МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ

по дисциплине «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Дисциплина «Дискретная математика» входит в базовую часть ОП ВО подготовки бакалавра по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии» и реализуется в 3 семестре.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте теории дискретной математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении исследовательских задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения содержания дисциплины студент должен:

Знать: основные понятия и законы теории множеств; методологию использования аппарата математической логики и способы проверки истинности утверждений; алгоритмы приведения булевых функций к нормальной форме и построения минимальных форм; основные понятия и законы комбинаторики и комбинаторных схем; понятия предикатов и кванторов; основные понятия и свойства графов; методы решения оптимизационных задач на графах; методологию организации, проведения и обработки данных вычислительного эксперимента; методологию обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований.

Уметь: исследовать булевы функции, получать их представление в виде формул; пользоваться законами комбинаторики для решения прикладных задач; применять основные алгоритмы исследования неориентированных и ориентированных графов; применять методы дискретной математики при решении задач экспериментального исследования в профессиональной деятельности; эффективно использовать математические методы при решении задач анализа результатов профессиональных исследований.

Владеть: навыками решения задач дискретной математики; навыками составлять математические модели задач исследования в профессиональной деятельности; навыками применения современного математического инструментария для проведения профессиональных исследований; способностью передавать результат проведенных исследований в виде конкретных рекомендаций в терминах предметной области знания.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Дискретная математика» составлены в соответствии рабочим учебным планом и рабочей программой дисциплины «Дискретная математика».

Тематический план практических занятий

№ темы	Наименование тем практических занятий	Объем часов	Форма проведения
	3 семестр		
1	Способы задания множеств. Операции над множествами.	1,5	Решение разноуровневых задач
2	Отношения. Отношения эквивалентности. Отношение порядка. Свойства отношений. Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция. Понятие функции.	1,5	Решение разноуровневых задач
4	Основные алгебраические структуры.	1,5	
5	Операции над высказываниями. Таблицы истинности. Логические задачи.	1,5	Решение разноуровневых задач
5	Исчисление высказываний. Алгоритм унификации. Правила вывода.	1,5	
6	Исчисление предикатов. Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций.	1,5	
7	Способы задания булевой функции. Таблица истинности булевой функции.	1,5	
7	Применение законов алгебры логики.	1,5	Решение разноуровневых задач
8	Дизъюнктивные и конъюнктивные совершенные нормальные формы.	1,5	Решение разноуровневых задач
8	Алгоритмы построения полиномов Жегалкина.	1,5	
9	Размещения, перестановки, сочетания в комбинаторике.	1,5	Решение разноуровневых задач
9	Подстановки. Биномиальные коэффициенты. Разбиения.	1,5	
13	Основные характеристики графов. Матрицы смежности и инцидентности. Операции над графами.	1,5	
14	Эйлеров граф. Критерий эйлеровости.	1,5	
14	Гамильтонов граф.	1,5	
15	Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути в нагруженном ориентированном графе.	1,5	Решение разноуровневых задач
15	Задача нахождения критического пути в графе.	1,5	Решение разноуровневых задач
16	Построение минимального остовного дерева нагруженного графа.	1,5	Решение разноуровневых задач
	Итого за 3 семестр	**27**	

Описание практических занятий

Практическое занятие №1. Способы задания множеств. Операции над множествами.

Цель занятия. Приобрести навыки задания множеств, выполнения операций над множествами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает и умеет применять базовые операции над множествами.

Теоретическая часть.

Понятие множества не определяется, а лишь иллюстрируется примерами. Например, можно говорить о множестве статей ГК РФ, о множестве логических возможностей и т.д. Множества будем обозначать прописными латинскими буквами: А,В,...
Если элемент x принадлежит множеству А, пишут $x \in$ А (читают: «x принадлежит множеству А»), в противном пишут $x \notin$ А («x не принадлежит множеству А»). Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым;* его обозначают символом $\varnothing$.

Множество считается заданным, если о любом данном объекте можно однозначно сказать принадлежит он этому множеству или нет. Рассмотрим *два способа* задания множества:

• дается полный перечень элементов множества; например, множество результатов голосования присяжного таково: {«за», «против», «воздержался»};

• указывается правило определения принадлежности любого объекта к рассматриваемому множеству; например, запись $A = \{x : |x| < 10\}$ означает, что А состоит из таких чисел x, модуль которых меньше 10 (после двоеточия записано правило, которому должно удовлетворять число x, чтобы его можно было отнести к множеству А).

Два множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными.*
Если множества А и В равны, то пишут А = В.

Если каждый элемент множества В является в то же время элементом множества А, то говорят, что В – *подмножество* множества А. В этом случае пишут $B \subset A$ (читают «В – подмножество множества А»).

В последующем, исходное множество будем называть *универсальным* и обозначать U. *Собственные подмножества* множества U — это те подмножества, которые содержат некоторые, но не все элементы U. Наряду с собственными подмножествами условимся само U и пустое множество $\varnothing$ также считать подмножествами множества U.

Рассмотрим процесс образования новых множеств из данных множеств А и В, при этом будем предполагать, что и А, и В, и вновь образованное множество являются подмножествами некоторого универсального множества U.

Объединением множеств *A* и *B* (обозначается $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A, B*. *Пересечением* множеств А и В (обозначается $A \cap B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и *A,* и *B*. *Разностью* множеств *A* и *B* (обозначается $A \setminus B$) называется множество всех тех и только тех элементов *A,* которые не содержатся в *B*. Пусть *U— универсальное множество* такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами. *Дополнением* множества А называется множество всех элементов, не принадлежащих А (но принадлежащих U).

Если рассмотреть некоторые конечные множества N и M, у которых имеются соответственно некоторые числа элементов k(N), k(M), то имеет место следующее соотношение:

$$k(N \cup M) = k(N) + k(M) - k(N \cap M).$$

Пример. Вступительный экзамен по физической подготовке в Московский университет МВД России сдавали 2500 абитуриентов, оценку ниже "5" получили 1800 человек, а выдержали этот экзамен 2100 абитуриентов. Сколько человек получили оценки "3" и "4"?

Решение. Предположим, что N — множество абитуриентов, выдержавших экзамен по физической подготовке, M — множество абитуриентов, получивших оценки ниже "5". По условию задачи имеем $k(N) = 2100$, $k(M) = 1800$, $k(N \cup M) = 2500$. Абитуриенты, получившие оценки "3" и "4", образуют множество $N \cap M$. Применяя приведенную выше формулу, находим:

$$k(N \cup M) = k(N) + k(M) - k(N \cap M).$$

$$k(N \cap M) = k(N) + k(M) - k(N \cup M),$$

$$k(N \cap M) = 2100+1800-2500 = 1400.$$

Ответ: 1400 человек получили оценки «3» и «4».

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Что является предметом дисциплины Дискретная математика?

2.Какие приоритетные задачи поставлены перед дисциплиной?

3.Каково место дисциплины среди других наук?

4.Каковы основные этапы истории развития дисциплины как науки?

5.Укажите значение дисциплины Дискретная математика в формировании способности применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

6.Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.

Задача 1. На первом курсе следственного факультета Московского университета МВД России 1500 курсантов, из которых 1050 курсантов изучают английский язык, 675 курсантов изучают немецкий язык и 345 курсантов изучают оба языка. Сколько курсантов следственного факультета не изучают ни английский, ни немецкий язык?

Задача 2. В олимпиаде по информатике и математике принимали участие 40 курсантов Московского университета МВД России, им было предложено решить одно задание по информатике, одно по правовой информатике и одно по математике. Результаты проверки решений заданий представлены в таблице:

Решены задания	Количество решивших	Решены задания	Количество решивших
По информатике	20	По информатике и правовой информатике	7
По правовой информатике	18	По информатике и математике	8
По математике	18	По правовой информатике и математике	9

Известно также, что ни одного задания не решили трое. Сколько курсантов решили все 3 задания? Сколько курсантов решили ровно 2 задания?

Задача 3. В магазине канцелярских принадлежностей Московского университета МВД России курсанты обычно покупают либо одну ручку, либо одну тетрадь, либо одну ручку и одну тетрадь. В один из дней было продано 57 ручек и 36 тетрадей. Сколько было покупателей, если 12 курсантов купили и ручку, и тетрадь?

Задача 4. В одном из городов Украины часть жителей говорит только по-русски, часть - только по-украински, часть говорит и по-русски, и по-украински. Известно, что 90% жителей говорит по-русски, а 80% - по-украински. Какой процент жителей города говорит на обоих языках?

Задача 5. Каждый из курсантов учебной группы Московского университета МВД России в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли N, M и P видели соответственно 25, 12 и 23 курсанта. Сколько курсантов в учебной группе? Сколько из них видели спектакли N и M, N и P,M u P?

Задача 6. В учебной группе из 40 курсантов 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только 5 не умеют ни того ни другого. Сколько курсантов умеют плавать и играть в шахматы?

Задача 7. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы А, В и С. Из 40 школьников, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм А видели 13, фильм В—16, фильм С—19 школьников. Найти, сколько учеников просмотрели все три фильма.

Задача 8. В спортивном лагере 65% ребят умеют играть в футбол, 70%—в волейбол и 75%—в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

Задача 9. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу Л читало 25 учащихся, книгу В-22, книгу С—также 22. Книги А или В читали 33 ученика, А или С—32, В или С—31; все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих трех книг?

Задача 10. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике—48 абитуриентов, по физике—37, по русскому языку—42, по математике или физике—75, по математике или русскому языку—76, по физике или русскому языку—66, по всем трем предметам—4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

Практическое занятие №2. Отношения. Отношения эквивалентности. Отношение порядка. Свойства отношений. Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция. Понятие функции.

Цель занятия. Приобрести навыки определения вида бинарного отношения, его свойств и способа задания.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные бинарные отношения и их свойства, умеет применять свойства отношений на практике.

Теоретическая часть.

Бинарные отношения устанавливают соответствия элементов одного множества элементам другого множества. Если, например, элемент $x \in X$ соответствует элементу $y \in Y$, то факт этого соответствия можно записать в виде упорядоченной пары (x,y). Правило (предписание, принцип), по которому элементу x из X ставится в соответствие y из Y выражают либо в словесной форме, либо в символической (формальной и т.п.). В большинстве случаев символическая форма имеет вид xRy и читается следующим образом «x находится в отношении R к y». В принципе, если между некоторыми элементами множеств X и Y определено отношение R, то оно может быть охарактеризовано однозначным простым перечислением всех пар (x,y), в которых x и y связаны соотношением R. В последнем случае отношение R можно принимать как все множество допускаемых им упорядоченных пар вида (x,y) и писать $(x,y) \in R$, где “R” уже выступает как символ множества.

Бинарное отношение K называется рефлексивным, если $(x,x) \in R$ для всех $x \in X$. Это определение на языке теории множеств пишется в следующем виде: $E \in R, \forall x \in X$, где $E = \{(x,x)/x \in X\} \subset X \times X$.

Отношение R называется антирефлексивным (иррефлексивным), если $(x,x) \in R$, $\forall x \in X$ или $R \cap E = 0$.

Бинарное отношение называется симметричным, если $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ или $R = R^{-1}$.

Отношение R называется антисимметричным, если $(x,y) \in R$ и $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$ или $R \cap R^{-1} \subset E$.

Отношение R называется асимметричным, если из двух отношений x_iRx_j и x_jRx_i,- выполняется по меньшей мере одно, т. е. $R \cap R^{-1} = 0$. Следует заметить, что из асимметрии R вытекает его антирефлексивность.

Бинарное отношение R называется транзитивным , если $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ или $R \circ R \subset R$. Более просто свойство транзитивности отношения R можно сформулировать следующим образом: из x_iRx_j и x_jRx_k всегда следует x_iRx_k. Примером транзитивного отношения может служить отношение включения на множествах. В частности $A \subset B$ и $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Отношение эквивалентности определяется как отношение, обладающее следующими свойствами: 1) рефлексивность, 2) симметричность, 3) транзитивность. Для обозначения этого отношения вводят символ " ~ ". Если R отношение эквивалентности, то запись x_1Rx_2 и $x_1 \sim x_2$ равнозначны $(R \subset X \times X)$.

Примером отношения эквивалентности в геометрии является отношение "подобия" (конгруэнтности).

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Свойства операций над множествами. Их доказательства на основе диаграмм и определений.
2.Прямое произведение множеств. Графическое изображение. Свойства прямого произведения множеств.
3.Кортежи. Проекция кортежа. Проекция множества кортежей на i-ю ось.
4.Соответствия между множествами. Области отправления и прибытия. Функциональное соответствие.
5.n-местная функция. Обратная функция. Композиция функций f и g. Способ нахождения обратной функции.
6.Отображения между множествами. Их типы. Примеры,
7.Мощность множества. Эквивалентные множества. Сравнение конечных множеств. Эквивалентные бесконечные множества.
8.Счетные множества. Примеры. Континуум.
9.Отношения, заданные на множестве. Свойства отношений. Отношения эквивалентности и порядка.
10.Бинарные отношения. Способы задания.
11.Мажоранта. Мижоранта. Максимум. Минимум. Грани.
12.Охарактеризуйте значение понятий и теории данного раздела среди методов и приемов проектирования информационных и автоматизированных систем

Задача 1.Отношение R: “$\leq$” на множестве действительных чисел является ли рефлексивным?

Задача 2. Отношение R: “$\leq$” на множестве действительных чисел является ли транзитивным?

Задача 3.Каким является отношение R: “$<$” ?

Задача 4.Определить, какими свойствами обладает отношение R: «принадлежность к одной студенческой группе» на множестве студентов института?

5. Транзитивно ли отношение неравенства на множестве действительных чисел?

6. Транзитивно ли отношение равенства треугольников в геометрии?

7. Для множеств A, B, и C справедливо отношение $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$. Является ли это отношение транзитивным?

8. Определите свойства следующих отношений:
1. «прямая x пересекает прямую y» (на множестве прямых);
2. «число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел);
3. «число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел);
4. «x - сестра y» (на множестве людей).

Практическое занятие №3. Основные алгебраические структуры.

Цель занятия. Приобрести навыки определения основных алгебраических структур и определения их свойств.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные алгебраические структуры и умеет определять их свойства.

Теоретическая часть.

В математике и различных её приложениях важную роль играют такие математические объекты, которые называются алгебраическими структурами. В широком смысле под алгебраической структурой понимают всякое множество, на котором заданы некоторые операции (т.е. законы, ставящие в соответствие одному или паре элементов по определённому правилу другой элемент), обладающие определёнными свойствами.

Большинство свойств и результатов об этих множествах получают, опираясь на конкретную природу элементов этих множеств и на конкретный смысл операций над ними. В то же время многие результаты можно получить независимо от природы этих множеств и конкретного смысла операций, а исходя только из свойств этих операций.

Среди таких свойств операций рассматриваются: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, наличие специальных элементов, обладающих определёнными свойствами (нулевой, единичный (нейтральный), обратный элемент к данному и т.д.).

В зависимости от количества операций и свойств, которыми они обладают, различают следующие алгебраические структуры.

Полугруппой называется множество G, на котором задана бинарная операция $*$ (часто её называют умножением и обозначают $\cdot$), для которой выполняется свойство

ассоциативности, т.е. для любых $a,b,c \in G$ $(a*b)*c = a*(b*c)$. Если в полугруппе имеется нейтральный элемент e (нулевой, единичный), т.е. такой, что $a*e=e*a=a$ для любого $a\in G$, то полугруппа G называется *унитарной* (полугруппой с нулём; полугруппой с единицей). Если в полугруппе выполняется коммутативный закон, т.е. если для любых $a,b\in G$ $a*b = b*a$, то полугруппа называется *коммутативной* (или *абелевой*).

Унитарная полугруппа называется *группой*, если для любого $a\in G$ существует обратный элемент $b \in G$, т.е. такой, что $a*b = b*a = e$. Если дополнительно выполняется свойство коммутативности, то группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), и в этом случае обычно применяется аддитивная символика, т.е. операция обозначается +, нейтральный элемент 0, обратный элемент к a называют противоположным и обозначается: $-a$.

Если в абелевой группе $(K, +)$ наряду с операцией сложения + задана ещё одна операция: произведение $*$ (или $\cdot$), которая связана с + дистрибутивными законами: $(a+b)*c=(a*c)+(b*c)$, $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ для любых $a,b,c \in K$ и $0*a=a*0=0$ для любого $a \in K$, то K называется *кольцом*. Если в кольце $(K, +, *)$ дополнительно для произведения $*$ выполняется ассоциативный закон, т.е. если

$(a*b)*c=a*(b*c)$ для любых $a,b,c \in K$, то кольцо называется *ассоциативным*. А если кроме того существует единичный элемент 1**,** т.е. такой, что $1*a = a*1=a$ для любого $a\in K$, то кольцо называется *унитарным* (или кольцом с 1). Если в кольце выполняется коммутативный закон для $*$, то кольцо называется *коммутативным*.

Ассоциативное унитарное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент a имеет обратный a^{-1}, т.е. такой, что $a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1$ называется *телом*. Коммутативное тело называется *полем*.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Охарактеризуйте значение понятий и теории данного раздела для анализа и синтеза информации, применения системного подхода для решения профессиональных задач

2.Является ли следующее множество группой, кольцом, полем относительно сложения чисел и умножения чисел:

Вариант 1. - множество действительных чисел;
Вариант 2. - множество рациональных чисел;
Вариант 3. -множество целых чисел;
Вариант 4. -множество неотрицательных рациональных чисел;
Вариант 5. -множество натуральных чисел;
Вариант 6. -множество неотрицательных действительных чисел;
Вариант 7. -множество четных целых чисел;
Вариант 8. -множество неотрицательных целых чисел;
Вариант 9. -множество простых чисел;
Вариант 10. -множество комплексных чисел?
Ответ обоснуйте.

Практическое занятие №4. Операции над высказываниями. Таблицы истинности. Логические задачи.

Цель занятия. Приобрести навыки выполнения логических операций над высказываниями**.**

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные понятия теории высказываний и умеет выполнять операции над высказываниями, строить таблицу истинности высказывания, применять полученные знания к решению логических задач.

Теоретическая часть.

Основным понятием математической логики является понятие *высказывания.* Под высказыванием обычно понимают всякое повествовательное предложение, об истинности или ложности которого имеет смысл говорить. Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным, но не может быть одновременно истинным и ложным. Различают простые и составные высказывания. Высказывание, представляющее связывание простых высказываний в составные осуществляется посредством логических операций, называемых связками.

Отрицанием высказывания X называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание X ложно, и ложным, если высказывание X истинно. Отрицание высказывания X обозначается $\overline{X}$ и читается «не *X*» или «неверно, что X».

Конъюнкцией двух высказываний *Х, У* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания Х, У истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Конъюнкция высказываний обозначается символом Х∧У или Х&У (читается: «Х и У»).

Дизъюнкцией двух высказываний Х и У называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний Х, У истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний обозначается Х∨У (читается: «Х или У»).

Импликацией двух высказываний Х, У называется новое высказывание, которое считается ложным, если Х истинно, а У – ложно, и истинным во всех остальных случаях. Импликация высказываний обозначается символом Х→У (читается: «если Х, то У»).

Эквиваленцией двух высказываний Х, У называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания Х и У либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквиваленция высказываний обозначается символом Х⇔У (читается: «Х тогда и только тогда, когда У»).

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения перечисленных логических операций, называется *формулой алгебры логики*. Две формулы алгебры логики А и В называются *равносильными,* если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний. Равносильность формул обозначают знаком ≡ , а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы:

1. Основные равносильности:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ x\& x \equiv x \\ 2.\ x \vee x \equiv x\end{array}\right\} \text{ – законы идемпотентности.}$$

3. $x \& \text{и} \equiv x$
4. $x \vee \text{и} \equiv \text{и}$
5. $x \& \text{л} \equiv \text{л}$

2. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \& (y \to x)$
2. $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$
3. $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$
4. $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$
5. $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$

3. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x \& y \equiv y \& x$ **– коммутативность конъюнкции.**
2. $x \vee y \equiv y \vee x$ **– коммутативность дизъюнкции.**
3. $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ **– ассоциативность конъюнкции.**
4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ **– ассоциативность дизъюнкции.**
5. $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ **– дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.**
6. $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$ **– дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.**

Формула называется *тождественно истинной (тавтологией),* если она принимает значение «истина» при всех значениях входящих в нее переменных. Формула называется *тождественно ложной,* если она принимает значение «ложь» при всех значениях входящих в нее переменных.

Пример: Доказать, что формула $A \equiv x \to (y \to x)$ тождественно истинная.

Решение: Подвергнем формулу А равносильным преобразованиям:

$A \equiv x \to (y \to x) \equiv$ $\cancel{x \vee (y \vee x) \equiv x \vee (x \vee y) \equiv (x \vee x) \vee y \equiv 1 \vee y \equiv 1.}$

Вывод: формула тождественно истинна, так как всегда имеет значение «истина» или «1». Доказать тождественную истинность формулы можно и с помощью таблицы истинности. Например, для рассмотренной формулы А таблица истинности имеет вид:

x	y	y → x	x→(y→x)
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	Л	И
Л	Л	И	И

Для того, чтобы решить задачу с помощью алгебры логики, необходимо:

- ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую условие задачи в символической форме;
- для полученной формулы найти с помощью равносильных преобразований возможно более простую равносильную формулу;
- пользуясь найденной более простой формулой, перейдя к словесной ее формулировке, определить решение задачи.

Пример:

После обсуждения состава участников, отправляемых на конференцию, было решено, что должны выполняться два условия: а) если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский; б) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин. Найти более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников конференции.

Решение: Назначение на конференцию Арбузова, Брюквина и Вишневского обозначим буквами А,Б,В соответственно. Тогда условие а) можно записать в виде $A \to Б \vee В$, а условие б) в виде $А \wedge В \to Б$. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то их соединим логической связкой «и». Поэтому принятое решение можно записать в виде следующей символической формулы: $(A \to Б \vee В) \wedge (А \wedge В \to Б)$. С помощью равносильных преобразований упростим составленную формулу:

$$(A \to Б \vee В) \wedge (A \wedge В \to Б) \equiv (A \vee Б \vee В) \overline{\wedge} (A \vee В \vee Б) \equiv (A \overline{\vee} Б) \overline{\vee} (В \wedge В) \equiv \overline{A} \to Б$$

Символическая формула означает: «Если поедет Арбузов, то поедет и Брюквин». Это и есть наиболее простая словесная формулировка принятого решения о составе группы сотрудников, отправляемых на конференцию.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Охарактеризуйте значение понятий и теории логики высказываний для построения математических моделей информационных и автоматизированных систем**.**

2.Высказывания. Операции над высказываниями.

3.Формулы логики высказываний. Способы представления истинностных функции.

4.Равносильность формул. Теоремы - правила подстановки, отделения.

5.Истинностные функции. Полные системы связок.

6.Системы связок, состоящие из одной связки, их полнота.

Задача 1. Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул с помощью а) равносильных преобразований; б) таблицы истинности формулы:

1. $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;
2. $(\bar{y} \to \bar{x}) \to (x \to y)$;
3. $(x \to y) \wedge (x \to \bar{y}) \to \bar{x}$;
4. $x \wedge (x \to y) \wedge (x \to \bar{y})$;
5. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;
6. $x \to (x \vee y)$;
7. $x \wedge y \to x$;
8. $\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y$;
9. $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$;
10. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

Задача 2. Пытаясь вспомнить победителей прошлогодних соревнований по стрельбе, пять бывших зрителей заявили:

А) Антон был вторым, а Борис – пятым,
Б) Виктор был вторым, а Денис – третьим,
В) Григорий был первым, а Борис – третьим,
Г) Антон был третьим, а Евгений – шестым,
Д) Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест на соревнованиях?

Задача 3. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Задача 4. Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

- Говорит Мегрэ. Есть новости?
- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила…
- Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.

Какой вывод сделал комиссар Мегрэ? Кто совершил убийство?

Задача 5. Студентам объявили, что в понедельник будет одно занятие по криминалистике и одно по математике, причем, если на первой паре математики не будет, то криминалистика будет на второй паре; если третья пара не математика, то четвертая – криминалистика; если математика будет на первой паре, то криминалистика – на пятой.

Определите, на какой паре будет криминалистика, а на какой математика.

Задача 6. Четыре студентки А, Е, С, Р посещают университет по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

А) Понедельник – день самостоятельной работы на курсе, и в университет не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.

Б) С и Р не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.

В) Если С выйдет в среду или Р – в четверг, то Е согласится побывать на занятиях в пятницу.

Г) Если А не пойдет в ВУЗ в четверг, то Е позволит себе сходить туда в среду.

Д) Если А или Р будут в институте в среду, то С сможет пойти в пятницу.

Е) Если Р в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то А придется сходить в институт во вторник, а С – в четверг.

Задача 7. Четырем сотрудникам уголовного розыска – Антонову, Вехову, Сомову, Дееву необходимо отправиться по служебной необходимости в четыре различных города – Москву, Одессу, Киев и Ставрополь. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

А) Если А не едет в Москву, то С не едет в Одессу.

Б) Если В не едет ни в Москву, ни в Ставрополь, то А едет в Москву. В) Если С не едет в Ставрополь, то В едет в Киев.

Г) Если Д не едет в Москву, то В не едет в Москву.

Д) Если Д не едет в Одессу, то В не едет в Москву.

Задача 8. Сотрудникам ГИБДД Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручено дежурство на 7-ом, 8-ом, 9-ом и 10-ом участках трассы. При проверке после дежурства оказалось, что на 10-ом участке произошло дорожно-транспортное происшествие, подробности которого известны дежурившему сотруднику ГИБДД. Не ушедшие домой сотрудники после дежурства сообщили о следующем:

Андреев: «Я дежурил на 9-ом участке, а Савельев - на 7-ом».

Костин: «Я дежурил на 9-ом участке ,а Андреев – на 8-ом».

Савельев: « Я дежурил на 8-ом участке, а Костин – на 10-ом».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый милиционер в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ее скрывал. Кто из сотрудников на каком участке дежурил?

Задача 9. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен по математике, если известно:

А) Если первый сдал, то и второй сдал.

Б) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.

В) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.

Г) Если четвертый сдал, то и первый сдал.

Задача 10. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто из студентов изучал математическую логику?

Практическое занятие №5. Исчисление высказываний. Алгоритм унификации. Правила вывода.

Цель занятия. Приобрести навыки применения правила вывода, алгоритма унификации.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает алгоритм унификации и умеет применять правило вывода.

Теоретическая часть.

Рассмотрим древнейший образец логического вывода – силлогизм: «Все люди смертны. Сократ - человек. Следовательно, Сократ смертен».

Как формализовать такие умозаключения: научить компьютер проверять их правильность и автоматически генерировать подобные? Наш пример состоит из двух посылок «все люди смертны», «Сократ - человек» и заключения «Сократ смертен», истинность которого следует из истинности посылок. Запишем первую посылку на «предикатном» языке: «$\forall x$ если x - человек, то x смертен». На основании общезначимой формулы $\forall x\, P(x) \to P(a)$ логично, опустив в высказывании квантор $\forall$, подставить вместо x Сократа: «если Сократ - человек, то Сократ смертен». Поставим рядом с полученным высказыванием вторую посылку силлогизма и получим результат, который оформляется в следующем виде:

$$\frac{\text{Если Сократ человек, то Сократ смертен.} \qquad \text{Сократ - человек.}}{\text{Сократ смертен.}}$$

В общем случае над чертой помещаются логические формулы-посылки A,B, истинность которых гарантирует истинность заключения C:

$$\frac{A,B}{C}$$

Словесная запись правил логического вывода звучит так: «Из данных формул-посылок A,B следует формула-заключение C.» (сокращенно: $A \wedge B \to C$). При этом считается, что формула-заключение истинна по крайней мере при всех таких значениях предикатных, предметных и высказывательных переменных, при которых обращаются в истину все формулы-посылки. Метод математической индукции, оформленный как правило вывода, примет вид:

$$\frac{P(1),\ \ P(k) \to P(k+1)}{\forall n\, P(n)}$$

Приведем некоторые правила вывода, работающие в базах знаний:

$$\frac{\boldsymbol{A \to B,\ A}}{\boldsymbol{B}}$$ - правило заключения (modus ponens),

$$\frac{A \to B, \quad B \to C}{A \to C}$$ - правило силлогизма,

$$\frac{\forall x\, P(x),\ \ a}{P(a)}$$ - специализация,

$$\frac{A,\ B}{A \wedge B}$$ - введение конъюнкции.

Рассмотрим следующий пример. В базе данных хранятся сведения о сотрудниках учреждения Петрове, Иванове, Кузнецове, Яковлеве (в дальнейшем обозначим их как П, И, К, Я). Должностная иерархия описывается с помощью двухместных предикатов:

РУК(П,И) означает, что Петров руководит Ивановым,

ОТЧ(Y,X) означает, что Y отчитывается перед X.

В базе данных хранятся три факта:

1: РУК(П,И),

2: РУК(И,К),

3: РУК(К,Я).

Далее описываются два правила вывода, которые имеют место в рассматриваемой предметной области:

1: $\forall X,Y$ РУК(X,Y) $\to$ ОТЧ(Y,X) – если X руководит Y, то Y отчитывается перед X,

2: $\forall X,Y,T$ РУК(X,Y)$\wedge$ОТЧ(T,Y) $\to$ОТЧ(T,X) – если X руководит Y и T отчитывается перед Y, то T отчитывается перед X.

Требуется проверить запрос пользователя: должен ли Яковлев отчитываться перед Ивановым (то есть, сделать заключение ОТЧ(Я,И)).

В базе данных такого факта нет, однако предикат, описывающий интересующую нас связь, встречается в правилах 1 и 2.

Применяя правило 1 к факту 3, получим формулу:

$$РУК(К,Я) \rightarrow ОТЧ(Я,К).$$

Применяем к ней и факту 3 правило вывода modus ponens:

$$\frac{РУК(К,Я) \rightarrow ОТЧ(Я,К),\ \ РУК(К,Я)}{ОТЧ(Я,К)}$$

Так как исходные выражения были истинны, то заключение ОТЧ(Я,К) - новый факт - также является истинным.

Применяя к ОТЧ(Я,К) и факту 2: РУК(И,К) правило 2, получим формулу:

$$РУК(И,К) \wedge ОТЧ(Я,К) \rightarrow ОТЧ(Я,И),$$

указывающую на ответ ОТЧ(Я,И), который однако, надо еще проверить. Для этого связываем факт 2 и ОТЧ(Я,К) правилом «введения конъюнкции»:

$$\frac{РУК(И,К),\ \ ОТЧ(Я,К)}{РУК(И,К) \wedge ОТЧ(Я,К)}$$

и наконец, применяя modus ponens, обосновываем результат

$$\frac{РУК(И,К) \wedge ОТЧ(Я,К) \rightarrow ОТЧ(Я,И),\ \ РУК(И,К) \wedge ОТЧ(Я,К)}{ОТЧ(Я,И)}$$

дающий утвердительный ответ на запрос, действительно ли Яковлев отчитывается перед Ивановым.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Опишите какое значение имеет применение алгебры высказываний к анализу логических возможностей, связанных с решением профессиональных задач

2.Применение алгебры высказываний к анализу логических возможностей, связанных с решением профессиональных задач. Примеры.

3.Применение алгебры высказываний к анализу правильности рассуждений. Примеры.

4. Доказать следующие тождества вначале на языке теории множеств, а затем – на языке теории доказательств:

а) $A \cap (A \cup B) = A$;

б) $A \cup (A \cap B) = A$;

в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup \ \ B) \cap (A \cup C)$;

г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap \ \ B) \cup (A \cap C)$;

д) $I \setminus (A \cup B) = (I \setminus A) \quad (\quad I \setminus B)$.

Практическое занятие №6. Исчисление предикатов. Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций.

Цель занятия. Приобрести навыки математически анализировать суждения с помощью предикатов, применять метод резолюций для доказательства теорем.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основы исчисления предикатов и умеет применять при анализе суждений.

Теоретическая часть.

Рассмотрим истинное высказывание «5 - целое число» и ложное высказывание «π – целое число». Общую часть их можно выделить как предложение-шаблон « - целое число», при подстановке в который конкретного числа получается конкретное высказывание. Введя обозначение: $P(x)$ = «x - целое число», получим $P(5) = 1$; $P(\pi) = 0$. Теперь пусть $P(x)$ = «x - овощ». Замещая x на конкретные плоды, получаем истинное высказывание P(ЛУК)=1, или ложное: P(СЛИВА) = 0 .

Назовем ***предикатом*** $P(x)$ предложение, зависящее от переменной x, принадлежащей некоторой предметной области - множеству U: $x \in U$. В первом примере $x \in R$, во втором U - это множество плодов. При подстановке фиксированного элемента $a \in U$ предикат $P(x)$ превращается в высказывание $P(a) \in \{0,1\}$. Таким образом, предикат можно считать логической функцией, определенной на элементах множества U произвольной природы.

U разбивается предикатом $P(x)$ на два непересекающихся подмножества: на первом из них, которое назовем ***множеством истинности*** , предикат принимает истинные значения, на втором - ложные. Обозначив их через P и P', соответственно, получим: $U = P \cup P'$.

К предикатам применимы все логические операции.

Предложение, определенное на множестве $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, называют ***n-местным предикатом:***

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n), \qquad x_1 \in X_1, \ldots x_n \in X_n .$$

Найдем область истинности трехместного предиката $P(x,y,z) = (xy < z)$, определенного на тройках $(x, y, z) \in A \times A \times A = A^3$, где $A = \{1,2,3,5\}$.

Число всех упорядоченных троек из четырехэлементного множества A равно $4 \cdot 3 \cdot (4-3+1) = 24$. Для сокращения перебора используем симметричность предиката относительно первых двух переменных: $P(x,y,z) = (xy < z) = (yx < z) = P(y,x,z)$.

Далее, для выполнения неравенства необходимо, чтобы правая часть z превосходила каждый из сомножителей x,y. С учетом сказанного, имеем 3 благоприятных случая: $1 \cdot 2 < 3$, $1 \cdot 2 < 5$, $1 \cdot 3 < 5$, дающие 6 элементов области истинности P: $P(1,2,3) = (2<3) = P(2,1,3)$, $P(1,2,5) = (2<5) = P(2,1,5)$, $P(1,3,5) = (3<5) = P(3,1,5)$.

Итак, область истинности P образует множество троек: $\{(1,2,3), (1,2,5), (1,3,5), (2,1,3), (2,1,5), (3,1,5)\}$.

Для записи предикатов можно использовать квантор существования $\exists$, соответствующий словам «существует», «найдется», «хотя бы один», и квантор общности $\forall$, соответствующий словам «для любого», «все», «каждый». Таким образом, кванторы связывают предикатные переменные x, z, превращая предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ в высказывания:

$$\exists x\, P(x); \qquad \forall z\, Q(z).$$

В общем случае, связывая любую из предметных переменных квантором, или заменяя ее предметной постоянной, мы снижаем число мест в предикате на единицу. Например, из двухместного предиката $P(x,y)$ с помощью двух кванторов можно образовать 8 высказываний:

$$\forall x\, \forall y\; P(x,y) \longleftrightarrow \forall y\, \forall x\; P(x,y),$$
$$\exists x\; \exists y\; P(x,y) \longleftrightarrow \exists y\, \exists x\; P(x,y),$$
$$\exists x\, \forall y\; P(x,y) \longleftrightarrow \forall y\; \exists x\; P(x,y),$$
$$\forall x\, \exists y\; P(x,y) \longleftrightarrow \exists y\, \forall x\; P(x,y),$$

только два первых из которых равносильны, так как разноименные кванторы переставлять нельзя.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1..Предикаты.

2.Кванторы. Свойства кванторов. Примеры.

3. Логические операции над предикатами.

Задача 1

а) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: A(x): «x – чётное число»; B(x): «x не делится на 3». Найти множество истинности предиката $A(X) \wedge B(X)$.

б) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: C(x):"x кратно 5"; D(x):"x - чётное "; Найти множество истинности предиката $D(x) \wedge C(x)$.

в) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: A(x):"x – чётное число"; C(x):"x кратно 5". Найти множество истинности предиката $\neg A(x) \wedge C(x)$.

г) На множестве $M = \{1..20\}$ заданы предикаты: A(x):"x – чётное число"; B(x):"x делится на 3"; C(x):"x кратно 5. Найти множество истинности предиката $B(x) \vee A(x) \vee C(x)$.

д) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: C(x):"x – не кратно 5"; D(x):"x - непростое"; Найти множество истинности предиката $C(x) \to \overline{D(x)}$.

Задача 2.

а) На множестве M заданы предикаты: A(x) и B(x). Изобразить на диаграмме множество истинности предиката $A(X) \wedge B(X)$.

б) На множестве M заданы предикаты: A(x) и C(x). Изобразить на диаграмме множество истинности предиката $C(x) \setminus A(x)$.

в) На множестве M заданы предикаты: A(x) и C(x). Изобразить на диаграмме множество истинности предиката $\overline{A(x)} \wedge \overline{C(x)}$.

Задача 3.

а) Для предиката $P(x)$:" $(x + 0 = x)$" , $x \in R$, определить значение $\forall x P(x)$.

б) Для предиката $P(x)$:" $(x \cdot 0 = 0)$" , $x \in R$, определить значение $\forall x P(x)$.

в) Для предиката $P(x)$:" $(2x = 4)$" , $x \in R$, определить значение $\exists x P(x)$.

г) Для предиката $P(x)$:" $(x + 10 = x + 5)$", $x \in R$, определить значение $\exists x P(x)$.

д) Для предиката $P(x)$:" $(x^2 - 2x + 1) = 0$", $x \in R$, определить значение $\exists x P(x)$.

е) Для предикатов $P(x)$:" $(x^2 + x - 2 > 0)$", $Q(x)$:" $(x^2 + x + 0.5 = 0)$", $x \in R$ определить значение $\exists x (P(x) \vee Q(x))$.

ж) Для предикатов $P(x)$:" $(2x^2 + 3x - 5 \geq 0)$", $Q(x)$:" $(2x^2 + 3x - 5 \leq 0)$", $x \in R$ определить значение $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

з) При $x \in R$ определить значение высказывания $\exists x((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \wedge (x^2 - 2x + 1 > 0))$.

и) При $x \in R$ определить значение высказывания $\exists x((x \in \{2,5\}) \longrightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0))$.

Практическое занятие №7. Способы задания булевой функции. Таблица истинности булевой функции.

Цель занятия. Приобрести навыки построения таблицы истинности функции, определения тождественной истинности или ложности формулы. выполнения равносильных преобразований с применением законов алгебры логики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные способы задания булевой функции, умеет строить таблицу истинности формулы.

Теоретическая часть.

Булевой функцией $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется любая функция, в которой аргументы и функция могут принимать значение либо 0, либо 1.

Булеву функцию от n переменных можно задать таблицей истинности, в которой наборы значений аргументов расположены в порядке возрастания их номеров: сначала идет набор, представляющий собой двоичное разложение 0 (этот набор имеет номер 0); затем идет набор, являющийся двоичным разложением 1, потом 2, 3 и т.д.

Отрицание - булева функция одной переменной, которая определяется следующей таблицей истинности

x	0	1	Обозначения
f(x)	1	0	¬x, $\overline{x}$

Некоторые элементарные булевы функции двух переменных приведены ниже.

xy	$x\&y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \sim y$	$x \to y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
00	0	0	0	1	1	1	1
01	0	1	1	0	1	1	0
10	0	1	1	0	0	1	0
11	1	1	0	1	1	0	0

С помощью суперпозиции элементарных булевых функций можно построить более сложные функции, которые могут зависеть от любого числа переменных. Запись булевых функций через элементарные булевы функции будем называть **формулой** реализующей данную функцию.

Для более компактной записи сложных функций введем следующие соглашения:

1) внешние скобки опускаются;

2) сначала производятся операции я скобках;

3) считается, что приоритет связок убывает в следующем порядке:, ($\wedge$,|, $\downarrow$), $\vee$, ($\to$,$\oplus$), $\leftrightarrow$.

Для равносильных связок (в скобках) приоритет определяется слева на право.

Пример**.** Расставить скобки в формулах:

1) $x \vee y \leftrightarrow z \oplus x$; 2) $x \downarrow y \vee z$; 3) $x \oplus y) \leftrightarrow z \to x \wedge y \vee \neg z$.

Решение: 1) в формуле $x \vee y \leftrightarrow z \oplus x$ скобки расставляются следующим образом: $((x \vee y) \leftrightarrow (z \oplus x))$;

2) т.к. операция $\downarrow$ сильнее операции $\vee$ согласно замечанию имеем $((x \downarrow y) \vee z)$;

3) в формуле $(x \oplus y) \leftrightarrow z \to x \wedge y \vee \neg z$ используя введенное старшинство связок; получаем, что данная формула равносильна $((x \oplus y) \leftrightarrow (z \to ((x \wedge y) \vee (\neg z))))$.

Пример**.** Составить таблицы истинности для формул:

а) $x \leftrightarrow \overline{y} \to (y \oplus x)$; б) $x \mid ((\overline{y} \vee z) \downarrow (\overline{x \wedge z}))$.

Решение:

а) используя введенное старшинство связок, получим, что данная формула $\rightarrow (y$ равносильна x $\leftrightarrow(\bar{y} \oplus x)$), а таблица истинности примет вид:

x	y	$\bar{y}$	$(y \oplus x)$	$\bar{y} \rightarrow (y \otimes x)$	$x \leftrightarrow(\bar{y} \rightarrow (y \oplus x))$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

б) составим таблицу истинности для формулы $x \mid ((\bar{y} \vee z) \downarrow (\overline{x \wedge z})$

x	y	z	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{y} \vee \bar{z}$	$x \wedge z$	$\overline{x \wedge z}$	$(\bar{y} \vee \bar{z}) \downarrow (\overline{x \wedge z})$	F (x, y)
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Формула называется тождественно **истинной (ложной),** если она принимает значение **1 (0)** при всех значениях входящих в нее переменных.

Пример**.** Является, ли формула $((x \rightarrow y) \wedge \bar{y}) \rightarrow \bar{x}$ тождественно истинной?

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \rightarrow y$	$(x \rightarrow y) \wedge \bar{y}$	$((x \rightarrow y) \wedge \bar{y}) \rightarrow \bar{x}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Формула равна 1 при всех значениях входящих в нее переменных, следовательно, она тождественно истинная (тавтология).

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Опишите значение использования булевых функций для построения алгоритмов представления данных для передачи в автоматизированных системах управления.
2.Булевы функции. Примеры булевых функций для случая двух и трех переменных.
3.Теоремы о разложении булевых функций в КНФ.
4.Теоремы о разложении булевых функций в ДНФ.
5.Способы задания булевой функции.
6.Таблица истинности булевой функции.
7.Порядок выполнения логических операций.
8.Как определить число строк в таблице истинности.

9. Порядок выполнения логических операций.
10. Как определить число строк в таблице истинности.
11. Составить таблицу истинности данной булевой функции:

1. $(x \oplus yz) \rightarrow \underline{x} \vee z$
2. $(x \mid y) \rightarrow (zy \oplus x)$
3. $(x \rightarrow \overline{y)} \oplus (z \vee x)$
4. $(x \vee y) \oplus (\bar{z} \leftrightarrow y)$
5. $(x \vee \overline{y \rightarrow z)} \oplus y$
6. $\bar{x} \vee y \rightarrow zy$
7. $(x \downarrow y) \vee \overline{x \rightarrow z}$
8. $(xy \rightarrow z) \vee x \oplus y$
9. $(x \mid y)z \rightarrow \bar{y} \vee x)$
10. $(x \rightarrow yz) \oplus \bar{x}$
11. $x \vee y\bar{z} \rightarrow xy$
12. $(x \oplus y)(z \vee \cancel{x})$
13. $(x \vee y) \oplus (z \rightarrow y)\bar{}$
14. $(x \downarrow y) \oplus z \vee \bar{x}$
15. $(x \vee y \rightarrow \overline{z)} \oplus y$
16. $x \leftrightarrow (\underline{y} \oplus z \vee y)$
17. $x \vee y$ $z \oplus y$
18. $(x \oplus y)z \vee \bar{\cancel{x}}$
19. $(x \rightarrow \overline{y)} \oplus (z \vee y)$
20. $(x \mid y)z \vee \bar{x}$
21. $((x \rightarrow y) \oplus z) \leftrightarrow \bar{y}$
22. $(x \downarrow y) \leftrightarrow (z \oplus y)$
23. $((x \vee y) \oplus z) \rightarrow y$
24. $(xy \oplus z) \rightarrow \bar{x}$
25. $x \oplus (y \downarrow z) \oplus y$
26. $\overline{x \rightarrow y} \vee (\bar{y} \vee z)$
27. $(x \mid y) \oplus (y \rightarrow z\bar{x})$
28. $\overline{x \rightarrow y}(x \vee (\bar{y} \oplus z))$
29. $(x \oplus z) \leftrightarrow (zx \vee y)$
30. $x(\overline{y \rightarrow z)} \leftrightarrow (\bar{y} \oplus z)$

Практическое занятие №8. Применение законов алгебры логики.

Цель занятия. Приобрести навыки выполнения равносильных преобразований с применением законов алгебры логики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные законы алгебры логики и умеет применять их для преобразования булевых функций.

Теоретическая часть.

Булевы функции f_1 и f_2 называются эквивалентными, если на всяком наборе $(a_1, a_2, ..., a_n)$ нулей и единиц значения функций совпадают. Обозначение эквивалентных (равносильных) функций следующее: $f1 = f2$ или $f1 \equiv f2$.

Основные эквивалентности (H,H_1, H_2, H_3 ... означают некоторые булевы функции):

1. Закон двойного отрицания: $H = \bar{\bar{H}}$
2. Идемпотентность: $HH = H$, $H \vee H = H$
3. Коммутативность: $H_1 * H_2 = H_2 * H_1$, где символ $*$ означает одну из связок $\&, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow$.
4. Ассоциативность: $H_1 *(H_2 * H_3) = (H_1 * H_2) * H_3$, где символ $*$ означает одну из связок $\&, \vee, \oplus, \sim$.

5.Дистрибутивность: $H_1 \& (H_2 \vee H_3) = (H_1 \& H_2) \vee (H_1 \& H_3)$,
$H_1 \vee (H_2 \& H_3) = (H_1 \vee H_2) \& (H_1 \& H_3)$.

6. Закон де Моргана: $\overline{H_1 \& H_2} = \overline{H_1} \& \overline{H_2}$, $\overline{H_1 \vee H_2} = \overline{H_1} \& \overline{H_2}$,

7. Правила поглощения: $H_1 \vee (H_2 \& H_1) = H_1$, $H_1 \& (H_2 \vee H_1) = H_1$

8. Законы склеивания: $H_1 \& H_2 \vee H_1 \& \overline{H_2} = H_1$, $(H_1 \vee H_2) \& (H_1 \vee \overline{H_2}) = H_1$

9. Законы инверсий: $H \vee \overline{H} = 1$, $H \& \overline{H} = 0$.

10. Правила операций с константами: $H \vee 1 = 1$, $H \& 1 = H$, $H \vee 0 = H$, $H \& 0 = 0$.

Все приведенные соотношения легко проверяются по таблицам истинности.

<u>Пример:</u> Упростить формулы, используя основные законы эквивалентности:

1) $x\bar z \vee \bar x \vee \bar x \bar z \vee \bar y z = \bar z \vee \bar y z = \bar z \vee \bar y \bar z \vee \bar x \vee \bar y z = \bar z \vee \bar y \vee \bar x$;

2)

$$(x \to y) \wedge y \to x \overset{x\to y = \bar x \vee y}{=} \neg((x \to y) \wedge y) \vee x \overset{(6)}{=} (\neg(x \to y) \vee \neg y) \vee x \overset{x\to y = \bar x \vee y, (6)}{=}$$

$$= (x \wedge \neg y \vee \neg y) \vee x \overset{(3)}{=} (\neg y \vee \neg y \wedge x) \vee x \overset{(2)}{=} \neg y \vee x \overset{x\to y = \bar x \vee y}{=} y \to x;$$

3)

$$\bar x yz \vee xy \vee xyz \vee \bar x z \vee x \bar z = xz(\bar y \vee y) \vee xy \vee \bar x z \vee x\bar z = xz \vee xy \vee \bar x z \vee x \bar z =$$

$$= (xz \vee x\bar z) \vee (xz \vee \bar x z) \vee xy = x(z \vee \bar z) \vee z(x \vee \bar x) \vee xy = x \vee z \vee xy = x(1 \vee y) \vee z = x \vee z;$$

4)

$$\overline{\overline{\overline{x_1 \vee x_2 x_3} \cdot \overline{\overline{\overline{x_1} x_2} \vee x_3}}} = \overline{\overline{x_0}(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})} \vee \overline{(\overline{x_1} x_2) x_3} = (x_1 \vee x_2 x_3) \vee \overline{(\overline{x_1} x_2} \vee x_3) = \overline{\overline{x_1}(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})} =$$

$$= x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 .$$

<u>Пример</u>**:** С помощью равносильных преобразований упростить формулу

$$x\bar y \to (\bar x \vee \bar y)\bar z .$$

$$x\bar y \to (\bar x \vee \bar y)\bar z \equiv \overline{x\bar y} \vee (\bar x \vee \bar y)\bar z \equiv \bar x \vee \bar{\bar y} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz} \equiv \bar x \vee y \vee \overline{xz} \vee \overline{yz} \equiv \bar x \vee \bar y \vee \bar z \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} а) \bar x \vee (\bar y \vee z) \equiv x \to (\bar y \vee z); \\ б) \bar z \vee (\bar x \vee y) \equiv z \to (x \vee y); \\ в) (\bar y \vee \bar x \vee z) \equiv y \vee \overline{xz}; \\ г) \bar x \vee \bar z \vee y \equiv \overline{xz} \vee y \equiv xz \to y; \\ д) \bar x \vee \bar y \vee \bar z \equiv \overline{xyz}. \end{cases}$$

Любую запись а) - д) можно считать ответом.

<u>Пример</u>**:.** Проверьте, будут ли эквивалентны следующие функции:
$(x \to z)(y \to z)$; $(x \vee y) \to z$.

С помощью равносильных преобразований получаем, что

$$(x \to z)(y \to z) \equiv (\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee z) \equiv \bar{x}\bar{y} \vee z\bar{y} \vee \bar{x}z \vee z \equiv \overline{xy} \vee z \equiv x \vee \overline{y \vee z} \equiv (x \vee y) \to z,$$

т.е. функции эквивалентны.

Пример:. Доказать равносильность $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$.

$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x \wedge x \vee y \wedge x \vee x \wedge \bar{y} \vee y \wedge \bar{y} \equiv \equiv x \vee y \wedge x$

$\vee x \wedge \bar{y} \equiv x \wedge (1 \vee \bar{y} \vee y) \equiv x \wedge (1 \vee \bar{1}) \equiv x.$

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1. Доказать следующие равносильности:

1. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$
2. $x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \mid \bar{y}}$
3. $x \downarrow y \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$
4. $x \mid y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$
5. $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$
6. $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$
7. $x \vee (y \wedge x) \equiv x$
8. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \downarrow \bar{y}}$
9. $x \mid y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$
10. $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$
11. $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y$
12. $xy \to z \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
13. $x \oplus y \equiv \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$
14. $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv x$
15. $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \equiv \bar{x}($
16. $(\bar{x} \vee y) \downarrow (\overline{\bar{y} \vee z}) \equiv \overline{(\bar{x} \vee y) \vee \overline{\bar{y} \vee z})}$
17. $x \oplus (y \oplus z) \equiv (x \oplus y) \oplus z$
18. $\bar{x}y \to (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \equiv x\bar{y}z$
19. $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$
20. $\bar{x} \to \bar{y} \equiv 1 \oplus y \oplus xy$
21. $x \leftrightarrow y \equiv (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$

2. Показать, что формулы $\bar{b} \vee \bar{a}$, $a \wedge \bar{b} \to \bar{a}$, $a \wedge \bar{b} \to b$ имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $a \to b$.

3. Проверьте, будут ли эквивалентны следующие функции:

1. $x \to (y \oplus z)$, $(x \to y) \oplus (x \to z)$
2. $x \wedge (y \oplus z)$, $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
3. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$, $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
4. $x \vee (y \mid z)$, $(x \vee y) \mid (x \vee z)$
5. $x \oplus (y \to z)$, $(x \to y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
6. $x \mid (y \to z)$, $(x \mid y) \to (x \mid z)$
7. $x \wedge (y \to z)$, $xyz \vee \bar{x} \mid \bar{y}$
8. $x \vee (y \to z)$, $(x \vee y) \to (x \vee z)$
9. $x \oplus (y \to z)$, $(xy) \leftrightarrow (x \oplus z)$
10. $x \downarrow (y \leftrightarrow z)$, $(x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
11. $\bar{x} \downarrow (y \wedge \bar{z})$, $(x \leftrightarrow \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee z)$
12. $(y \vee \bar{x}) \oplus (\bar{y} \wedge z)$, $(x \oplus y) \vee (x \oplus z)$
13. $x \oplus y, y \oplus x$
14. $x \vee \bar{y}, \bar{x} \leftrightarrow y$
15. $\bar{x} \vee \bar{y}, \bar{x} \mid \bar{y}$
16. $\bar{x} \wedge \bar{y}, \bar{x} \downarrow \bar{y}$
17. $x(y \vee x), x$
18. $\bar{x} \wedge \overline{y \wedge x}, x$
19. $xy \downarrow z, z \downarrow xy$
20. $x \vee yz, (x \vee y)(x \vee z)$.

4. Преобразуйте формулы, используя основные законы эквивалентности:

1. $\overline{xy} \vee \overline{\bar{y} \vee xy}$
2. $\overline{\overline{x \vee y} \vee \overline{\bar{x}y \vee xy}}$
3. $\overline{x \vee xy} \vee \overline{x\bar{y} \vee \bar{x}}$
4. $\overline{x \vee y} \vee \overline{\overline{xy \vee \bar{y}} \vee \bar{x}y}$
11. $\overline{xy} \vee \overline{\overline{xy} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}} \vee x\bar{y}$
12. $\overline{(xyz \vee z) \vee (xyz \vee \bar{z})}$
13. $\overline{\overline{xyz} \vee xy\bar{z}} \vee x\bar{y}$
14. $x\overline{yz} \vee \overline{\overline{xyz} \vee xy\bar{z}}$

5. $xyz \vee \bar{x}y \vee \overline{xyz} \vee \bar{y}z$

6. $xy\bar{z} \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z} \vee y\bar{z} \vee \quad \bar{x}y\bar{z}$

7. $xy\bar{z} \vee yz \vee x\bar{y} \vee \overline{x \vee \bar{y}}$

8. $x\bar{z} \vee \overline{xy}z \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z$

9. $x\bar{y}z \vee xy \vee \overline{\bar{x} \vee z} \vee \bar{x}z$

10. $x\bar{y}z \vee \overline{x \vee z} \vee \overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{z}} \vee xyz$

15. $x\bar{y}z \vee \overline{\bar{x} \vee y \vee z} \vee x\bar{y} \vee x\overline{yz}$

16. $\overline{xy}z \vee \overline{y \vee \bar{z}} \vee x\bar{y}z \vee \overline{x \vee y \vee \bar{z}}$

17. $xy\bar{z} \vee yz \vee \bar{x} \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z}$

18. $\bar{x}yz \vee xz \vee y\bar{z} \vee \overline{y \vee \bar{z}}$

19. $(\overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x}z)(y \vee \bar{y})(y \vee z)$

20. $xy \vee xyz \vee x \vee \overline{xyzt}$.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Применение алгебры высказываний к анализу логических возможностей, спредставления данных для передачи в автоматизированных системах управления
2.Применение алгебры высказываний к анализу правильности рассуждений. Примеры.
3.Применение алгебры высказываний к анализу и синтезу систем из двухпозиционных элементов.

Практическое занятие №9. Дизъюнктивные и конъюнктивные совершенные нормальные формы.

Цель занятия. Приобрести навыки построения СКНФ (СДНФ) с помощью различных алгоритмов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные законы алгебры логики и умеет применять алгоритмы построения СКНФ (СДНФ) булевых функций.

Теоретическая часть.

Множество всех булевых в базисе $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ образуют **булеву алгебру.** Если x - логическая переменная, $a = \sigma \in \{0,1\}$ то выражение

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x & \text{если} \quad \sigma = 1 \\ \bar{x} & \text{если} \quad \sigma = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \; x^{\sigma} = \begin{cases} & \text{если} \quad x = \sigma \\ 0 & \text{если} \quad x \neq \sigma \end{cases},$$

называется литерой. Литеры x и $\neg x$ называются контрарными. **Конъюнктом** называется конъюнкция литер. **Дизъюнктом** называется дизъюнкция литер. **Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** называется дизъюнкция конечного числа конъюнктов. **Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

Пусть функция f записан в базисе $S1$. Данная функция приводится к нормальном форме следующим путем:

1. используем законы де Моргана, чтобы преобразовать формулу к виду, в котором знаки отрицания относятся только к отдельным переменным;

2. применяем правило снятия двойного отрицания: $\bar{\bar{x}} = x$;

3. далее следует использовать законы дистрибутивности, причем первый закон дистрибутивности для приведения к ДНФ, и второй закон дистрибутивности для приведения к КНФ.

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо сами, либо их отрицания), причем в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входит ровно один раз (либо сама либо ее отрицание), то эта форма называется **совершенной нормальной формой (СДНФ или СКНФ).**

Пример: По данной таблице истинности построить СДНФ.

Решение рассмотрим на примере функции $f(x, y, z)$, заданной таблично:

x	y	z	Конституенты 1	Конституенты 0	$f(x, y, z)$
0	0	0	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$x \vee y \vee z$	0 1 1
0	0	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	$x \vee y \vee \bar{z}$	0 0 1
0	1	0	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$x \vee \bar{y} \vee z$	1 1
0	1	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	
1	0	0	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \vee y \vee z$	
1	0	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	
1	1	0	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	
1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	

Конституенты_1 (или основные конъюнкции), включенные в таблицу, соответствуют конкретному набору нулей и единиц, которые принимают переменные x, y, z . Строятся конституенты_**1** по следующему правилу: переменная входит в произведение сама, если на данном наборе она принимает значение 1, в противном случае в произведение входит ее отрицание.

Правило для построения СДНФ: следует выбрать строки, в которых функция равна 1, а затем взять дизъюнкцию соответствующих конституент **1**. Так для нашего примера, имеем

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z.$$

Пример: По данной таблице истинности построить СКНФ.

Решение: **Конституенты_0** для набора нулей и единиц (которые принимают z) переменные x, y, строится следующим образом: переменная входит в дизъюнкцию сама, если на данном наборе она принимает значение 0, в противном случае в дизъюнкцию входит её отрицание.

Правило для построения СКНФ: следует выбрать строки, в которых функция равна 0, а затем взять конъюнкцию соответствующих конституент_0. В результате получится искомая СКНФ. Так для нашего примера, имеем

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z).$$

Описанный способ нахождения СДНФ (СКНФ) по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

1.Для нахождении СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ.

2. Если в некоторый конъюнкт K не входит скажем переменная y , то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $K \wedge (y \vee \bar{y})$ и, применяя 1-й закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ. Если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида ($y \vee \overline{y}$).

3. Если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.

Замечание: Для построения СКНФ дизъюнкт не содержащий скажем переменную y заменяем на эквивалентную формулу $D \vee y \cdot \overline{y}$ и, применяем 2-й закон дистрибутивности.

Пример**:** Построить СКНФ для функции F при помощи эквивалентных преобразований

$F_1 = x \mid (y \oplus z) = \overline{x} \vee \overline{(y \oplus z)} = \overline{x} \vee \overline{(\overline{y}z \vee y\overline{z})} = \overline{x} \vee \overline{\overline{y}z} \cdot \overline{y\overline{z}} = \overline{x} \vee \overline{\overline{(y}} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{y} \vee \overline{\overline{z}}) = \overline{x} \vee (y \vee \overline{z}) \cdot (\overline{y} \vee$
$z) \overline{=} = (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) - СКНФ$

Пример**:** С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. $F = \overline{((x \downarrow y) \to \overline{z})} \leftrightarrow y.$

Решение: Приведем функцию F к базису $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee\}$

$F = \overline{(\overline{x} \cdot \overline{y} \to)} \leftrightarrow y = \overline{(\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} \vee \overline{z})} \leftrightarrow y = \overline{(x \vee y \vee \overline{z})} \leftrightarrow y = \overline{(x \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{y})(\overline{\overline{x \vee y \vee z}} \vee y)} =$

$= \overline{x \cdot y \cdot z \vee y} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z} \cdot \overline{y} = (x \vee y \vee \overline{z})\,\overline{y} - КНФ$

Для приведения F к ДНФ, применим первый закон дистрибутивности. $F = x\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{y} \vee \overline{z} \cdot \overline{y} = x\overline{y} \vee \overline{z} \cdot \overline{y} = x\overline{y} \vee \overline{z} \cdot \overline{y} - ДНФ$

Приведем функцию F к СДНФ:

$F = x\overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{y} = x\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee \overline{z}\,\overline{y}(x \vee \overline{x}) = x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee (\overline{z}\,\underline{\underline{\overline{y}x}} \vee \overline{z}\,\overline{y}\,\overline{x}) = x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}.$

Приведем функцию F к СКНФ:

$F = (x \vee y \vee \overline{z})\,\overline{y} = (x \vee y \vee \overline{z})(\overline{y} \vee x\overline{x}) = (x \vee y \vee \overline{z})(\overline{y} \vee x)(\overline{y} \vee \overline{x}) = (x \vee y \vee \overline{z})(\overline{y} \vee x \vee z\overline{z}) \cdot$
$(\overline{y} \vee \overline{x} \vee z\overline{z}) = (x \vee y \vee \overline{z})(\overline{y} \vee x \vee z)(\overline{y} \vee x \vee \overline{z})(\overline{y} \vee \overline{x} \vee z)(\overline{\overline{y} \vee \overline{x}} \vee \overline{z}).$

Пример: Привести функцию к ДНФ, используя 1-ый закон дистрибутивности.

$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{x \cdot y \cdot \overline{z}} \cdot (y \vee z) = x \cdot \overline{y} \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{z}}) \cdot (y \vee z) = (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{x} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z) \cdot (y \vee z) = -это КНФ$
$= (0 \vee x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z) \cdot (y \vee z) = (x \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z) \cdot (y \vee z) = -это\ другая\ \ КНФ$
$= x \cdot \underline{y} \cdot y \vee x \cdot \underline{y} \cdot z \cdot y \vee x \cdot \underline{y} \cdot z \vee x \cdot \underline{y} \cdot z \cdot z = 0 \vee 0 \vee \underline{x} \cdot y \cdot z \vee \underline{x} \cdot y \cdot z = \underline{x} \cdot y \cdot z \vee \underline{x} \cdot y \cdot z - это\ ДНФ$

Пример: Привести функцию к КНФ, используя второй закон дистрибутивности.

$x \vee y \cdot \overline{x \cdot y \vee \overline{z}} = x \vee y \cdot (\overline{x \cdot y} \cdot \overline{\overline{z}}) = x \vee y \cdot (\overline{x} \vee \overline{y}) \cdot z = x \vee y \cdot z \cdot (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \vee y \cdot z) \cdot (x \vee \overline{x} \vee \overline{y})$
$= = (x \vee y) \cdot (x \vee z) \cdot (\overline{1} \vee y) = (x \vee y) \cdot (x \vee z) - это\ КНФ$

Пример: По данной таблице истинности построить СДНФ:

x	y	z	основные конъюнкции	$f(x, y, z)$
0	0	0	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$	0
0	0	1	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$	1
0	1	0	$\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$	1
0	1	1	$\overline{x} \cdot y \cdot z$	0

1	0	0	$x\cdot\bar y\cdot\bar z$	0
1	0	1	$x\cdot\bar y\cdot z$	1
1	1	0	$x\cdot y\cdot\bar z$	1
1	1	1	$x\cdot y\cdot z$	1

Построим СКНФ для нашего примера на основании замечания.

1. Строим СДНФ для отрицания $\bar x\cdot\bar y\cdot\bar z\vee\bar x\cdot y\cdot z\vee x\cdot\bar y\cdot\bar z$.

2. Используем законы де Моргана, получаем

$f=\overline{\overline{f}}=\overline{\bar x\cdot\bar y\cdot\bar z\vee\bar x\cdot y\cdot z\vee x\cdot\bar y\cdot\bar z}=\overline{\bar x\cdot\bar y\cdot\bar z}\wedge\overline{\bar x\cdot y\cdot z}\wedge\overline{x\cdot\bar y\cdot\bar z}=(x\vee y\vee z)\cdot(x\vee\bar y\;\;\bar z)\cdot(\bar x\vee$
$\vee\vee y\vee z)$.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

Какие из следующих функций записаны в нормальной форме, а какие нет?

1. $x\vee y\to z$; 2. $(x\cdot y\vee\bar x)\cdot(z\vee x)$; 3. $(x\vee z\vee\bar x)\cdot x\cdot y\cdot(\bar z\vee x)$;
4. $x\cdot y\vee\bar x\cdot y\cdot(x\vee y)$; 5. $x\cdot y\cdot z\cdot\bar x\cdot x\vee z\cdot\overline{y\vee x}$; 6. $(x\vee y\vee y\vee z)\cdot\bar z\cdot(z\vee x)$;
7. $x\cdot y\vee\bar x\cdot z\vee y\cdot z\cdot\bar x\vee z$; 8. $(x\vee y\vee z)(y\vee xy\vee\bar z)$; 9. $\overline{xyz}\vee\bar x y\vee x\overline{yz}$;
10. $\overline{xyz\vee x\bar y z}\vee xy\bar z$; 11. $(yz\vee xy\vee z)(x\vee y\vee\bar x z)$; 12. $\overline{xyz}\vee\overline{\bar x y}\vee\overline{xy\bar z}$;
13. $\overline{xy\vee z}\vee xy\vee\overline{\bar z\vee xy}$; 14. $(x\vee y\vee z\vee t)(x\vee y)t$; 15. $x\vee y\vee\bar z\vee(x\vee yz)$;
16. $\bar x yz\vee x\overline{yz}\vee yz(\bar x\vee z)$; 17. $x\vee y\vee\bar z\vee xy\vee\bar y z$; 18. $\overline{xyz}\vee(x\vee y)(\bar y\vee z)$;
19. $(x\vee\bar y\vee z)(\bar x\vee\bar y\vee z)(\bar x\vee y)$; 20. $xyz\vee xy\vee\overline{zt}\vee x\bar y\,\overline{zt}$; 21. $(x\vee y\vee z)\cdot x\cdot(z\vee x)$.

5. Привести следующие формулы к ДНФ и КНФ и по возможности упростить.

1. $x\vee yz$; 2. $x\leftrightarrow y$; 3. $x\leftrightarrow yz$;
4. $x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$; 5. $xy\leftrightarrow\overline{xy}$; 6. $x\to(y\to z)$;
7. $\overline{xy}\vee(x\to y)$; 8. $xy\vee yz\vee\bar z$; 9. $x\vee\overline{yz}\vee\overline{xyz}$;
10. $\overline{\overline{x\vee y}\vee z\cdot x\vee x\cdot y}$; 11. $(x\cdot y\vee z)\cdot(\bar y\vee\overline{x\cdot z})$; 12. $(\overline{xy}z\vee x)\cdot\overline{(x\vee y\vee\bar z\vee xz)}\vee y$;
13. $x\cdot y\cdot\overline{x\cdot\bar y\vee xyz\vee\bar z})$; 14. $x\cdot y\to\overline{z\vee y}$; 15. $\overline{\bar z\to y}\vee\bar x\cdot z)$;
16. $(x\oplus\bar y)\to(z\oplus x)$; 17. $(x\downarrow y)\oplus z\cdot x$; 18. $(\bar x\vee z)\to(y\downarrow\bar z)$;
19. $(x\mid\bar y)\to x\cdot\overline{y\vee\bar z}$; 20. $\overline{x\vee\bar y}\leftrightarrow\overline{x\oplus z}$; 21. $\overline{x\cdot\bar y\vee xyz}\vee\bar z$.

6. Привести функции к совершенным формам (СДНФ и СКНФ) путем эквивалентных преобразований.

1. $xy\vee xy\bar z\vee z$; 2. $(x\vee z)\cdot(\bar x\vee y)$; 3. $x\vee y\vee z\bar x$;
4. $(x\vee y\vee z)\cdot y\cdot(\bar y\vee z)$; 5. $x\cdot y\cdot z$; 6. $\bar y\vee\bar x\cdot(yz\vee\bar z)$;
7. $(x\bar y\vee z)\cdot\bar x\cdot(x\bar z\vee y)$; 8. $xz\vee y\to\bar x z$; 9. $(\bar y\vee z)\oplus x\cdot y\cdot\bar z$;
10. $(\bar x\downarrow y)\vee y\bar z\wedge x$; 11. $\bar x\leftrightarrow x\cdot\overline{y\wedge\bar z}$; 12. $\overline{x\wedge\bar y}\downarrow\bar z$;
13. $\bar x\vee\bar y$; 14. $x\bar y(x\to y)$; 15. $(x\to y)\to x\vee\bar y$;
16. $x\to yz$; 17. $(x\to y)\to x$; 18. $xy\to(y\to x)$;
19. $x\vee y\to(x\to z)$; 20. $xy\to zt$; 21. $(\bar y\vee z)\oplus x\cdot y$.

7. Построить СДНФ и СКНФ для функций заданных вектором значений булевой функции.

1. (0011); 2. (0101); 3. (1110); 4. (1000); 5. (0011 1010);
6. (1100 0101); 7. (1000 1111); 8. (1110 1100); 9. (1000 0011); 10. (1100 0000);
11. (1101 0000 0011 0110); 12. (0000 1111 0101 1100);
13. (1001 0000 0011 0100); 14. (0101 0110 0010 0111);
15. (0001 1100 0011 1110); 16. (1101 1111 0011 0001);
17. (1111 0000 1111 0110); 18. (0101 0110 0101 0110);
19. (1000 0110 1011 1111); 20. (1010 1111 0111 0000).

8. Доказать равносильности путем приведения к СДНФ или СКНФ:

1. $xy = \bar{x} \vee \bar{y}$;
2. $x(x \vee y) \equiv x$;
3. $x \vee x\bar{x}y \equiv x \vee y$;
4. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$;
5. $x \to y \equiv \overline{x\bar{y}}$;
6. $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv x$;
7. $x \leftrightarrow y \equiv y \leftrightarrow x$;
8. $x \to y \equiv \bar{y} \to \bar{x}$;
9. $xy \vee x\bar{y} \equiv x$;
10. $x \vee xy \equiv x$;
11. $x \vee \bar{x}y \equiv x \vee y$;
12. $x(\bar{x} \vee y) \equiv xy$;
13. $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$;
14. $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y$.
15. $(x \to y) \to y \equiv x \vee y$;
16. $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$;
17. $(x \to z)(y \to z) \equiv (x \vee y) \to z$;
18. $x(y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
19. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to z)$;
20. $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$;

9. С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

1. $x \mid y$;
2. $x \oplus y$;
3. $x \leftrightarrow y$;
4. $x \downarrow y$;
5. $x \to y$;
6. $x \to yz$;
7. $\overline{xyz}$;
8. $\bar{z} \to x \leftrightarrow (\bar{x} \mid y)$;
9. $\overline{((x \mid y) \to z) \oplus y}$;
10. $\overline{(x \vee \bar{y}) \to (z \oplus \bar{x})}$;
11. $\overline{(x \mid \bar{y}) \oplus (z \to \bar{x})}$;
12. $(z \to x) \oplus (x \mid \bar{y})$;
13. $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$;
14. $(\overline{(x \downarrow y)} \oplus z) \to yx$;
15. $x \downarrow y \to x \vee y \leftrightarrow x \mid y$;
16. $(\bar{x} \vee \bar{y}) \to (\overline{z \oplus x})$;
17. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y \mid x)}$;
18. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$;
19. $x \downarrow y \to x \mid y \oplus x$;
20. $(x \vee \bar{y}) \to (\overline{z \leftrightarrow \bar{x}})$.

10. Проверьте двумя способами, будут ли эквивалентны следующие функции.
1) составлением таблиц истинности; 2)приведением к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

1. $x \vee y,\ x \to y$;
2. $x \to y,\ x \leftrightarrow y$;
3. $x \vee y,\ x \oplus y$;
4. $xy \vee z,\ x(y \vee z)$;
5. $(x \to y)z,\ x \to yz$;
6. $xy \leftrightarrow x,\ (x \leftrightarrow y)z$;
7. $(\overline{x \vee y}),\ \bar{x} \wedge \bar{y}$;
8. $x \to y,\ \bar{x} \vee y$;
9. $x \vee (y \to z),\ (x \vee y) \to (x \vee z)$;
10. $x \wedge (y \to z),\ (x \wedge y) \to (x \wedge z)$;
11. $x \wedge (y \leftrightarrow z),\ (x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$;
12. $x \vee (y \mid z),\ (x \vee y) \mid (x \vee z)$;
13. $x \oplus (y \to z),\ (x \to y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$;
14. $x \to (y \oplus z),\ (x \to y) \oplus (x \to z)$;
15. $x \mid (y \to z),\ (x \mid y) \to (x \mid z)$;
16. $x \wedge (y \to z),\ (x \wedge y) \to (x \wedge z)$;
17. $x \vee (y \to z),\ (x \vee y) \to (x \vee z)$;
18. $x \oplus (y \to z),\ (xy) \leftrightarrow (x \oplus z)$;
19. $x \downarrow (y \leftrightarrow z),\ (x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$;
20. $x \wedge (y \oplus z),\ (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

Вопросы

1.Охарактеризуйте значение понятий и теории алгебры высказываний к анализу логических возможностей в проектировании информационных и автоматизированных систем

2. Дизъюнктивно-нормальные формы. Способы построения.

3.Конъюктивно-нормальные формы. Способы построения.

4.Совершенная КНФ. Способы построения.

5.Совершенная ДНФ. Способы построения.

Практическое занятие №10. Алгоритмы построения полиномов Жегалкина.

Цель занятия. Закрепить навыки построения многочлена Жегалкина методами равносильных преобразований и неопределенных коэффициентов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает алгоритмы построения многочлена Жегалкина и умеет их применять.

Теоретическая часть.

Множество булевых функций, заданных в базисе Жегалкина $S = \{\oplus, \wedge, 1\}$ называется алгеброй Жегалкина.

Основные свойства

1. коммутативность $H_1 \oplus H_2 = H_2 \oplus H_1$, $H_1 \wedge H_2 = H_2 \wedge H_1$;
2. ассоциативность $H_1 \oplus (H_2 \oplus H_3) = (H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$, $H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3) = (H_1 \wedge H_2) \wedge H_3$;
3. дистрибутивность $H_1 \wedge (H_2 \oplus H_3) = (H_1 \wedge H_2) \oplus (H_1 \wedge H_3)$;
4. свойства констант $H \wedge 1 = H$, $H \wedge 0 = 0$, $H \oplus 0 = H$;
5. $H \oplus H = 0$, $H \wedge H = H$.

Утверждение. Через операции алгебры Жегалкина можно выразить все другие булевы функции:

$\bar{x} = 1 \oplus x$, $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$, $x \sim y = 1 \oplus x \oplus y$,

$x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$, $x \downarrow y = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$, $x \mid y = 1 \oplus xy$.

Определение. Полиномом Жегалкина (полиномом по модулю 2) от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется выражение вида

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus ... \oplus c_nx_n \oplus c_{12}x_1x_2 \oplus ... \oplus c_{12...n}x_1x_2...x_n,$$

где постоянные c_k могут принимать значения 0 или 1.

Если полином Жегалкина не содержит произведений отдельных переменных, то он называется линейным (линейная функция).

Теорема. Каждая булева функция представляется единственным образом в виде полинома Жегалкина.

Основные методы построения полиномов Жегалкина:

1. Метод, основанный на преобразовании формул. Приводим формулу к виду, содержащему связки из базиса S={⊕,&,1}; раскрываем скобки используя закон дистрибутивности (см. свойство 3); а затем применяем свойства 4 и 5.

2. Метод неопределенных коэффициентов. Полином Жегалкина, реализующий заданную функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ищем в виде

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus ... \oplus c_nx_n \oplus c_{12}x_1x_2 \oplus ... \oplus c_{12...n}x_1x_2...x_n.$$

Найдем коэффициенты c_k. Для этого последовательно придадим переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ значения из каждой строки таблицы истинности. В итоге получим систему из

2^n уравнений с 2^n неизвестными, имеющую единственное решение. Решив ее, находим коэффициенты полинома $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример: Построить полином Жегалкина функции

а) $f(x, y) = x \to y$, б) $f(x, y, z) = \overline{((x \to y) \to z)} \leftrightarrow \bar{y}$.

Решение: а) 1способ. Запишем искомый полиномввиде $P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_{12} xy$

Пользуясь таблицей истинности

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \to y$	1	1	0	1

получаем, что

$f(0,0) = P(0,0) = c_0 = 1,$

$f(0,1) = P(0,1) = c_0 \oplus c_2 = 1,$

$f(1,0) = P(1,0) = c_0 \oplus c_1 = 0,$

$f(1,1) = P(1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_{12} = 1.$

Откуда последовательно находим, $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_{12} = 1$. Следовательно, $P(x, y) = 1 \oplus x \oplus xy$.

2 способ (метод преобразования формул.) Имеем

$x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x \cdot \bar{y}} = (x \cdot (y \oplus 1)) \oplus 1 = 1 \oplus x \oplus x \cdot y.$

б) 1 способ. Пусть полином Жегалкина имеет вид:

$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_{12} xy \oplus c_{13} xz \oplus c_{23} yz \oplus c_{123} xyz.$

$P(0,0,0) = c_0 = 1$, (т.к. $f(0,0,0) = 1$).

$P(0,0,1) = c_0 \oplus c_3 = 0$ (т.к. $f(0,0,1) = 0$) $\Rightarrow 1 \oplus c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 1.$

$P(0,1,0) = c_0 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1.$

$P(1,0,0) = c_0 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0.$

$P(0,1,1) = c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow c_{23} = 1.$

$P(1,0,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow 0 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow c_{13} = 1.$

$P(1,1,0) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_{12} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_{12} = 0 \Rightarrow c_{12} = 0.$

$P(1,1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_{12} \oplus c_{13} \oplus c_{23} \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow c_{123} = 1.$

Итак, получаем полином Жегалкина 3-й степени.

$P(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus yz \oplus xyz.$

Пример: Построить полином Жегалкина для функции $f = (1011)$ методом неопределенных коэффициентов. Является ли f линейной?

Решение. Ищем полином Жегалкина $P(x, y)$ в виде:

$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 y \oplus c_3 xy.$

Используя таблицу истинности для f_2, имеем

$P(0,0) = c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1,$

$P(0,1) = c_0 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1.$

$P(1,0) = c_0 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0.$

$P(1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1.$

Итак, $f = 1 \oplus y \oplus xy$ – не линейна.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1. Что называется многочленом Жегалкина?
2. Метод неопределенных коэффициентов.
3. Построить полином Жегалкина, используя эквивалентные преобразования.

1. $x \leftrightarrow y$,
2. $x \to y$,
3. $xy \downarrow z$,
4. $(x \vee y)z$,
5. $x\bar{y} \mid \bar{z}$,
6. $\bar{x}y(x \oplus y)$,
7. $\overline{\overline{xyz} \vee \overline{xy}}$,
8. $(x \to y)(y \to z)$,
9. $(xy \vee \overline{xy}) \oplus \bar{z}$,
10. $\bar{x} \downarrow \overline{yz}$,
11. $(x \to y)(\bar{y} \to x)$,
12. $x \vee y \vee z$,
13. $x \oplus y \downarrow z$,
14. $\bar{x} \vee \overline{yz} \vee \overline{xyz}$,
15. $xy \to x \vee y \leftrightarrow x$,
16. $(\bar{x} \oplus y) \leftrightarrow (\bar{z}\bar{x})$,
17. $(z \wedge y) \oplus (\bar{y} \vee x \cdot \bar{z})$,
18. $(x \vee y) \to \bar{z} \mid y$,
19. $(x \leftrightarrow y) \downarrow (\bar{x} \oplus x \cdot \bar{z})$,
20. $(xz \leftrightarrow xyz) \vee (\overline{xy} \to \bar{z})$.

4. Постройте полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов.

1. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$,
2. $x \to (y \to z)$,
3. $(x \mid y) \downarrow z$,
4. $xy(x \oplus y)$,
5. $\overline{xy}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z}$,
6. $(x \to y)(y \downarrow z)$,
7. $(x \to y) \vee \bar{z}) \mid x$,
8. $\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}t \vee \bar{t}z$,
9. $x \downarrow y \to x \vee y \leftrightarrow x \mid y$,
10. $x \downarrow y \to x \mid y \oplus x$,
11. $\bar{z} \to x \leftrightarrow (\bar{x} \mid y)$,
12. $\overline{((x \mid y) \to z) \oplus y}$,
13. $\overline{(x \vee \bar{y}) \to (z \oplus \bar{x})}$,
14. $\overline{(x \mid \bar{y}) \oplus (z \to \bar{x})}$,
15. $(z \to x) \oplus (x \mid \bar{y})$,
16. $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$,
17. $(\bar{x} \vee \bar{y}) \to \overline{(z \oplus x)}$,
18. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y \mid x)}$,
19. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$,
20. $(x \vee \bar{y}) \to \overline{(z \leftrightarrow \bar{x})}$.

5. Постройте полином Жегалкина, если функции $f(x, y, z)$ и $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$заданны вектором своих значений:

1) (1010 0101);
2) (0011 1101);
3) (0011 1100);
4) (0101 0011);
5) (0010 0011);
6) (0101 1001);
7) (1111 0101);
8) (0111 1111);
9) (1101 1011);
10) (0010 0011);
11) (1111 1100 1011 1001);
12) (1101 0011 1101 0011);
13) (1100 1011 1111 1011);
14) (0101 0101 1110 0011);
15) (0000 1111 0101 1100);
16) (0011 1101 0011 1100);
17) (1111 1100 1011 1011);
18) (0101 1111 1101 0011);
19) (0000 1011 1011 1010);
20) (0001 1101 1010 1111).

Практическое занятие №11. Размещения, перестановки, сочетания в комбинаторике.

Цель занятия. Изучить основные комбинаторные объекты и области их возможного применения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает размещения, перестановки, сочетания и умеет их применять при решении задач.

Теоретическая часть.

Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий.

Основная формула комбинаторики

Пусть имеется k групп элементов, причем i-я группа состоит из n_i элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением $N=n_1*n_2*n_3*...*n_k$.

Пример. Поясним это правило на простом примере. Пусть имеется две группы элементов, причем первая группа состоит из n_1 элементов, а вторая - из n_2 элементов. Сколько различных пар элементов можно составить из этих двух групп, таким образом, чтобы в паре было по одному элементу от каждой группы?

Допустим, мы взяли первый элемент из первой группы и, не меняя его, перебрали все возможные пары, меняя только элементы из второй группы. Таких пар для этого элемента можно составить n_2. Затем мы берем второй элемент из первой группы и также составляем для него все возможные пары. Таких пар тоже будет n_2. Так как в первой группе всего n_1 элемент, всего возможных вариантов будет n_1*n_2.

Пример. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Решение: $n_1=6$ (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_2=7$ (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_3=4$ (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6).

Итак, $N=n_1*n_2*n_3=6*7*4=168$.

В том случае, когда все группы состоят из одинакового числа элементов, т.е. $n_1=n_2=...n_k=n$ можно считать, что каждый выбор производится из одной и той же группы, причем элемент после выбора снова возвращается в группу. Тогда число всех способов выбора равно n^k.Такой способ выбора носит название выборки с возвращением.

Пример. Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Решение. Для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит N=5*5*5*5=54=625.

Рассмотрим множество, состоящие из n элементов. Это множество будем называть генеральной совокупностью.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример. Различными размещениями из трех элементов {1, 2, 3} по два будут наборы (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3),(3, 2). Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и их порядком.

Число размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:

$$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Сочетанием из n элементов по m называется любой неупорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример. Для множества {1, 2, 3}сочетаниями являются {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}.

Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15$$

Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов.

Пример. Всевозможными перестановками множества, состоящего из трех элементов {1, 2, 3} являются: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2).

Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n=n!$.

Пример. Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

Решение: эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется $P_7=7!=1*2*3*4*5*6*7=5040$ способов осуществить расстановку книг.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 11 дисциплин.
2. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?
3. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?
4. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?
5. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

6. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

7. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т. е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

8. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

9. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

10. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

11. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

12. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

13. Порядок выступления восьми участников конкурса определяется жребием. Сколько различных исходов жеребьевки при этом возможно*

14. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

16. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

17. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

18. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

19. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

20. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

21. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?

22. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

23. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо один материал?

24. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

Вопросы к собеседованию

1.Укажите взаимосвязь между теорией графов и комбинаторикой и значение данных разделов для теоретического исследования в профессиональной деятельности.
2.Основные понятия комбинаторики
3.Комбинаторика. Перестановки.
4.Комбинаторика. Сочетания.
5.Комбинаторика. Размещения.
6.Комбинаторика. Сочетания, размещения с повторениями.

Практическое занятие №12. Подстановки. Биномиальные коэффициенты. Разбиения.

Цель занятия. Рассмотреть возможность применения бинома Ньютона к упрощению вычислительных действий.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знать и уметь применять алгоритм использования бинома Ньютона и перестановок для решения практических задач.

Теоретическая часть.

Подстановкой (n-ой степени) из n элементов называется взаимно однозначное отображение множества из n символов на себя. Обычно элементы этого множества нумеруются и отождествляются с n числами натурального ряда чисел.

Пример. Вместо подстановки - отображения элементов множества X={a, b, c, g}, - говорят об отображении множества {1, 2, 3, 4} и обозначают эту подстановку как

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Умножение подстановок - операция, которая ставит в соответствие упорядоченной паре подстановок n-ой степени A и B третью подстановку C той же степени по правилу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим известные формулы:

$$(a+b)^1 = a+b \ ,$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Аналогично можно вычислять остальные степени, но мы вместо продолжения такой последовательности формул сформулируем общую теорему о них.

Теорема. Справедлива формула (бинома Ньютона):

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n,$$
$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)k, \quad k! = (k-1)!k, \quad 0! = 1.$$

Используя числа C^m_n можно записать бином Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

Коэффициент называется биномиальным коэффициентом.

Теорема. Справедливы формулы для биномиальных коэффициентов:

1. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ - свойство суммы биномиальных коэффициентов;
2. $C_n^m = C_n^{n-m}$ - свойство симметрии;
3. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ - свойство сложения.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1. Разложить, вычислив биномиальные коэффициенты: $(a + b)^7$; $(a + b)^{10}$.

2. В разложении $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ найти коэффициент при a^8.

3. В разложении $\left(2a - \frac{1}{3a}\right)^{10}$ найти коэффициент при a^4.

4. Постройте треугольник Паскаля при n=12.

5. Вычислите числа Ферма и Мерсенна при n=4.

6. Решить уравнение $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$.

7. Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^6$, не содержащего х.

8.Найти пятый член разложения бинома $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$.

9.Найти сумму биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома $(x+y)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена на 9 больше биномиального коэффициента второго члена.

10.Найти седьмой член разложения бинома $\left(a\sqrt[2]{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена равен 36.

11.Сколько членов разложения бинома $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7}\right)^{36}$ являются целыми числами?

12.Вычислить сумму $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$.

13.Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно *x*, получаемого в разложении бинома $(3x-4)^{17}$.

14.Сумма нечетных биномиальных коэффициентов разложения $\left(ax + x^{-1/4}\right)^n$ равна 512.

Найти слагаемое, не содержащее *x*.

15.При каких значениях *x* четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

16. При каком значении *x* четвертое слагаемое разложения $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в двадцать раз больше m, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5 : 1?

17. В какую наибольшую степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)$ чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

Практическое занятие №13. Основные характеристики графов. Матрицы смежности и инцидентности. Операции над графами.

Цель занятия. Изучить возможные способы задания графов, алгоритм выполнения операций над графами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знать и уметь реализовывать на практике основные способы представления графов и операции над графами.

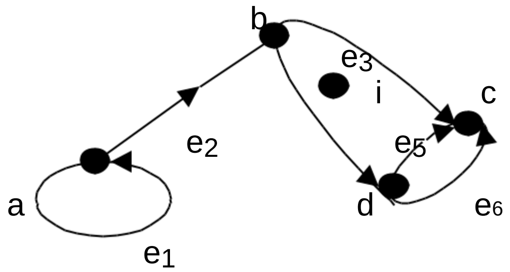
Теоретическая часть.

Графом G(V, E) называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества вершин) и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V (E – множество ребер или дуг).

$$G(V, E)= \langle V; E\rangle,\ \ V\neq\varnothing,\quad E\subset V\times V,\ \ E=E^{-1}.$$

При этом дуга (a,b) называется исходящей из вершины a и заходящей в вершину b.

Элементы множества V называются вершинами (или узлами, или точками) графа G, а элементы из E – его ребрами (или линиями).



Дугу, выходящую из некоторой вершины и заходящую в ту же вершину, будем называть *петлей*, а дуги, выходящие из одной и той же вершины и заходящие в одну и ту же вершину, будем называть *кратными*. Так, дуги e_5 и e_6 являются кратными, а дуга e_1 – петлей. Вершину, из которой не выходит и в которую не заходит ни одна дуга, будем называть *изолированной*. Например, i – изолированная вершина.

Вершина v инцидентна ребру e, если $v\in e$; тогда еще говорят, что e есть ребро при v. Две вершины, инцидентные ребру, суть его концевые вершины или концы; ребро соединяет свои концевые вершины.

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k, в которой любые два соседних элемента соединены ребром. Замкнутая цепь ($v_0=v_k$) называется циклом.

Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

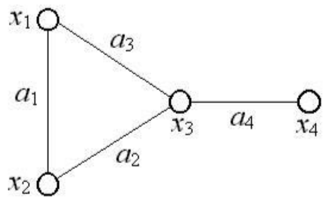
Для многих задач несущественно, являются ли ребра отрезками прямых или криволинейными дугами; важно лишь то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется *ориентированным*. Ребра ориентированного графа называются *дугами*. Соответствующие вершины ориентированного графа называют *началом* и *концом*. Если направления ребер не указываются, то граф называется *неориентированным* (или просто графом).

На рисунке изображен неориентированный граф $G =(X,\ A)$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

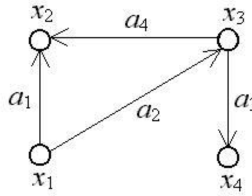
$A = \{a_1= (x_1, x_2), a_2=(x_2, x_3), a_3=(x_1, x_3), a_4= (x_3, x_4)\}$.



На следующем рисунке изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1 , x_2), a_2 = (x_1 , x_3), a_3 = (x_3 , x_4), a_4 = (x_3 , x_2)\}$.



Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется *смешанным*.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют *кратными*. Граф, содержащий кратные ребра, называется *мультиграфом*.

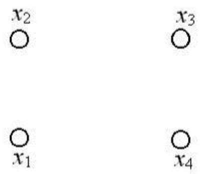
Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро может соединять вершину саму с собой. Такое ребро называется *петлей*. Граф с кратными ребрами и петлями называется *псевдографом*.

Множество ребер графа может быть пустым. Множество вершин графа не может быть пустым. Например, ниже изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$X = \{x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \}$,

$A=\varnothing$.



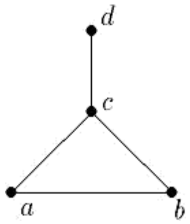
Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что вершины x и y *инцидентны* ребру a, если эти вершины соединены a.

Степенью вершины графа называется число ребер, инцидентных этой вершине. Вершина, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а степень 1 – *висячей*.

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины x, обозначают $G(x)$, то есть $G(x) = \{ y: (x\ y) \in G\}$. Множество $G(x)$ называют *образом* вершины x. Соответственно $G^{-1}(y)$ – множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину y, $G^{-1}(y) = \{x: (x , y) \in G\}$. Множество $G^{-1}(y)$ называют *прообразом* вершины y.

Способы задания графов

1. Геометрический



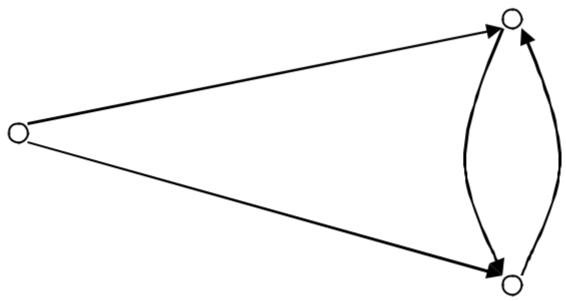
2. Матрица смежности - квадратная матрица, размерности, равной количеству вершин. При этом a[i, j]-целое число, равное количеству рёбер, связывающих i-ю, j-ю вершину. Если в графе нет петель, то диагональные элементы равны 0 . Если рёбра не повторяются, то все элементы 0 или 1. Если граф неориентированный, то матрица симметрична.

3. Матрица инцидентности – матрица размерности m×n , где m – количество вершин, n – количество ребер или дуг.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } e_j \text{ исходит из вершины } v_i \\ -1, \text{ если дуга } e_j \text{ заходит в вершины } v \\ 2, \text{ если } e_j \text{ петля при вершине } v_i \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

4. Список смежности (или список инцидентности) – список каждый элемент которого состоит из вершины графа и списка смежных с ней вершин.

Пример. По графическому заданию графа составить матрицу смежности, матрицу инцидентности



Решение: Матрица смежности $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Матрица инцидентности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Операции над графами

1. Неориентированный (ориентированный) граф $\overline{G}(V, \overline{E})$ называют дополнением неориентированного (ориентированного) графа G(V, E), где - $\overline{E}$ - дополнение множества E до множества всех неупорядоченных (упорядоченных) пар на V.

2. Объединением графов G_1 (V_1, E_1) и G_2 (V_2, E_2) (обозначение $G_1(V_1,E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, при условии $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$) называется граф G(V, E), где

$$V := V_1 \cup V_2 \ \& \ E := E_1 \cup E_2$$

3. Соединением графов G_1 (V_1, E_1) и G_2 (V_2, E_2) (обозначение $G_1(V_1,E_1) + G_2(V_2, E_2)$, при условии $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$) называется граф G(V, E), где

$$V := V_1 \cup V_2 \ \& \ E := E_1 \cup E_2 \cup \{e = (v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1 \ \& \ v_2 \in V_2\}$$

4. Удаление вершины v из графа G_1 (V_1, E_1) (обозначение G_1 (V_1, E_1) – v, при условии $v \in V_1$) дает граф G_2 (V_2, E_2), где

$$V_2 := V_1 \setminus \{v\} \,\&\, E_2 := E_1 \setminus \{e = (v_1, v_2) \mid v_1 = v \vee v_2 = v\}$$

5. Удаление ребра e из графа G_1 (V_1, E_1) (обозначение G_1 (V_1, E_1) – e, при условии $e \in E_1$) дает граф G_2 (V_2, E_2), где

$$V_2 := V_1 \,\&\, E_2 := E_1 \setminus \{e\}$$

6. Добавление вершины v в граф G_1 (V_1, E_1) (обозначение G_1 (V_1, E_1) + v, при условии $v \notin V_1$) дает граф G_2 (V_2, E_2), где

$$V_2 := V_1 \cup \{v\} \,\&\, E_2 := E_1$$

7. Добавление ребра e в графа G_1 (V_1, E_1) (обозначение G_1 (V_1, E_1) + e, при условии $e \notin E_1$) дает граф G_2 (V_2, E_2), где

$$V_2 := V_1 \,\&\, E_2 := E_1 \cup \{e\}$$

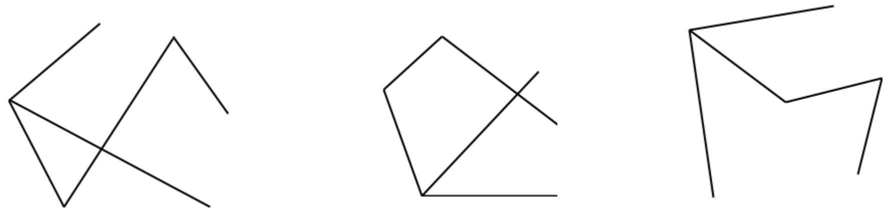
Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить графы, заданные матрицами:

$$а)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ б)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}_{000};$$

$$в)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Составить матрицу смежности для графов:



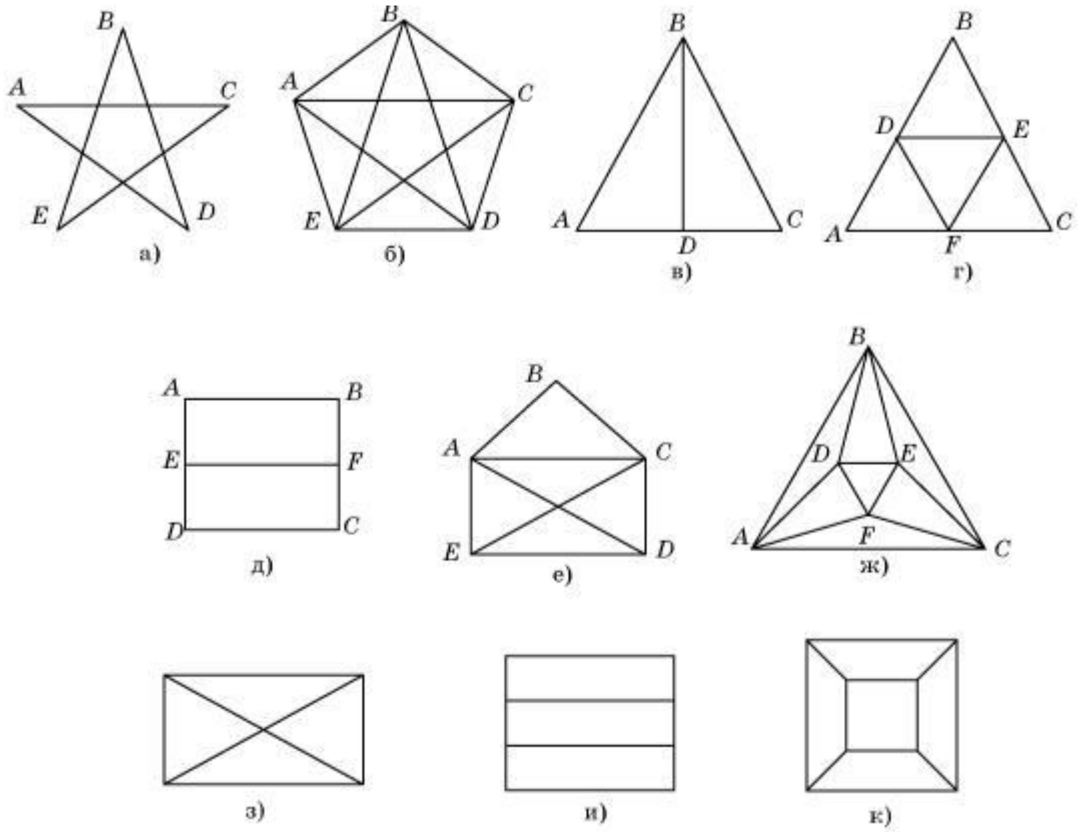
3. Построить графы для решения задач:

1) Перевозчику (П) нужно переправить через реку волка (В), козу (К) и мешок с капустой (М). Лодка так мала, что кроме перевозчика может взять только один из этих объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять с козой, а козу – с волком. Как осуществить переправу?

2) Два человека имеют полный кувшин воды в 8 л, а также два пустых кувшина в 5 л и 3 л. Как им разделить воду поровну?

4. Потоки документов циркулируют между городами A1, A2, A3 и городами B1, B2, B3. Можно ли проложить непересекающиеся маршруты, соединяющие каждый город Ai с каждым городом Bj?

5. Определите, какие графы, изображенные на рисунке ниже, являются уникурсальными?



6. В офисе 15 компьютеров. Можно ли соединить их друг с другом так, чтобы каждый был соединен ровно с тремя другими?

Вопросы к собеседованию

1.Охарактеризуйте значение теории графов в проектирования информационных и автоматизированных систем
2.Что такое граф? Приведите примеры.
3. Перечислите методы описания графов. Приведите примеры.
4. Приведите основные свойства степеней графа.
5. Приведите основные свойства полного графа.
6. Приведите примеры полных графов и дополнений к гафу.
7. Что такое путь, цепь, цикл в графе и какие они бывают?
8. Что такое связность графа? Приведите примеры.
9. Что такое деревья и какими свойствами они обладают? Приведите пример.

Практическое занятие №14. Эйлеров граф. Критерий эйлеровости.

Цель занятия. Изучить алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе и его приложения на практике.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знать и уметь реализовывать на практике алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе.

Теоретическая часть.

Первые задачи теории графов были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок (задача о Кенигсбергских мостах, задача о расстановке ферзей на шахматной доске, задачи о перевозках, задача о кругосветном путешествии и другие). Одним из первых результатов в теории графов явился критерий существования обхода всех ребер графа без повторений, полученный Л. Эйлером при решении задачи о Кенигсбергских мостах.

<u>Правило Эйлера:</u>

1. В графе, не имеющем вершин нечетных степеней, существует обход всех рёбер (причем каждое ребро проходится в точности один раз) с началом в любой вершине графа.

2. В графе, имеющем две и только две вершины с нечетными степенями, существует обход с началом в одной вершине с нечетной степенью и концом в другой.

3.В графе, имеющем более двух вершин с нечетной степенью, такого обхода не существует.

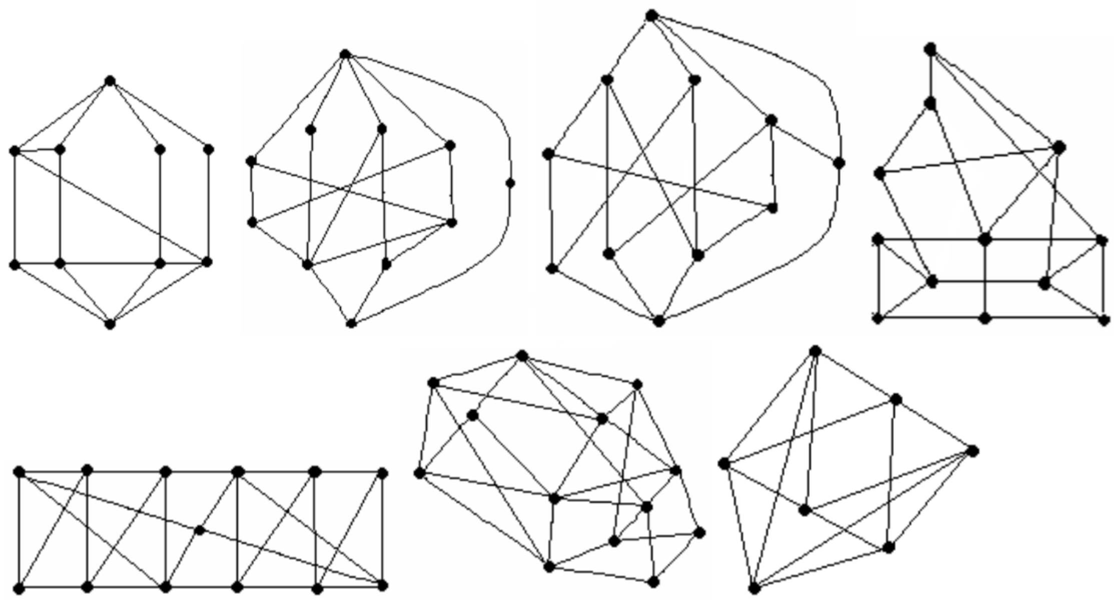
Теорема *Связный неориентированный мультиграф тогда и только тогда является эйлеровым, когда степень каждой из его вершин — четное число.*

Опишем алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе. Этот алгоритм задается следующими правилами.

1. Выбрать произвольно некоторую вершину *a*.
2. Выбрать произвольно некоторое ребро *u*, инцидентное *a*, и присвоить ему номер 1 (назовем это ребро *пройденным).*
3. Каждое пройденное ребро вычеркнуть и присвоить ему номер, на единицу больший номера предыдущего вычеркнутого ребра.
4. Находясь в вершине *x,* не выбирать ребро, соединяющее *x* с *a,* если имеется возможность иного выбора.
5. Находясь в вершине *x*, не выбирать ребро, которое является *перешейком* (т.е. ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру).
6. После того как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода, ребер.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1.Имеются ли в графе эйлеровы циклы?



2**.** Имеют ли пятиугольник и пятигранник-пирамида с петлями в некоторых вершинах эйлеров цикл (цепь)?

3. Являются ли эйлеровыми графами: прямоугольник с главной диагональю, куб?

Вопросы к собеседованию

1.Охарактеризуйте значение теории графов в проектирования и автоматизации информационных систем и систем управления.
2.Что такое эйлеров граф?
3.Как определить эйлеровость графа по теореме Эйлера?
4.Как построить эйлеров цикл?
5.Имеются ли в графе эйлеровы циклы?

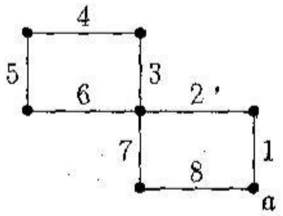
Практическое занятие №15. Гамильтонов граф.

Цель занятия. Изучить алгоритм построения гамильтонова цикла минимального веса и его приложения на практике.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знать и уметь реализовывать на практике алгоритм построения гамильтонова цикла.

Теоретическая часть.

Граф называется *гамильтоновым,* если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам такой цикл также называется *гамильтоновым. Гамильтоновой* называется и простая цепь, содержащая все вершины графа. Очевидно, что любой граф, ребра которого образуют простой цикл, является гамильтоновым, а граф, показанный на рисунке — негамильтоновый.



Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов, решение последней значительно сложнее. Известны следующие достаточные условия существования гамильтоновых циклов в связном неорграфе G без петель, имеющем $n \geq 3$ вершин:

Теорема *Если для любых двух различных несмежных вершин a и* b *графа* G *выполняется условие* $\deg a + \deg b \geq n$, *то существует гамилътонов цикл, где deg(a)- степень (валентность) вершины.*

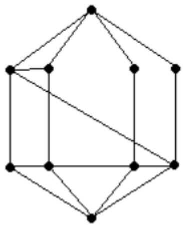
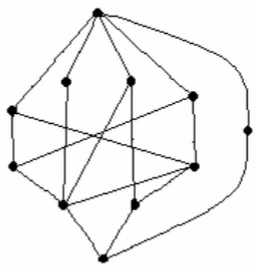
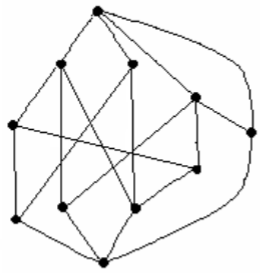
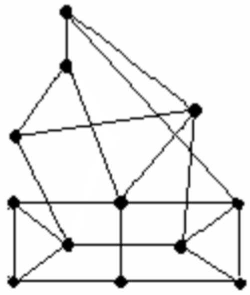
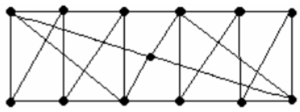
Следствие *Если для любой вершины a графа* G *выполнено условие* $\deg a \geq n/2$, *то существует гамилътонов цикл.*

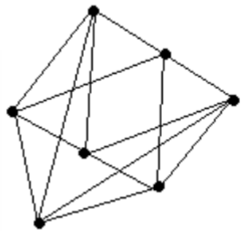
С задачей нахождения гамильтонова цикла связана *задача коммивояжера.*

Район, который должен посетить бродячий торговец, содержит некоторое количество городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходный город. Если таких маршрутов много, требуется найти кратчайший из них. Математическая постановка задачи выглядит так: требуется найти гамильтонов цикл минимального веса.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

1. Имеются ли в графе гамильтоновы циклы?



2. Применив алгоритм с возвратами, построить все гамильтоновы циклы для графа, образованного квадратом с пересекающимися диагоналями.

3. Укажите задачи, интерпретация которых состоит в необходимости построения гамильтоновых циклов.

Вопросы к собеседованию

1.Укажите задачи в профессиональной деятельности, интерпретация которых состоит в необходимости построения гамильтоновых циклов.
2.Перечислите основные виды графов.
3.Что такое орграф и какими свойствами они обладают? Приведите примеры.
4.Что такое взвешенный граф и какими свойствами они обладают? Приведите примеры.
5.Как представить раскраску вершин и граней плоского графа?
6.Поясните понятие двудольного графа и их применение.
7.Имеются ли в графе гамильтоновы циклы?
8.Применив алгоритм с возвратами, построить все гамильтоновы циклы для графа, образованного квадратом с пересекающимися диагоналями.

Практическое занятие №16. Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути в нагруженном ориентированном графе.

Цель занятия. Изучить алгоритм нахождения минимального пути в орграфе и возможности его практического применения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знать и уметь реализовывать на практике алгоритм Форда – Беллмана.

Теоретическая часть.

Предполагается, что ориентированный граф не содержит контуров отрицательной длины.

Алгоритм Форда – Беллмана.

Основными вычисляемыми величинами этого алгоритма являются величины $\square_j(k)$, где $i = 1, 2, \dots, n$ (n – число вершин графа); $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Для фиксированных i и k величина $_j(k)$ равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины x_1 в вершину x_i и содержащего не более k дуг.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Ввести число вершин графа n и матрицу весов $C = (c_{ij})$.

Шаг 2. Положить $k = 0$. Положить $_i(0) = \infty$ для всех вершин, кроме x_1; положить $_1(0)$ $\square = 0$.

Шаг 3. В цикле по k, $k = 1, \dots, n - 1$, каждой вершине x_i на k-ом шаге приписать индекс $_i(k)$ по следующему правилу:

$$\lambda_i(k) = \min_{1 \le j \le n} \{\lambda_j(k-1) + c_{ji}\}$$

для всех вершин, кроме x_1, положить $\lambda_1(k) = 0$.

В результате работы алгоритма формируется таблица индексов $\lambda_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. При этом $\lambda_i(k)$ определяет длину минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более k дуг.

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для любойвершины x_s предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения:

$$\lambda_r(n-2) + c_{rs} = \lambda_s(n-1), \qquad x_r \in G^{-1}(x_s),$$

где $G^{-1}(x_s)$ - прообраз вершины x_s.

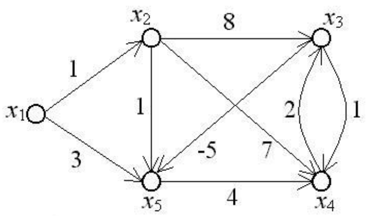
Для найденной вершины x_r предшествующая ей вершина x_q определяется из соотношения:

$$\lambda_q(n-3) + c_{qr} = \lambda_r(n-2), \qquad x_q \in G^{-1}(x_r),$$

где $G^{-1}(x_r)$ - прообраз вершины x_r, и т. д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины x_i, найдем минимальный путь.

<u>Пример:</u> С помощью алгоритма Форда – Беллмана найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рисунке:



Рассмотрим подробно работу алгоритма Форда – Беллмана для этого примера. Значения индексов $\lambda_i(k)$ будем заносить в таблицу индексов.

Шаг 1. Введем число вершин графа $n = 5$. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k = 0$, $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(0) = \lambda_3(0) = \lambda_4(0) = \lambda_5(0) = \infty$. Эти значения занесем в первый столбец таблицы.

Шаг 3.

<u>$k = 1$.</u>

$\lambda_1(1) = 0$.

Для $k = 1$:

$$\lambda_i(1) = \min_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(0) + c_{ji}\}.$$

$\lambda_2(1) = min\{\lambda_1(0) + c_{12};\ \lambda_2(0) + c_{22};\ \lambda_3(0) + c_{32}; \lambda_4(0) + c_{42};\ \lambda_5(0) + c_{52};\} = min\{0 + 1;$ $\infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 1$.

$\lambda_3(1) = min\{\lambda_1(0) + c_{13};\ \lambda_2(0) + c_{23};\ \lambda_3(0) + c_{33};\ \lambda_4(0) + c_{43};\ \lambda_5(0) + c_{53};\} = min\{0 + \infty;$ $\infty + 8; \infty + \infty; \infty + 2; \infty + \infty\} = \infty$.

$\lambda_4(1) = min\{\lambda_1(0) + c_{14};\ \lambda_2(0) + c_{24};\ \lambda_3(0) + c_{34};\ \lambda_4(0) + c_{44};\ \lambda_5(0) + c_{54};\} = min\{0 + \infty;$ $\infty + 7; \infty + 1; \infty + \infty; \infty + 4\} = \infty$.

$\lambda_5(1) = min\{\lambda_1(0) + c_{15};\ \lambda_2(0) + c_{25};\ \lambda_3(0) + c_{35};\ \lambda_4(0) + c_{45};\ \lambda_5(0) + c_{55};\} = min\{0 + 3;$ $\infty + 1; \infty - 5; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 3$.

Полученные значения $\lambda_i(1)$ занесем во второй столбец таблицы. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $\lambda_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более одной дуги.

<u>$k = 2.$</u>

$\lambda_1(2) = 0.$

Для $k = 2$:

$\lambda_i(2) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(1) + c_{ji}\}.$

$\lambda_2(2) = min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty;\ 3 + \infty\} = 1.$

$\lambda_3(2) = min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ \infty + \infty;\ \infty + 2;\ 3 + \infty\} = 9\ .$

$\lambda_4(2) = min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ \infty + 1;\ \infty + \infty;\ 3 + 4\} = 7\ .$

$\lambda_5(2) = min\{0 + 3;\ \ 1 + 1;\ \infty - 5;\ \infty + \infty;\ 3 + \infty\} = 2.$

Полученные значения $\lambda_i(2)$ занесем в третий столбец таблицы. Величины $\lambda_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более двух дуг.

<u>$k = 3.$</u>

$\lambda_1(3) = 0.$

Для $k = 3$:

$\lambda_i(3) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(2) + c_{ji}\}.$

$\lambda_2(3) = min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ 9 + \infty;\ 7 + \infty;\ 2 + \infty\} = 1.$

$\lambda_3(3) = min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ 9 + \infty;\ 7 + 2;\ 2 + \infty\} = 9\ .$

$\lambda_4(3) = min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ 9 + 1;\ 7 + \infty;\ 2 + 4\} = 6\ .$

$\lambda_5(3) = min\{0 + 3;\ \ 1 + 1;\ 9 - 5;\ 7 + \infty;\ 2 + \infty\} = 2.$

Полученные значения $\lambda_i(3)$ занесем в четвертый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более трех дуг.

<u>$k = 4.$</u>

$\lambda_1(4) = 0.$

Для $k = 4$:

$\lambda_i(4) = \min\limits_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(3) + c_{ji}\}.$

$\lambda_2(4) = min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ 9 + \infty;\ 6 + \infty;\ 2 + \infty\} = 1.$

$\lambda_3(4) = min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ 9 + \infty;\ 6 + 2;\ 2 + \infty\} = 8\ .$

$\lambda_4(4) = min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ 9 + 1;\ 6 + \infty;\ 2 + 4\} = 6\ .$

$\lambda_5(4) = min\{0 + 3;\ \ 1 + 1;\ 9 - 5;\ 6 + \infty;\ 2 + \infty\} = 2.$

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более четырех дуг.

I (номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	9	8
4	∞	∞	7	6	6
5	∞	3	2	2	2

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для последней вершины x_3 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при s =3:

$\lambda_r(3) + c_{r3} = \lambda_3(4), x_r \in G^{-1}(x_3)$,

где $G^{-1}(x_3)$ - прообраз вершины x_3.

$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}$.

Подставим в последнее равенство последовательно $r = 2$ и $r = 4$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_2(3) + c_{23} = 1+8 \neq \lambda_3(4) = 8$,

$\lambda_4(3) + c_{43} = 6+2 = \lambda_3(4) = 8$.

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3, является вершина x_4.

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при $s = 4$:

$\lambda_r(2) + c_{r4} = \lambda_4(3), \quad x_r \in G^{-1}(x_4)$,

где $G^{-1}(x_4)$ - прообраз вершины x_4.

$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}$.

Подставим последовательно $r = 2$, $r = 3$ и $r = 5$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_2(2) + c_{24} = 1+7 \neq \lambda_4(3) = 6$,

$\lambda_3(2) + c_{34} = 1+1 \neq \lambda_4(3) = 6$,

$\lambda_5(2) + c_{54} = 2+4 = \lambda_4(3) = 6$,

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4, является вершина x_5.

Для вершины x_5 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при $s = 5$:

$\lambda_r(1) + c_{r5} = \lambda_5(2), x_r \in G^{-1}(x_5)$,

где $G^{-1}(x_5)$ - прообраз вершины x_5.

$G^{-1}(x_5) = \{x_1, x_2\}$.

Подставим последовательно $r = 1$ и $r = 2$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_1(1) + c_{15} = 0+3 \neq \lambda_5(2) = 2$,

$\lambda_2(1) + c_{25} = 1+1 = \lambda_5(2) = 2$,

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_5, является вершина x_2.

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при $s = 2$:

$\lambda_r(0) + c_{r2} = \lambda_2(1), x_r \in G^{-1}(x_2)$,

где $G^{-1}(x_2)$ - прообраз вершины x_2.

$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}$.

Подставим $r = 1$, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$\lambda_1(0) + c_{12} = 0 + 1 = \lambda_2(1) = 1$.

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2, является вершина x_1.

Итак, найден минимальный путь – x_1, x_2, x_5, x_4, x_3, его длина равна 8.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

Дан список дуг с указанием их длин. Составьте по нему рисунок ориентированного графа. Найдите для этого графа наименьший путь от вершины-входа до вершины с максимальным номером.

1. (0;1) – 3, (0;2) – 9, (1;2) – 5, (2;4) – 1, (1;3) – 8, (2;3) – 2, (3;5) – 4, (4;5) – 6.
2. (0;1) – 4, (0;2) – 5, (1;2) – 8, (2;4) – 3, (1;3) – 11, (2;3) – 5, (3;5) – 3, (4;5) – 6.
3. (0;1) – 3, (0;2) – 9, (1;2) – 12, (2;4) – 1, (1;3) – 2, (2;3) – 3, (3;5) – 10, (4;5) – 5.
4. (0;1) – 6, (0;2) – 2, (2;1) – 3, (2;4) – 6, (1;3) – 1, (2;3) – 5, (3;5) – 8, (4;5) – 7.
5. (0;1) – 6, (0;2) – 5, (1;2) – 1, (2;4) – 6, (1;3) – 7, (2;3) – 6, (3;5) – 8, (4;5) – 7.
6. (0;1) – 3, (0;2) – 2, (2;1) – 1, (2;5) – 3, (1;5) – 4, (5;4) – 8, (5;3) – 5, (3;4) – 3, (4;6) – 2, (3;6) – 4.
7. (0;1) – 10, (0;2) – 5, (2;1) – 4, (2;5) – 8, (1;5) – 3, (5;4) – 4, (5;3) – 2, (3;4) – 1, (4;6) – 5, (3;6) – 7.
8. (0;1) – 3, (0;2) – 2, (2;1) – 2, (2;5) – 12, (1;5) – 8, (5;4) – 2, (5;3) – 6, (3;4) – 1, (4;6) – 8, (3;6) – 3.
9. (0;1) – 2, (0;2) – 7, (2;1) – 1, (2;5) – 6, (1;5) – 12, (5;4) – 10, (5;3) – 5, (3;4) – 4, (4;6) – 2, (3;6) – 7.
10. (0;1) – 4, (0;2) – 2, (2;1) – 1, (2;5) – 7, (1;5) – 5, (5;4) – 4, (5;3) – 1, (3;4) – 4, (4;6) – 3, (3;6) – 7.
11. (0;2) – 2, (0;1) – 7, (2;1) – 4, (2;4) – 9, (1;3) – 3, (3;4) – 1, (4;6) – 2, (3;5) – 8, (6;5) – 4, (6;7) – 10, (5;7) – 5.
12. (0;2) – 10, (0;1) – 5, (2;1) – 1, (2;4) – 4, (1;3) – 3, (3;4) – 5, (4;6) – 3, (3;5) – 10, (6;5) – 10, (6;7) – 5, (5;7) – 1.
13. (0;2) – 4, (0;1) – 6, (2;1) – 4, (2;4) – 6, (1;3) – 3, (3;4) – 2, (4;6) – 4, (3;5) – 7, (6;5) – 3, (6;7) – 8, (5;7) – 5.
14. (0;2) – 3, (0;1) – 1, (2;1) – 4, (2;4) – 2, (1;3) – 6, (3;4) – 4, (4;6) – 3, (3;5) – 6, (6;5) – 4, (6;7) – 12, (5;7) – 7.
15. (0;2) – 8, (0;1) – 12, (2;1) – 3, (2;4) – 6, (1;3) – 5, (3;4) – 4, (4;6) – 10, (3;5) – 4, (6;5) – 6, (6;7) – 10, (5;7) – 6.

Вопросы к собеседованию

1.Охарактеризуйте значение теории графов в проектирования и автоматизации информационных систем и систем управления.
2.Дан список дуг с указанием их длин. Составьте по нему рисунок ориентированного графа. Найдите для этого графа наименьший путь от вершины-входа до вершины с максимальным номером.

Практическое занятие №17. Задача нахождения критического пути в графе.

Цель занятия. Изучить алгоритм нахождения критического пути и возможности его практического применения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знать и уметь реализовывать на практике алгоритм нахождения критического пути.

Теоретическая часть.

Задача нахождения критического, (т. е. длиннейшего) пути в графе — это задача, связанная с загрузкой станочного оборудования, сборки многозвенных изделий и т. д.

Сетевой график – необходимый элемент сложного производства, состоящего из нескольких связанных и зависящих друг от друга этапов. Выявление критического пути и временных резервов производства – основная задача, решаемая построением сетевого графика. Такие задачи могут быть представлены в виде графа и в виде отображающей его таблицы. Для нахождения критического пути (последовательности этапов работы, определяющих длительность всего проекта и не имеющих резерва по времени) применяются вычислительные методы. Одним из таких методов является табличный метод и применяется для данных, представленных в виде таблицы.

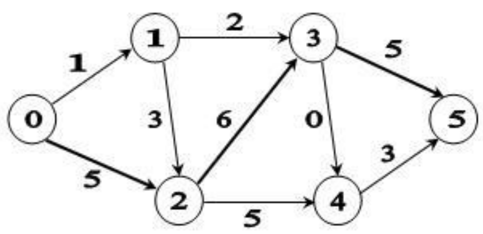
Проблема автоматизации расчёта сетевого графика является достаточно актуальной и важной. Вычисление критического пути с помощью ЭВМ поможет в несколько раз ускорить этот процесс, а при больших графиках – во много раз. Поэтому автоматизация расчёта сетевого графика может иметь большую практическую пользу.

Алгоритм нахождения длиннейшего пути в графе похож на алгоритм нахождения кратчайшего пути в графе. Вместо кратчайших ребер в алгоритме нахождения кратчайшего пути выбираются длиннейшие.

Пусть требуется найти такой путь на графе, который бы имел максимальную длину по сравнению со всеми возможными путями для данного графа. Пусть существует ориентированный граф без циклов G.

Рёбра графа — выполнение работы. Рёбра имеют длину, обозначающую продолжительность работы и направление, обозначающее последовательность выполнение работы. Вершины — это факт начала и окончания работ.

Пусть дана сеть.



Для каждого события I определим наиболее ранний срок его наступления TP(I) по следующему правилу:

1) TP(0)=0;

2) для I >0 TP(I) равно продолжительности самого длинного (0, I)-пути.

Значения Tp(I) определяют последовательно, переходя от источника к стоку. Так, для рассматриваемого примера находим:

TP(0) = 0, TP(1) = 1, TP(2) = 5, TP(3) = 11, TP (4) = 11, TP(5) = 16.

Эти значения находятся из соотношения: $TP(I) = \max\{ TP(K) + T_{Ki} \}$,

Т. е. для всех дуг (K, I), для которых I является концом, необходимо вычислить $TP(K) + T_{Ki}$ и выбрать наибольшее значение.

Итак, в нашем примере время выполнения проекта равно 16. Чтобы получить критический путь, будем передвигаться в обратном направлении, от стока к источнику, по тем ребрам (K, I), которые определяли значения TP(I), т. е. для которых выполняется равенство $TP(I) - T_{Ki} = TP(K)$. В примере это ребра: (3, 5); (2, 3); (2,1) . Таким образом, (1, 2, 3, 5) - критический путь.

Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

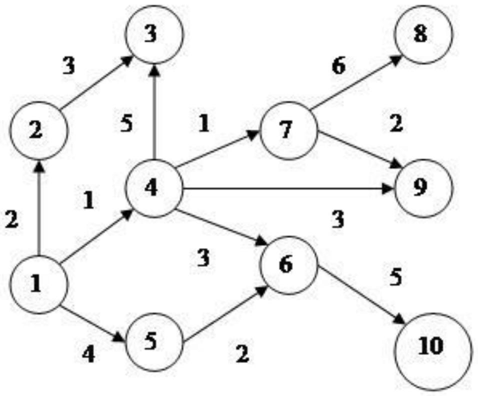
1.При составлении проекта работ выделено 8 событий: (0,1,2,3,4,5,6,7), которые связаны работами (i – j), где i,j 0,1,2,3…,7 и i ≠ j, например, событие 1 связано с событием 2 работой (1-2).

Исходные данные по продолжительности работ:

Работа	**0-1**	**0-2**	**0-3**	**1-2**	**1-3**	**1-4**	**2-3**	**2-4**	**2-5**	**3-4**	**3-5**	**4-5**	**4-6**	**5-6**	**5-7**	**6-7**
Длит. дни	**8**	**12**	**10**	**8**	**10**	**4**	**10**	**6**	**8**	**12**	**5**	**8**	**6**	**6**	**7**	**5**

Требуется определить критический путь и время выполнения проекта.

2. Определить критический путь в графе:



Вопросы к собеседованию

1.Охарактеризуйте значение понятий и теории данного раздела проектирования информационных и автоматизированных систем

2 Что гласит теорема Понтрягина-Куратовского?

3.Что такое задача коммивояжера?

4 Что такое задача Прима-Краскала?

5.Что такое задача Дейкстры?

6 Что такое задача Форда-Фалкерсона?

7.Охарактеризуйте значение понятий и теории данного раздела проектирования информационных и автоматизированных систем

Практическое занятие №18. Построение минимального остовного дерева нагруженного графа

Цель занятия. Изучение алгоритма построения минимального остовного дерева нагруженного графа.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает и умеет применять алгоритма построения минимального остовного дерева нагруженного графа.

Теоретическая часть.

Граф $G = (X, A)$ называется *нагруженным*, если для каждого ребра (x_i,x_j) определена его длина (или вес) c_{ij}.

Пусть G - связный нагруженный граф. Задача построения *минимального остовного дерева* заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти дерево, у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева графа.

а) Нужно соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной.

б)Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Задачу построения минимального остовного дерева можно решить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм Краскала.

Шаг 1. Установка начальных значений.

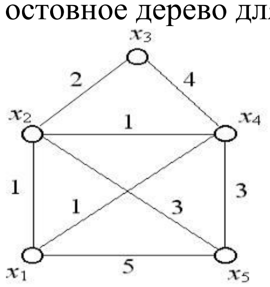
Вводится матрица длин ребер C графа G.

Шаг 2. Выбрать в графе G ребро минимальной длины. Построить граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин. Положить $i = 2$.

Шаг 3. Если $i = n$, где n - число ребер графа, то закончить работу (задача решена), в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Построить граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_i. Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентную ему вершину, не содержащуюся в G_i. Присваиваем $i := i + 1$ и переходим к шагу 3.

Например, найдем минимальное остовное дерево для графа, изображенного ниже.



Шаг 1. Установка начальных значений.

Введем матрицу длин ребер C:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 1 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 2 & \infty & 4 & \infty \\ 1 & 1 & 4 & \infty & 3 \\ 5 & 3 & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Выберем ребро минимальной длины. Минимальная длина ребра равна единице. Таких ребер три: (x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4). В этом случае можно взять любое. Возьмем (x_1, x_2). Построим граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин x_1 и x_2. Положим $i = 2$.

Шаг 3. Так как $n = 5$, то $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно одной из вершин x_1, x_2 и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_2 т. е. одной из вершин x_3, x_4, x_5. Таким образом, нужно выбрать ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5). Таких ребер длины единица два: (x_1, x_4) и (x_2, x_4). Можно выбрать любое. Возьмем (x_1, x_4). Вместе с этим ребром включаем в G_3 вершину x_4, не содержащуюся в G_2. Полагаем $i = 3$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

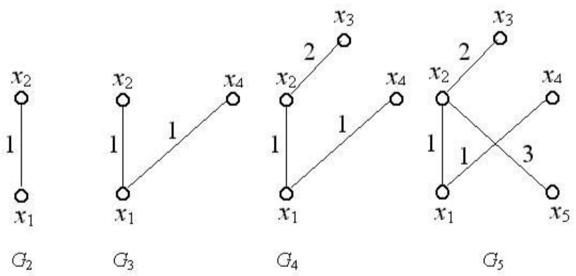
Шаг 4. Строим граф G_4, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Такое ребро длины два одно: (x_2, x_3). Вместе с этим ребром включаем в G_4 вершину x_3, не содержащуюся в G_3. Полагаем $i = 4$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_5, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Таких ребер длины три два: (x_2, x_5) и (x_4, x_5). Возьмем (x_2, x_5). Вместе с этим ребром включаем в G_5 вершину x_5, не содержащуюся в G_4. Полагаем $i = 5$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i = n$, то граф G_5 – искомое минимальное остовное дерево. Суммарная длина ребер равна 1 + 1 + 2 + 3 = 7.

Процесс построения минимального остовного дерева изображен на рисунке.



Вопросы для собеседования и задачи для самостоятельного решения

Пользуясь алгоритмом Краскала, найти минимальное остовное дерево для графа, заданного матрицей длин ребер.

Варианты заданий

1.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 4 & 6 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 13 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 20 & 14 \\ 12 & \infty & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & \infty & 10 & 12 \\ 20 & 4 & 10 & \infty & 6 \\ 14 & 6 & 12 & 6 & \infty \end{pmatrix}$

2.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 10 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 4 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

3.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 6 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

4.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & \infty & 5 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & 1 & 6 \\ 1 & 5 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 11 & 7 \\ 7 & \infty & 3 & \infty & 4 \\ 2 & 3 & \infty & 1 & 5 \\ 11 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

5.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 5 \\ 2 & \infty & 8 & \infty & 7 \\ \infty & 8 & \infty & 10 & 1 \\ 5 & \infty & 10 & \infty & 13 \\ 5 & 7 & 1 & 13 & \infty \end{pmatrix}$

Вопросы к собеседованию

1.Охарактеризуйте значение теории графов в проектирования и автоматизации информационных систем и систем управления.
2.Пользуясь алгоритмом Краскала, найти минимальное остовное дерево для графа, заданного матрицей длин ребер.