

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
НЕВИННОМЫССКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ФИЛИАЛ) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ по дисциплине

«Геометрия»

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
Профиль подготовки	Информационные системы и технологии в бизнесе

Невинномысск, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Практическое занятие по теме «Аналитическая геометрия»	6
Типовые задачи.....	9
Вопросы для собеседования.....	11
Основная литература.....	12
Дополнительная литература.....	12

Введение

Целями освоения дисциплины Геометрия является формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению, обучение основным математическим понятиям и методам аналитической геометрии; дать базовые знания и практические навыки для успешного освоения фундаментальных, общетехнических и специальных дисциплин учебного плана. Дисциплина является одной из важнейших теоретических и прикладных математических дисциплин, определяющих уровень профессиональной подготовки современного специалиста по направлению Информационные системы и технологии. Для освоения дисциплины поставлены следующие задачи:

- обучение студентов основным математическим методам аналитической геометрии, необходимым при решении теоретических и практических задач в области экономики, финансов и бизнеса;
- развитие логического и алгоритмического мышления общего уровня математической культуры;
- выработка навыков математического исследования прикладных вопросов, необходимых для экономического анализа, организации и управления;
- обучение студентов методам обработки и анализа результатов численных и натуральных экспериментов;
- привитие студентам умения самостоятельного изучения учебной литературы по алгебре и ее приложениям.

Практическое занятие по теме «Аналитическая геометрия»

Цель: Целью освоения темы «Аналитическая геометрия» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
- использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Аналитическая геометрия» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы аналитической геометрии и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

1. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид: $Ax + By + C = 0$, (33)

где $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ - нормальный вектор прямой, т.е. вектор \vec{n} перпендикулярен прямой, а коэффициент C пропорционален расстоянию p от начала координат до прямой: $C \sim p$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид: $y = kx + b$ (34)

Здесь угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} a$, где a угол между осью Ox и прямой; b – начальная ордината, т.е. ордината точки пересечения прямой с осью Oy .

2. а) Общее уравнение плоскости P имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$, (40)

где $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ - нормальный вектор плоскости, т.е. вектор перпендикулярный плоскости, коэффициент D пропорционален расстоянию p от начала координат до плоскости.

б) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$, имеет вид:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (41)$$

в) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

г) Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, определяется как угол между \vec{N}_1 и \vec{N}_2 ; косинус этого угла находится по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (43)$$

д) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

определяется формулой: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (44)$

3. Прямая в пространстве l определяется как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2 :

$$l: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 1. По координатам вершин пирамиды $A(3; -2; 2)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 0; 4)$, $D(6; -4; 6)$

средствами векторной алгебры найти:

- 1) длины ребер AB и AC ;
- 2) угол между ребрами AB и AC ;
- 3) площадь грани ABC ;
- 4) проекцию вектора \vec{AB} на \vec{AC} ;
- 5) объем пирамиды $ABCD$;
- 6) уравнения прямых AB и AC ;
- 7) уравнения плоскостей ABC и ABD ;
- 8) угол между плоскостями ABC и ABD .

Решение.

1) Найдем векторы \vec{AB} и \vec{AC} :

$$\vec{AB} = (1-3)\vec{i} + (-3-(-2))\vec{j} + (1-2)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = \{-2; -1; -1\}; \quad \vec{AC} = \{-1; 2; 2\}.$$

Длины этих векторов, т.е. длины ребер AB и AC , таковы:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \approx 2,45; \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

2) Скалярное произведение векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} найдем по формуле (21):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = -2,$$

а косинус угла между ними – по формуле (24):

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt{6}} = -0,27.$$

Отсюда следует, что φ – тупой угол, равный $\pi - \arccos 0,27 = 1,85$ рад с точностью до $0,01$. Это и есть искомый угол между ребрами AB и AC .

3) Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , т.е. половина модуля векторного произведения этих векторов (см. формулу 29):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Здесь определитель вычисляется с помощью разложения по первой строке. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54 \text{ (кв. ед.)}$$

4) Проекцию вектора \overrightarrow{AB} на \overrightarrow{AC} найдем по формуле (23):

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2}{3} \approx -0,67.$$

5) Объем пирамиды равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} . Вектор $\overrightarrow{AD} = \{3; -2; 4\}$. Используя формулу (31), получим:

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \text{mod}(-30) = 5 \text{ (куб. ед.)}.$$

6) Уравнения прямых AB и AC найдем как уравнения прямых проходящих через две данные точки, по формуле (48):

$$(AB) \quad \frac{x-3}{1-3} = \frac{y+2}{-3+2} = \frac{z-2}{1-2}, \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1};$$

$$(AC) \quad \frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{0+2} = \frac{z-2}{4-2}, \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

7) Уравнения плоскостей ABC и ABD получим, используя формулу (42):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 2-3 & 0+2 & 4-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$ABC:$ т.е. $5(y+2) - 5(z-2) = 0, \quad 5y - 5z + 20 = 0.$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 6-3 & -4+2 & 6-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$ABD:$ т.е. $-6(x-2) + (y+2) + 7(z-2) = 0, \quad -6x + y + 7z = 0.$

По уравнениям плоскостей определим их нормальные векторы:

$$\vec{N}_1 = \{0; 5; -5\} \text{ и } \vec{N}_2 = \{-6; 1; 7\}.$$

8) Угол φ между плоскостями ABC и ABD найдем по формуле (43):

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|0 + 5 - 35|}{\sqrt{25 + 25} \cdot \sqrt{36 + 1 + 49}} = -\frac{30}{5\sqrt{2}\sqrt{86}} \approx -0.46,$$

откуда $\varphi = \pi - \arccos 0,46 = 2,04$ рад.

Вопросы и задания

Задание 1

Номер вар.	Координаты точки А	Координаты точки В	Координаты точки С	Координаты точки Д
1	(1;2;3)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)
2	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;0)	(-1;4;2)
3	(2;2;3)	(-1;2;0)	(0;3;3)	(2;4;-5)
4	(0;-1;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)
5	(3;0;2)	(2;0;6)	(1;1;2)	(3;2;4)
6	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)
7	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)
8	(1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)
9	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;4)
10	(-2;1;3)	(-1;1;3)	(2;0;2)	(2;0;4)
11	(2;4;-6)	(1;3;5)	(0;-3;8)	(3;2;3)
12	(-2;3;5)	(1;-3;4)	(7;8;-1)	(-1;2;-1)
13	(1;3;5)	(0;2;0)	(5;7;9)	(0;4;8)

14	(3;-5;2)	(4;5;1)	(-3;0;-4)	(-4;5;-6)
15	(4;5;2)	(3;0;1)	(-1;4;2)	(5;7;8)
16	(5;1;0)	(7;0;1)	(2;1;4)	(5;5;3)
17	(4;2;-1)	(3;0;3)	(8;0;4)	(5;-1;-2)
18	(4;-3;-2)	(2;2;3)	(-1;-2;3)	(2;-2;-3)
19	(3;1;1)	(1;4;1)	(1;1;7)	(3;-4;-1)
20	(2;2;0)	(-2;3;-2)	(2;-3;3)	(1;5;5)

По координатам вершин пирамиды ABCD средствами векторной алгебры найти:

- 1) длины ребер AB и AC;
- 2) угол между ребрами AB и AC;
- 3) площадь грани ABC;
- 4) проекцию вектора AB и AC;
- 5) объем пирамиды.

Задание 2

Составить уравнение плоскости P , проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} . Написать ее общее уравнение, а также нормальное уравнение плоскости в отрезках. Составить уравнение плоскости P_1 , проходящей через точки A, B, C . Найти угол между плоскостями P и P_1 . Найти расстояние от точки D до плоскости P .

Номер вар.	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки C	Координаты точки D
1	(2;5;3)	(1;3;5)	(0;-3;7)	(3;2;3)
2	(-2;3;5)	(1;-3;4)	(7;8;-1)	(-1;2;-1)
3	(1;1;2)	(2;3;-1)	(2;-2;4)	(-1;2; 2)
4	(1;3;5)	(0;2;0)	(5;7;9)	(0;4;8)
5	(3;-5;2)	(4;5;1)	(-3;0;-4)	(-4;5;-6)
6	(4;5;2)	(3;0;1)	(-1;4;2)	(5;7;8)
7	(5;1;0)	(7;0;1)	(2;1;4)	(5;5;3)
8	(4;2;-1)	(3;0;4)	(0;0;4)	(5;-1;-3)
9	(4;-3;-2)	(2;2;3)	(-1;-2;3)	(2;-2;-3)
10	(3;1;1)	(1;4;1)	(1;1;7)	(3;4;-1)
11	(1;2;3)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)
12	(0;-1;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)
13	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)
14	(1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)

15	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;4)
16	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)
17	(2;2;3)	(-1;2;0)	(0;3;3)	(2;4;-5)
18	(-2;-2;3)	(1;2;5)	(0;1;0)	(2;6;4)
19	(-2;1;3)	(-1;1;3)	(2;0;2)	(2;0;4)
20	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;0)	(-1;4;2)

Вопросы для собеседования

1. Что является предметом дисциплины Геометрия?
2. Какие приоритетные задачи поставлены перед дисциплиной Геометрия?
3. Каково место математики среди других наук?
4. Каковы основные этапы истории развития Геометрия как науки?
5. Укажите значение дисциплины Геометрия в анализе и моделировании при решении профессиональных задач.
6. Укажите значение дисциплины Геометрия в теоретическом и экспериментальном исследовании моделировании при решении профессиональных задач.
7. Что называется, уравнением прямой?
8. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
9. Как записывается каноническое уравнение прямой?
10. Запишите уравнения осей координат.
11. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
12. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
13. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
14. Сформулируйте условие параллельности прямых.
15. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
16. Как найти угол между прямыми?
17. Каким уравнением описывается кривая на плоскости?
18. Запишите каноническое уравнение эллипса.
19. Что называется, эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?
20. Чему равен эксцентриситет окружности?
21. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
22. Запишите уравнение равносторонней гиперболы.
23. Запишите каноническое уравнение параболы, директрисы параболы.
24. Декартова прямоугольная система координат в пространстве.
25. Метод координат в пространстве.
26. Различные виды уравнения плоскости в пространстве.
27. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.
28. Общее уравнение плоскости.
29. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.
30. Уравнение плоскости «в отрезках».
31. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
32. Угол между двумя плоскостями.
33. Расстояние от точки до плоскости.
34. Различные виды уравнения прямой в пространстве.
35. Уравнения прямой в пространстве: как линии пересечения двух плоскостей.
36. Канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.
37. Взаимное расположение прямых в пространстве.
38. Угол между двумя прямыми.
39. Расстояние от точки до прямой.
40. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.
41. Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве.
42. Угол между прямой и плоскостью.

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные. — Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 с. — 978-5-8265-1412-2. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/63859.html>
2. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебник / А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 с. — ISBN 978-5-94211-710-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71687.html>
3. Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, И. А. Волынская, О. Е. Карпухина [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 104 с. — ISBN 978-5-94211-711-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71688.html>
4. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, В. В. Ивакин, М. А. Керейчук [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 102 с. — ISBN 978-5-94211-712-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71689.html>
5. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля : учебник / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 213 с. — ISBN 978-5-94211-713-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71690.html>
6. Высшая математика. Том 5. Теория вероятностей. Основы математической статистики. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление : учебник / А. П. Господариков, Е. Г. Булдакова, Л. И. Гончар [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 207 с. — ISBN 978-5-94211-715-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71691.html>
7. Высшая математика. Том 6. Специальные функции. Основные задачи математической физики. Основы линейного программирования : учебник / А. П. Господариков, И. Б. Ерунова, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 122 с. — ISBN 978-5-94211-720-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71692.html>

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика : Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
2. Математика в примерах и задачах : Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для бакалавров. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
4. Данко П.Е. Высшая математика в примерах и задачах : В 2-х ч. — М. : ОНИКС, 2008.
5. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитоновна, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/49604.html>