.е. вектор $\vec{n}$ перпендикулярен прямой, а коэффициент *C* пропорционален расстоянию *p* от начала координат до прямой: $C \sim p$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид: $y = kx + b$ (34)

Здесь угловой коэффициент $k = tg\alpha$**,** где α угол между осью *Ox* и прямой; *b* – начальная ордината, т.е. ордината точки пересечения прямой с осью *Oy*.

6. а) Общее уравнение плоскости *P* имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0,$ (40)

где $\overline{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ **-** нормальный вектор плоскости, т.е. вектор перпендикулярный плоскости, коэффициент *D* пропорционален расстоянию *p* от начала координат до плоскости.

б) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{N} = \{A, B, C\}$, имеет вид:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{41}$$

в) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{42}$$

г) Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\overline{N}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\overline{N}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$, определяется как угол между $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$; косинус этого угла находится по формуле:

$$cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\overline{N}_2}{|\overline{N}_1||\overline{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{43}$$

д) Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

определяется формулой: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$ (44)

7. Прямая в пространстве *l* определяется как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2:

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Пример 1. По координатам вершин пирамиды *A(3;-2;2), B(1;-3;1), C(2;0;4), D(6;-4;6)* средствами векторной алгебры найти:

1) длины ребер *AB* и *AC*;

2) угол между ребрами *AB* и *AC*;

3) площадь грани *ABC*;

4) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$;

5) объем пирамиды ABCD;

6) уравнения прямых *AB* и *AC*;

7)уравнения плоскостей *ABC* и *ABD*;

8) угол между плоскостями *ABC* и *ABD*.

Решение.

1) Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=(1-3)\vec{i}+(-3-(-2))\vec{j}+(1-2)\vec{k}=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=\{-2;-1;-1\}$; $\overrightarrow{AC}=\{-1;2;2\}$.

Длины этих векторов, т.е. длины ребер *AB* и *AC*, таковы:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45; \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

2) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле (21):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 = -2,$$

а косинус угла между ними – по формуле (24):

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt{6}} = -0.27.$$

Отсюда следует, что φ – тупой угол, равный $\pi - \arccos 0.27 = 1.85$ рад с точностью до 0.01. Это и есть искомый угол между ребрами *AB* и *AC*.

3) Площадь грани *ABC* равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т.е. половина модуля векторного произведения этих векторов (см. формулу 29):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Здесь определитель вычисляется с помощью разложения по первой строке. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54 \text{ (кв. ед.)}$$

4) Проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле (23):

$$Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-2}{3} \approx -0{,}67.$$

5) Объем пирамиды равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Вектор $\overrightarrow{AD} = \{3; -2; 4\}$. Используя формулу (31), получим:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} mod(-30) = 5 \text{ (куб. ед.).}$$

6) Уравнения прямых *AB* и *AC* найдем как уравнения прямых проходящих через две данные точки, по формуле (48):

(*AB*) $\quad \dfrac{x-3}{1-3} = \dfrac{y+2}{-3+2} = \dfrac{z-2}{1-2}, \qquad \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{-1};$

(*AC*) $\quad \dfrac{x-3}{2-3} = \dfrac{y+2}{0+2} = \dfrac{z-2}{4-2}, \qquad \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{2}.$

7) Уравнения плоскостей *ABC* и *ABD* получим, используя формулу (42):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 2-3 & 0+2 & 4-2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ABC: т.е. $5(y+2)-5(z-2)=0, \quad 5y-5z+20.$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 6-3 & -4+2 & 6-2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ABD: т.е. $-6(x-2)+(y+2)+7(z-2)=0, \quad -6x+y+7z=0.$

По уравнениям плоскостей определим их нормальные векторы:

$$\overline{N}_1 = \{0;5;-5\} \text{ и } \overline{N}_2 = \{-6;1;7\}.$$

8) Угол φ между плоскостями *ABC* и *ABD* найдем по формуле (43):

$$cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \ \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \ \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{0+5-35}{\sqrt{25+25}+\sqrt{36+1+49}} = -\frac{30}{5\sqrt{2}\sqrt{86}} \approx -0.46 \ ,$$

откуда $\varphi = \pi - arccos\,0{,}46 = 2{,}04$ рад.

Вопросы и задания

Задание 1

Номер вар.	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки C	Координаты точки Д
1	(1;2;3)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)
2	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;0)	(-1;4;2)
3	(2;2;3)	(-1;2;0)	(0;3;3)	(2;4;-5)
4	(0;-1;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)
5	(3;0;2)	(2;0;6)	(1;1;2)	(3;2;4)
6	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)
7	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)
8	(1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)
9	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;4)
10	(-2;1;3)	(-1;1;3)	(2;0;2)	(2;0;4)
11	(2;4;-6)	(1;3;5)	(0;-3;8)	(3;2;3)
12	(-2;3;5)	(1;-3;4)	(7;8;-1)	(-1;2;-1)
13	(1;3;5)	(0;2;0)	(5;7;9)	(0;4;8)

14	(3;-5;2)	(4;5;1)	(-3;0;-4)	(-4;5;-6)
15	(4;5;2)	(3;0;1)	(-1;4;2)	(5;7;8)
16	(5;1;0)	(7;0;1)	(2;1;4)	(5;5;3)
17	(4;2;-1)	(3;0;3)	(8;0;4)	(5;-1;-2)
18	(4;-3;-2)	(2;2;3)	(-1;-2;3)	(2;-2;-3)
19	(3;1;1)	(1;4;1)	(1;1;7)	(3;-4;-1)
20	(2;2;0)	(-2;3;-2)	(2;-3;3)	(1;5;5)

По координатам вершин пирамиды АВСД средствами векторной алгебры найти:

1) длины ребер АВ и АС;
2) угол между ребрами АВ и АС;
3) площадь грани АВС;
4) проекцию вектора АВ и АС;
5) объем пирамиды.

Задание 2

Составить уравнение плоскости *P,* проходящей через точку *A* перпендикулярно вектору $\vec{BC}$. Написать ее общее уравнение, а также нормальное уравнение плоскости в отрезках. Составить уравнение плоскости P_1, проходящей через точки *A, B, C*. Найти угол между плоскостями P и P_1. Найти расстояние от точки $Д$ до плоскости Р.

Номер вар.	Координаты точки А	Координаты точки В	Координаты точки С	Координаты точки Д
1	(2;5;3)	(1;3;5)	(0;-3;7)	(3;2;3)
2	(-2;3;5)	(1;-3;4)	(7;8;-1)	(-1;2;-1)
3	(1;1;2)	(2;3;-1)	(2;-2;4)	(-1;2; 2)
4	(1;3;5)	(0;2;0)	(5;7;9)	(0;4;8)
5	(3;-5;2)	(4;5;1)	(-3;0;-4)	(-4;5;-6)
6	(4;5;2)	(3;0;1)	(-1;4;2)	(5;7;8)
7	(5;1;0)	(7;0;1)	(2;1;4)	(5;5;3)
8	(4;2;-1)	(3;0;4)	(0;0;4)	(5;-1;-3)
9	(4;-3;-2)	(2;2;3)	(-1;-2;3)	(2;-2;-3)
10	(3;1;1)	(1;4;1)	(1;1;7)	(3;4;-1)
11	(1;2;3)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)
12	(0;-1;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)
13	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)
14	(1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)

15	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;4)
16	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)
17	(2;2;3)	(-1;2;0)	(0;3;3)	(2;4;-5)
18	(-2;-2;3)	(1;2;5)	(0;1;0)	(2;6;4)
19	(-2;1;3)	(-1;1;3)	(2;0;2)	(2;0;4)
20	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;0)	(-1;4;2)

Вопросы к собеседованию по разделу Векторная алгебра

1. Что называется вектором?
2. Что называется длиной вектора?
3. Какие векторы называются равными?
4. Как сложить два вектора?
5. Как найти разность двух векторов?
6. Как умножить вектор на число?
7. Какие векторы называются коллинеарными?
8. Как разложить вектор в декартовой системе координат?
9. Что называется базисом?
10. Что называется координатами вектора?
11. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
12. Как найти длину вектора, заданного двумя точками?
13. Как вычисляется длина вектора, заданного своими координатами?
14. Как выполняется сложение и вычитание векторов, заданных своими координатами?
15. Как умножить вектор, заданный своими координатами, на число?
16. Каким свойством обладают координаты коллинеарных векторов?
17. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.
18. Запишите формулы деления отрезка на две равные части.
19. Что называется скалярным произведением векторов?
20. Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
21. Каким свойством обладает скалярное произведение векторов?
22. Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?
23. Чему равно скалярное произведение коллинеарных векторов?

Вопросы к собеседованию по разделу Аналитическая геометрия

1. Что называется уравнением прямой?
2. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
3. Как записывается каноническое уравнение прямой?
4. Запишите уравнения осей координат.
5. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
6. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
7. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
8. Сформулируйте условие параллельности прямых.
9. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
10. Как найти угол между прямыми?
11. Каким уравнением описывается кривая на плоскости?
12. Охарактеризуйте место темы в решении профессиональных задач

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные. — Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 с. — 978- 5-8265-1412-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63859.html
2. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебник / А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 с. — ISBN 978-5-94211-710-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71687.html
3. Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, И. А. Волынская, О. Е. Карпухина [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 104 с. — ISBN 978-5-94211-711-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71688.html
4. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, В. В. Ивакин, М. А. Керейчук [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 102 с. — ISBN 978-5-94211-712-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71689.html
5. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля : учебник / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 213 с. — ISBN 978-5-94211-713-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71690.html
6. Высшая математика. Том 5. Теория вероятностей. Основы математической статистики. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление : учебник / А. П. Господариков, Е. Г. Булдакова, Л. И. Гончар [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 207 с. — ISBN 978-5-94211-715-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71691.html
7. Высшая математика. Том 6. Специальные функции. Основные задачи математической физики. Основы линейного программирования : учебник / Г А. П. осподариков, И. Б. Ерунова, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 122 с. — ISBN 978-5-94211-720-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71692.html

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика : Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
2. Математика в примерах и задачах : Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для бакалавров. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
4. Данко П.Е. Высшая математика в примерах и задачах : В 2-х ч. — М. : ОНИКС, 2008.
5. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.html