МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям по дисциплине
«Математический анализ»

Электронное издание

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Цель преподавания математики в вузе - ознакомить студентов с основами математического аппарата дисциплины Математика, необходимого для решения теоретических и практических задач, привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по Математике и ее приложениям, развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры, выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умением перевести задачу на математический язык.

Перед выполнением заданий студент должен изучить соответствующие разделы курса по рекомендуемым учебным пособиям

В процессе самостоятельного изучения материала студент может решить предложенный в методическом указании набор заданий. Это позволит студенту судить о степени усвоения соответствующего раздела курса, укажет на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление работы, поможет сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем. Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у преподавателя.

Практическое занятия № 1-4

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.

Основные теоретические сведения

1. Прямоугольные координаты (х, у) точки М и ее полярные координаты (ρ, φ) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = y/x \end{aligned} \qquad (1)$$

где ρ - полярный радиус, а φ - полярный угол точки М (рис. 3).

2. Определение конечного предела функции в точке: число А называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to a$ при $x \to a$.

Функция $f(x)$ $(F(x))$ называется *бесконечно малой (бесконечно большой)* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty)$.

Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, одновременно стремящиеся к нулю или бесконечности при $x \to a$, называются *эквивалентными,* если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$. Обозначение: $f(x) \sim \varphi(x)$.

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т. е.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} \qquad (2)$$

если $f(x) \sim f_1(x), \varphi(x) \sim \varphi_1(x)$.

3. К *основным элементарным функциям* относятся: 1) степенная функция $y = x^n$; 2) показательна функция $y = a^x$; 3) логарифмическая функция $y = \log_a x$; 4) тригонометрические функции: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tg\ x,$ $y = ctg\ x;$ 5) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x,$ $y = \arccos x,\ y = arctg\ x.$

Предел элементарной функции в точке области ее определения равен частному значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

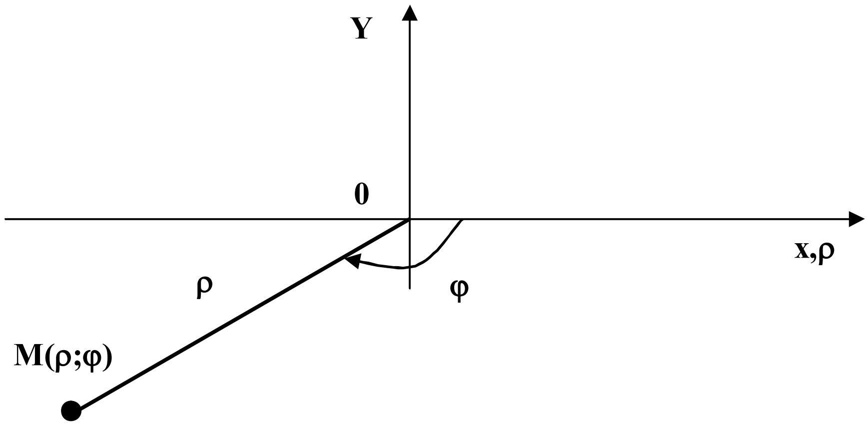


Рис. 3

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям вида $\infty - \infty, \infty \cdot 0, 0/0, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$. Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются: 1) сокращение на множитель, создающий неопределенность; 2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x \to \infty$ 3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших; 4) использование двух замечательных пределов:

$$\lim_{a(x)\to 0} \frac{\sin a(x)}{a(x)} = 1; \quad \lim_{a(x)\to 0} (1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e \tag{3}$$

Отметим также, что

$$\lim_{x\to a} \frac{C}{f(x)} = 0, \quad \textit{если} \ \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{C}{f(x)} = \infty, \quad \textit{если} \ \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0, \quad \textit{если} \ \lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty, \quad \textit{если} \ \lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$$

4. Функция/(x) называется *непрерывной* в точке $x = a$, если:

1) частное значение функции в точке $x = a$ равно $f(a)$;

2) существуют конечные односторонние пределы функции

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \tag{4}$$

3) односторонние пределы равны:

$$f(a-0) = f(a+0) = C, \tag{5}$$

4) предельное значение функции в точке $x = a$ равно ее частному значению $f(a)$

$$C = f(a) \tag{6}$$

Обозначение: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Точка $x = a$ называется *точкой устранимого разрыва,* если $f(a) \neq C$ [нарушается условие (6)].

Точка $x = a$ называется *точкой разрыва первого рода,* если оба односторонних предела конечны, но $f(a-0) \neq f(a+0)$ [нарушается условие (5)].

Точка $x = a$ называется *точкой разрыва второго рода,* если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует [нарушается условие (4)].

5. Выражение вида $z = x + yi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *комплексным числом* (в *алгебраической* и *тригонометрической* форме соответственно). Здесь $i_2 = -1$, $x = \mathrm{Re}\, z$ — действительная часть, а $y = \mathrm{Im}\, z$ — мнимая часть комплексного числа z; ρ и φ — *модуль и аргумент* числа z.

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arg z \quad (tg\varphi = y/x) \tag{7}$$

Комплексные числа изображаются точками на комплексной плоскости (рис. 4).

Извлечение корня n-й степени (n — натуральное число) из числа $z = x + yi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($z \neq 0$) производится по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{8}$$

где $\sqrt[n]{\rho}$ — арифметический корень из модуля z, а $k = 0,1...,n-1$.

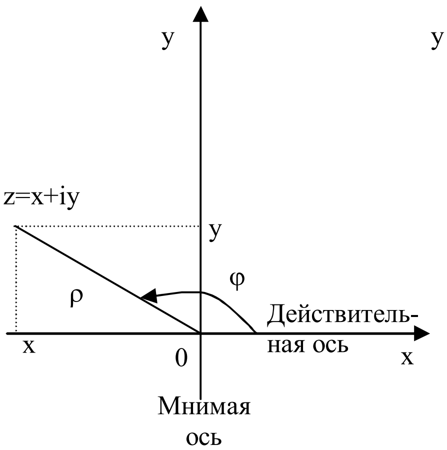


Рис. 4

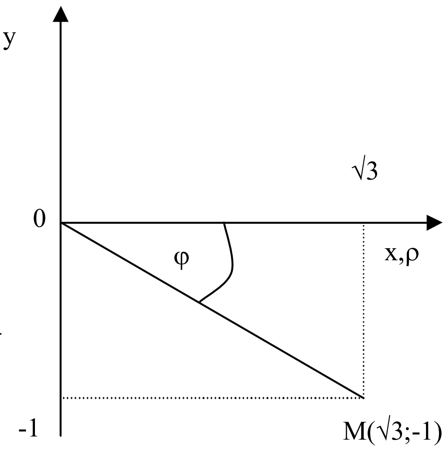


Рис. 5

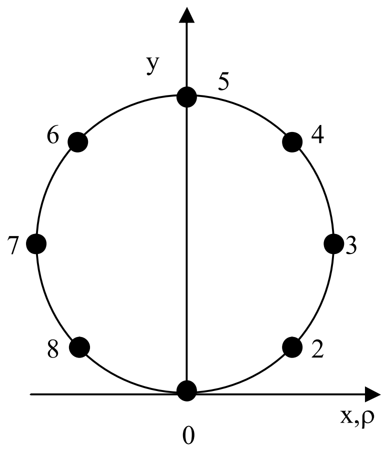


Рис. 6

Пример 1. Найти полярные координаты точки $M(\sqrt{3};-1)$ (рис. 5).

Решение. Используя формулы (1), находим полярный радиус и полярный угол точки M:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \quad tg\varphi = \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\varphi = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6},$$

так как точка M лежит в IV четверти.

Пример 2. Построить по точкам график $\rho = 2\sin\varphi$ в полярной системе координат. Найти уравнение полученной кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox — с полярной осью. Определить вид кривой.

Решение. Так как полярный радиус не отрицателен, т. е. $\rho \geq 0$, то $\sin\varphi \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \pi$; значит, вся кривая расположена в верхней полуплоскости. Составим вспомогательную таблицу:

Номера точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0	π/8	π/4	3π/8	π/2	5π/8	3π/4	7π/8	π
$\sin\varphi$	0	0,38	0,71	0,92	1	0,92	0,71	0,38	0

$\rho = 2\sin\varphi$	0	0,76	1,42	1,84	2	1,84	1,42	0,76	0

Для построения кривой на луче, проведенном из полюса под углом φ_k, откладываем соответствующее значение полярного радиуса $\rho_k = \rho(\varphi_k)$ и соединяем полученные точки (рис. 6).

Найдем уравнение кривой $\rho = 2\sin\varphi$ в прямоугольной системе координат. Для этого заменим ρ и φ их выражениями через x и y по формулам (1):

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x^2+y^2 = 2y$$

Окончательно имеем $x^2+(y-1)^2=1$, т. е. рассматриваемое уравнение выражает окружность с центром в точке (0; 1) и единичным радиусом.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)}$

Решение. Подставляя вместо x его предельное значение, равное 3, получаем в числителе бесконечно большую, а в знаменателе — бесконечно малую функцию:

$$\lim_{x\to 3} ctg(x-3) = \infty, \quad \lim_{x\to 3}\ln(4-x) = 0$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)} = \infty$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$

Решение. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида ∞/∞. Так как под знаком предела стоит отношение двух многочленов, то разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т. е. на x^4. В результате получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{12+5/x^3}{-4+7/x^4} = \frac{-12+0}{-4+0} = -3$$

поскольку при $x\to\infty$ функции $5/x^3$ и $7/x^4$ являются бесконечно малыми.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\ln(1-x^2)}$

Решение. Для раскрытия получающейся здесь неопределенности вида $0/0$

используем метод замены бесконечно малых эквивалентными. Так как при $x \to 0$ $\quad 1-\cos 4x = 2\sin^2 2x \sim 8x^2$, $\quad \ln(1-x^2) \sim -x^2$, то на основании формулы (2) находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{-x^2} = -8$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

Решение. Подстановка $x=-2$ приводит к неопределенности 1^{∞}. Произведем замену переменных: $y = x+2$, $\lim\limits_{x\to -2} y = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}} = \lim_{y\to 0}(1+2y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\left((1+2y)^{\frac{1}{y}}\right)^{2} = e^{2}$$

Здесь использован второй замечательный предел (3).

Пример 7. Указать слагаемое, эквивалентное всей сумме
$a(x) = \sin^3 x - 4tgx$ при $x \to 0$

Решение. Очевидно, что при $x \to 0$ оба слагаемых являются бесконечно малыми. Найдем предел отношения суммы к каждому из слагаемых, используя замену бесконечно малых эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x - 4tgx}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{4tgx}{\sin^3 x}\right) = 1-4\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin^3 x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x - 4tgx}{-4tgx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{-4tgx} + 1 = 1$$

Следовательно, функция $a(x) = \sin^3 x - 4tgx$ эквивалентна при $x \to 0$ второму слагаемому.

Пример 8. Исследовать функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1} & при \quad x<-1,\\ \sqrt{1-x^2} & при \quad -1\le x\le 0,\\ 1-x & при \quad x>0\end{cases}$$

на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

Решение. Так как данная функция определена на всей числовой оси, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т. е. точки $x=-1$ и $x=0$. Вычислим односторонние пределы в этих точках.
Для точки $x=-1$ имеем:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{-(x-1)\sin^3 x}{x+1}=-1;$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}\sqrt{1-x^2}=0$$

Односторонние пределы функции в точке $x=-1$ существуют, но не равны между собой. Следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода.

Для точки $x=0$ получаем

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-0}\sqrt{1-x^2}=1,\quad f(0+0)=\lim_{x\to0+0}1-x=1$$

Односторонние пределы функции при $x\to0$ равны между собой и равны частному значению функции $f(0)=\sqrt{1-x^2}\Big|_{x=0}=1$. Следовательно, исследуемая точка является точкой непрерывности.

График данной функции приведен на рис. 7.

Пример 9. Изобразить на комплексной плоскости числа: 1) $z_1=-8,$ 2) $z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Записать число z_1 в тригонометрической, а число z_2 в алгебраической форме.

Решение. 1) Для числа z_1 имеем $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = -8,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 0$. Откладывая по оси Ox $x_1 = -8$, а по оси Oy $y_1 = 0$, получаем точку комплексной плоскости, соответствующую числу z_1 (рис. 8). Модуль этого числа находим по формуле (7):

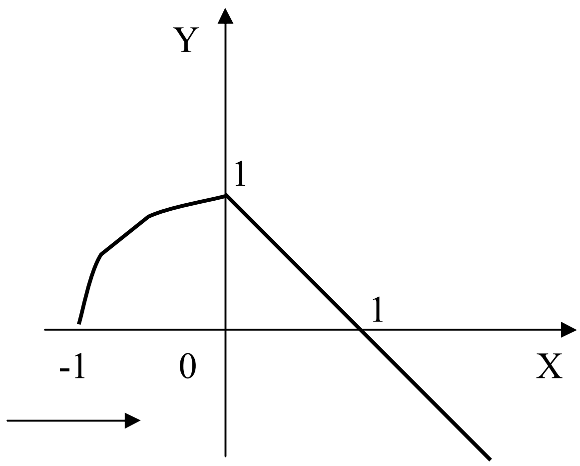


Рис. 7

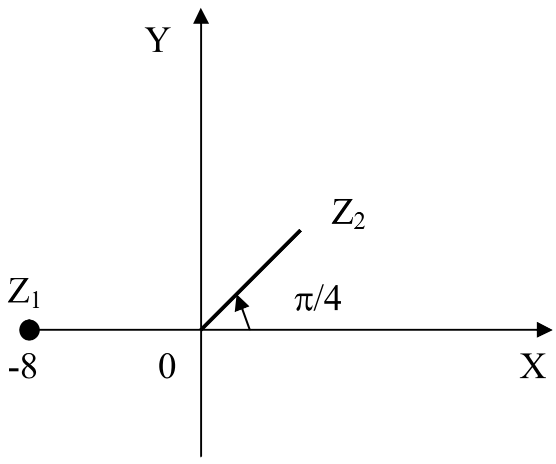


Рис. 8

$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$. Аргумент определяем из равенства $tg\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{(-8)} = 0$. Так как число z_1 находится в левой полуплоскости, то его аргумент $\varphi_1 = \pi$. Тригонометрическая форма числа z_1 имеет вид $z_1 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.

2) Модуль числа z_2 равен ρ_2, а аргумент $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$. Для его изображения на комплексной плоскости проводим из полюса луч под углом $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$ к полярной оси и откладываем на нем отрезок длиной $\rho_2 = 2$. Полученная точка соответствует числу z_2 (рис. 8). Его действительная часть $\operatorname{Re} z_2 = x_2 = \rho_2 \cos\varphi_2 = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, а мнимая часть $\operatorname{Im} z_2 = y_2 = \rho_2 \sin\varphi_2 = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. Таким образом, алгебраическая форма числа z_2 имеет вид $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Пример 10. Вычислить $\sqrt[3]{-8}$

Решение. Модуль числа -8 равен 8, а аргумент равен π. Используя формулу (8), получаем

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right);$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$\textit{При } k = 0 : \sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\textit{При } k = 1 : \sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) =$$

$$= 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$

$$\textit{При } k = 2 : \sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

Практическое занятие № 5-18

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения

1. **Правило Лопиталя**. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность* $0/0$ *или* ∞/∞*) равен пределу отношения их производных:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{1}$$

если предел справа существует.

2. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума). Необходимое условие экстремума: если x_0 — экстремальная точка функции $f(x)$, то первая производная $f'(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует. Достаточное условие экстремума: x_0 является экстремальной точкой функции $f(x)$, если ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс — при минимуме.

3. Точка x_0 называется *точкой перегиба* кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости. Необходимое условие точки перегиба: если x_0 — точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует. Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x_0)$ меняет знак,

4. Прямая $y_{ac}=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) \tag{2}$$

При $k=0$ имеем *горизонтальную асимптоту:* $y=b$.

Если

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty,\quad \textit{или}\quad \lim_{x\to a+0}f(x)=\infty, \tag{3}$$

то прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой,*

4. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. *Элементарное исследование:*

1) найти область определения функция;

2) исследовать функцию на симметричность и периодичность;

3) вычислить предельные значения функции в ее граничных точках;

4) выяснить существование асимптот;

5) определить, если это не вызовет особых затруднения, точки пересечения графика функция с координатными осями;

6) сделать эскиз графика функции, используя полученные результаты.

II. *Исследование графика функции по первой производной:*

1) найти решения уравнений $y'(x) = 0,\ y'(x) = \infty$ и y' не существует;

2) точки, «подозрительные» на экстремум, исследовать с помощью достаточного условия экстремума, определить вид экстремума;

3) вычислить значения функции в точках экстремума;

4) найти интервалы монотонности функции;

5) нанести на эскиз графика экстремальные точки;

6) уточнить вид графика функции согласно полученным результатам.

III. *Исследование графика функции по второй производной:*

1) найти решения уравнений $y''(x) = 0,\ y''(x) = \infty$ и y'' не существует;

2) точки, «подозрительные» на перегиб, исследовать с помощью достаточного условия;

3) вычислить значения функции в точках перегиба;

4) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

5) нанести на эскиз графика точки перегиба;

6) окончательно построить график функции.

Если исследование цроведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом. Если же согласование отсутствует, необходимо проверить правильность результатов отдельных этапов и исправить найденные ошибки.

6. *Частной производной* первого порядка функции нескольких переменных $u = f(x, y, z)$ по аргументу x называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \tag{4}$$

(приращение получает только один аргумент x). Обозначение: $u'_x = \dfrac{du}{dx}$.

Отыскание частной производной $\dfrac{du}{dx}$ сводится к дифференцированию функции одной переменной $u(x) = f(x, y_0, z_0)$, полученной при фиксировании аргументов y и z: $y = y_0$, $z = z_0$.

7. *Скалярным полем* $U = U(M)$ называется скалярная функция точки M

вместе с областью ее определения.

Уравнение

$$U(x, y, z) = C \quad (\text{или } U(x, y) = C) \tag{5}$$

определяет семейство *поверхностей* (или *линий) уровня,* на которых скалярное поле принимает одно и то же значение C.

Скалярное поле $U(M)$ характеризуется *градиентом*

$$grad\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \tag{6}$$

и *производной по направлению* $\vec{l} = l_x\vec{i} + l_y\vec{j} + l_z\vec{k}$, равной скалярному произведению $grad\, U$ и единичного вектора $\vec{l}^{\,0}$ направления $\vec{l}$:

Пример 1. Составить уравнение касательной к нормали к кривой $y = \sqrt{1-4x}$ в точке, абсцисса которой $x_0 = -2$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_0 = \sqrt{1-4x_0} = 3$. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0:

$$k = y'(x_0) = \left(\sqrt{1-4x}\right)'_{x_0} = -\left.\frac{4}{2\sqrt{1-4x_0}}\right|_{x_0=-2} = -\frac{2}{3}.$$

Подставляя значения x_0, y_0 и y'_0 в уравнения касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ и нормали $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, получаем:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x+2),\ 2x + 3y - 5 = 0 \text{ (касательная);}$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x+2),\ 3x - 2y + 12 = 0 \text{ (нормаль).}$$

Пример 2. Используя правило Лопиталя, вычислить предел функции:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}; \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

Решение. 1) Подстановка предельного значення аргумента $x = 2$ приводит к неопределенности вида $0/0$. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя (1):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-x^2-8x+12)'}{(x^3-5x^2+8x-4)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}.$$

Однократное применение правила Лопиталя не приводит к раскрытию неопределенности (по-прежнему получаем $\frac{0}{0}$), поэтому применим его еще раз:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x^2-2x-8)'}{(3x^2-10x+8)'}=\lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-10}=\frac{12-2}{12-10}=5.$$

Таким образом, в результате двукратного применения правила Лопиталя находим, что искомый предел равен 5.

2) Убедившись, что имеет место неопределенность вида ∞/∞, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{x^2}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2x}=\infty.$$

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Решение. Находим первую производную: $y'=-\dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. Из уравнений $y'=0$ и $y'=\infty$ получаем точки, «подозрительные» на экстремум: $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=-1$. Исследуем их, определяя знак первой производной слева и справа от каждой точки. Для наглядности результаты представим в виде таблицы изменения знака y':

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$-$
y	убыв.	min	возр.	не опр.	убыв.	0	убыв.

В первой строке указаны интервалы, на которые область определения функции разбивается точками x_1, x_2, x_3 и сами эти точки. Во второй строке указаны знаки производной y' в интервалах монотонности. В третьей строке приведено заключение о поведении функции.

Исследуемая функция, как следует из таблицы, имеет минимум в точке $x=-3: y(-3)=27/4$. Точки $x=-1$ и $x=0$ не являются точками экстремума, так как в первой точке функция не определена, а в окрестности второй точки первая производная сохраняет знак.

Пример 4. Найти асимптоты графика функции $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Решение. Точка $x=-1$ является точкой разрыва функции. Так как $\lim\limits_{x\to-1\pm0}\dfrac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty$, то прямая $x=-1$ служит вертикальной ассимптотой графика функции [см. формулы (3)].

Ищем наклонные асимптоты $y_{ac}=kx+b$, используя формулы (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2\cdot x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+1)^2}+x\right)=2.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y_{ac}=-x+2$.

Пример 5. Построить график функции $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, используя общую схему исследования функции.

Решение. I. Область определения: $(-\infty,-1),(-1,+\infty)$. Функция не является симметричной и периодической. Находим предельные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=-\infty,\ \lim_{x\to-1\pm0}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty.$$

График функции имеет одну вертикальную асимптоту $x=-1$ и одну наклонную асимптоту $y=-x+2$ (см. пример 4). Он пересекает координатные оси в точке (0; 0).

II. Функция имеет один минимум при $x=-3$ (см. пример 3).

III. Вторая производная $y''=\dfrac{-6x}{(x+1)^4}$ обращается в бесконечность при $x=-1$ и равна нулю в точке $x=0$, которая является единственной точкой перегиба (см. таблицу):

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$
y	$\cup$	не опр.	$\cup$	точка перегиба	$\cap$

Учитывая полученные результаты, строим график функции $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ (рис. 9).

Пример 6. Найти первую производную функции $y=f(x)$, заданной параметрически:

$$x=\ln(1-t),$$
$$y=(t-1)^2.$$

Решение. Дифференцируем $x(t)$ и $y(t)$ по параметру t: $x'_t=-\dfrac{1}{1-t}$, $y'_t=2(t-1)$. Искомая производная от y по x равна отношению производных от $y(t)$ и от $x(t)$ по t:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2(t-1)}{-1/(1-t)}=2(t-1)^2.$$

Пример 7. Найти частные производные $\dfrac{du}{dx},\dfrac{du}{dy},\dfrac{du}{dz}$ функции $u=z\sqrt{x^3}-ye^z$.

Решение. Считая функцию u функцией только одной переменной x, а переменные y и z рассматривая как постоянные [см. формулу (4)], находим $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{3}{2}z\sqrt{x}$. Аналогично, считая u функцией только y, а затем только z, получаем $\dfrac{du}{dy}=-e^z$, $\dfrac{du}{dz}=\sqrt{x^3}-ye^z$.

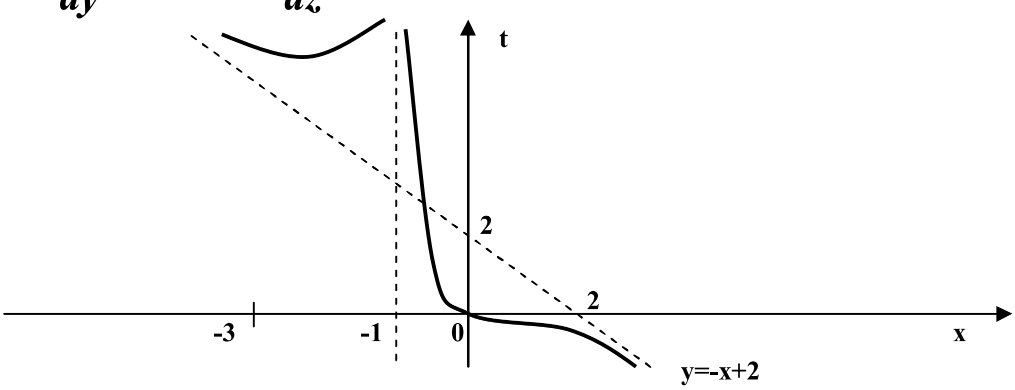


Рис. 9

Пример 8. Найти поверхности уровня скалярного поля $U = x^2 + y^2 + z^2$. Вычислить производную поля в точке $A\,(-2\sqrt{3};\,-1;\,1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, где $B\,(0;\,-4;\,3)$.

Решение. Поверхностями уровня данного поля являются концентрические сферы с центром в начале координат [см. формулу (5)]: $x^2 + y^2 + z^2 = C$. Градиент вычисляется по формуле (6): $gradU = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$.

Найдем единичный вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{l}^{\,0} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{2\sqrt{3}\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{12+9+4}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{2}{5}\vec{k},$$

а затем по формуле (7) производную скалярного поля U по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$ в точке A:

$$\left.\frac{dU}{dl}\right|_A = (gradU, \vec{l}^{\,0}) = \left.\left(2x\cdot\frac{2\sqrt{3}}{5} + 2y\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 2z\cdot\frac{2}{5}\right)\right|_A = -2{,}8$$

Так как $\dfrac{dU}{dl} < 0$, то данное скалярное поле убывает в направлении вектора

$\rightarrow$

Контрольные вопросы

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
10. В чем заключается механический смысл производной?
11. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?
12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
13. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций?
14. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.
15. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?
16. Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?
17. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
18. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
19. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции? Математический анализ. Функции нескольких переменных.
20. Дайте определение функции нескольких переменных.
21. Дайте определение частной производной.
22. Определите полный дифференциал функции нескольких переменных.
23. В чем состоит методика применения полного дифференциала к приближённым вычислениям.
24. Дайте определение производной по направлению, касательной плоскости и нормали к поверхности.
25. Определите частные производные и дифференциалы ФНП высших порядков.
26. Запишите формулу Тейлора.
27. Дайте определение экстремума функции нескольких переменных.
28. Дайте определение условного экстремума ФНП.
29. Какова методика определения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области.
30. Охарактеризуйте место темы в решении задач математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Практическое занятие № 19-25

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ

И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения

1. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется выражение вида $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ F(x) называется *первообразной* для заданной функции $f(x)$.
При интегрировании наиболее часто используются следующие методы.

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C; \quad \int f(x+b)dx = F(x+b) + C, \qquad (1)$$

где a и b — некоторые постоянные.

2) *Подведение под знак дифференциала:*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)), \qquad (2)$$

так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$.

3) *Формула интегрирования по частям:*

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (3)$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых затруднений. За u, как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к ее упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида $P(x)e^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x)arctgx$, где $P(x)$ - многочлен от *x*.

4) *Интегрирование рациональных дробей,* т. с. отношений двух многочленов $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ (соответственно k-й и n-й степени): $R(x) = P_k(x)/Q_n(x)$,

сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на элементарные, всегда интегрируемые дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^l}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, \qquad (4)$$

где l и m - целые положительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. При этом в случае неправильной дроби ($k \geq n$) должна быть предварительно выделена целая часть.

5) *Интегрирование методом замены переменной* (способом подстановки) является одним из эффективных приемов интегрирования. Его сущность состоит в переходе от переменной x к новой переменной t: $x = \varphi(t)$. Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т. е. выбор функции $\varphi(t)$, не всегда очевидна. Однако для некоторых часто встречающихся классов функций можно указать такие стандартные подстановки:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+d}}\right)dx, \quad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+d}} = t;$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \quad x = a \cdot \sin t;$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \quad x = a \cdot tgt;$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx, \quad x = \frac{a}{\sin t},$$

где R - символ рациональной функции.

2. *Формула Ньютона — Лейбница* для вычисления определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (5)$$

если $F'(x) = f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a, x = b, y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x) \geq 0$, и со знаком минус, если $f(x) \leq 0$.

3. Если интервал интегрирования $[a, b]$ не ограничен (например, $b = \infty$)

или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при $x = b$), то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{6}$$

и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to 0}\int_a^{b-a} f(x)dx, \tag{7}$$

Интегралы в левых частях равенств (6) н (7) называются *несобственными интегралами.* Несобственный интеграл называется *сходящимся,* если существует конечный предел в правой части равенств (б) и (7). Если же предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется *расходящимся.*

4. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a, x = b,$ $y = 0$ и частью графика кривой $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox . Тогда объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx, \tag{8}$$

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ *,* то, используя формулы (1), получим

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{2(2x-3)} + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2(2x-3)} + C\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-3}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Пример 2. Найти $\int \cos x e^{\sin x} dx$.

Решение. Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то по формуле (2) находим

$$\int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x\cos 2x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = \cos 2x dx$; тогда $du = dx,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x$. Используя формулу (3), имеем

$$\int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{3x^2 - 7x + 10}{(x^2+4)(x-2)}dx$.

Решение. Подынтегральная рациональная дробь является правильной и разлагается на элементарные дроби вида (4):

$$\frac{3x^2 - 7x + 10}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2}.$$

Освобождаясь от знаменателей в обеих частях этого равенства и приравнивая числители, получаем тождество для вычисления неопределенных коэффициентов *A, B* и *C:*

$$3x^2 - 7x + 10 \equiv Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 + 4C$$

Составим систему трех уравнений с тремя неизвестными. Одно уравнение получим, полагая $x = 2$ (корень знаменателя подынтегральной функции). Два других получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, например при x^2 и x^0:

$$\begin{aligned} x = 2:&\ 8 = 4C + 4C, \\ x^2:&\quad 3 = A + C, \\ x^0:&\quad 10 = -2B + 4C. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает: $A = 2,\ B = -3,\ C = 1$. Таким образом,

$$\int \frac{3x^2 - 7x + 10}{(x^2+4)(x-2)}dx = \int\left(\frac{2x-3}{x^2+4} + \frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{2xdx}{x^2+4} - 3\int \frac{dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x-2} = \ln(x^2+4) - \frac{3}{2}arctg\,\frac{x}{2} + \ln|x-2| + C.$$

Пример 5. Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$

Решение. Применим метод замены переменной; положим $\sqrt{x} = t$, откуда $dx = 2tdt$. Найдем пределы интегрирования по переменной t: при $x = 4$ имеем $t = 2$, а при $x = 9$ имеем $t = 3$. Переходя в исходном интеграле к новой переменной t и применяя формулу Ньютона — Лейбница (5), получаем

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx = \int_2^3 \frac{t-1}{t+1}2tdt = \left(t^2 - 4t + 4\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 =$$
$$= (9 - 12 + 4\ln 4) - (4 - 8 + 4\ln 3) = 2{,}15.$$

Пример 6. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: 1) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; 2) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение. 1) Первый интеграл является несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования. Согласно определению (6), имеем

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}(\ln|\ln x|)\Big|_e^l = \lim_{b\to\infty}(\ln|\ln b|) - 0 = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции; $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x = 0$. Согласно определению (7), получаем

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}(tg\ x)\Big|_\varepsilon^{\pi/4} = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0}(tg\ \varepsilon) = 1,$$

т. е. этот несобственный интеграл сходится.

Пример 7. Вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = \sin x + 2,\ y_2 = -1,\ x = 0,\ x = \pi$ (рис. 10).

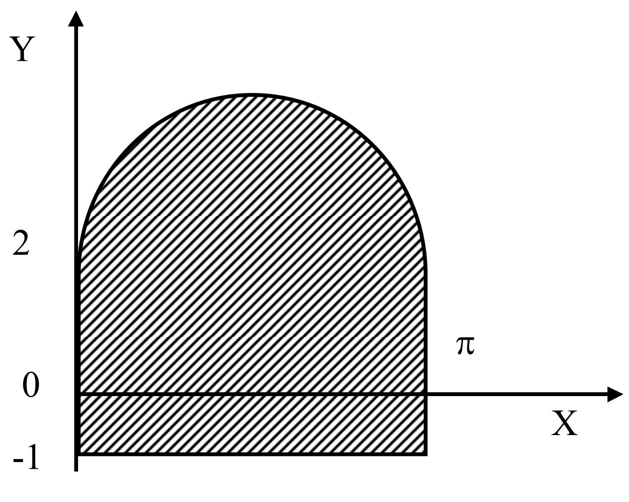


Рис. 10

Решение. $S = \int_0^{\pi} (y_1 - y_2)dx = \int_0^{\pi} (\sin x + 2 + 1)dx = 2 + 3\pi.$

Пртер 8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = \sqrt{4x - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ $(0 \le x \le 2)$.

Решение. Объем полученного тела вращения найдем по формуле (8):

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (4x - x^2)dx = \frac{16\pi}{3}.$$

Практическое занятие № 26-28

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Основные теоретические сведения

1. Вычисление двойного интеграла от функции $f(x,y)$, определенной в области D, сводится к вычислению двукратного интеграла вида

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy, \tag{1}$$

если область D определяется условиями $a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x),$ или вида

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dx \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx, \tag{2}$$

если область D определяется условиями $c \le y \le d, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$. Переход от равенства (1) к (2) иди обратно называется *изменением порядка интегрирования.* Значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования.

2. Вычисление тройного интеграла от функции $f(x,y,z)$, определенной в области V, сводится к вычислению интеграла вида

$$\iiint\limits_V f(x,y,z) = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \tag{3}$$

где D_{xy} - проекция области V на плоскость xOy, $z=\psi_1(x,y)$ и $z=\psi_2(x,y)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих область V соответственно снизу и сверху. В тройном интеграле, так же как и в двойном, порядок интегрирования может быть изменен.

3. Наряду с прямоугольной системой координат пространстве могут быть введены цилиндрическая и сферическая системы координат (рис. 11). Прямоугольные координаты $(x;y;z)$ точки M связаны с ее цилиндрическими $(\rho;\varphi;z)$ и сферическими $(r;\theta;\varphi)$ координатами соотношениями

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z; \end{cases} \quad \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta. \end{cases} \tag{4}$$

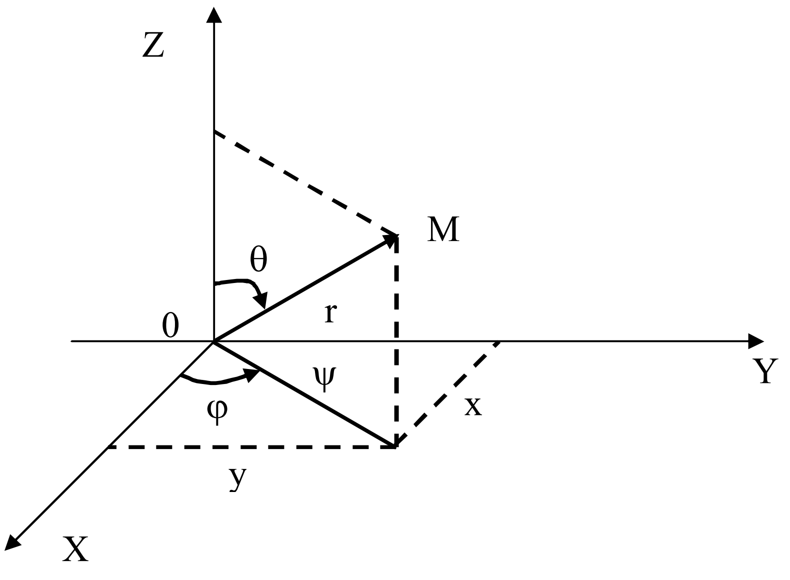


Рис. 11

Тройной интеграл записывается в виде

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \begin{cases} \iiint\limits_V f(\rho,\varphi,z)\rho\, d\varphi\, d\rho\, dz - \text{в цилиндрической системе}; \\ \iiint\limits_V f(r,\theta,\varphi)r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr - \text{в сферической системе}. \end{cases} \tag{5}$$

4. Вычисление криволинейного интеграла по координатам от функций, определенных на кривой Γ, сводится к вычислению определенного интеграла вида

$$\int\limits_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt + \tag{6}$$
$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt,$$

если кривая Γ задана параметрически: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ и $t = \alpha$ соответствует начальной точке кривой Γ, а $t = \beta$ — ее конечной точке.

5. Вычисление поверхностного интеграла от функции $F(x,y,z)$, определенной на двусторонней поверхности σ, сводится к вычислению двойного интеграла, например, вида

$$\iint\limits_\alpha F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} F(x,y,f(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}, \tag{7}$$

если поверхность σ, заданная уравнением $z = f(x,y)$, однозначно проецируется на плоскость xOy в область D_{xy}. Здесь γ - угол между единичным вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности σ и осью Oz.

$$\vec{n} = \pm\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \tag{8}$$

Требуемая условиями задачи сторона поверхности *а* определяется выбором соответствующего знака в формуле (8).

6. С помощью тронных интегралов можно вычислить:

а) объем V тела и его массу M :

$$V = \iiint_V dxdydz\,, \quad M = \iiint_V \mu(x, y, z)dxdydz\,,$$

где μ - объемная плотность распределения массы;

б) момент инерции однородного тела относительно, например, оси Oz *:*

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz\,.$$

7. *Векторным полем* $\vec{a}(M)$ называется векторная функция точки M вместе с областью ее определения:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$ характеризуется скалярной величиной — *дивергенцией*

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{9}$$

и векторной величиной — *ротором:*

$$\begin{aligned} rot\vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \end{aligned} \tag{10}$$

8. *Потоком* векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_\alpha (\vec{a}, \vec{n})d\sigma\,, \tag{11}$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности σ, а $(\vec{a},\vec{n})$ - скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$.

9. *Циркуляцией* векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ по замкнутой кривой $Г$ называется криволинейный интеграл

$$Ц = \oint_{Г} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{Г} \vec{a}d\vec{r}, \tag{12}$$

где $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

10. *Формула Остроградского* устанавливает связь между потоком векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ и дивергенцией поля:

$$\oiint_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iiint_{V} div\vec{a}dV, \tag{13}$$

где V - объем, ограниченный поверхностью σ.

11. *Формула Стокса* устанавливает связь между циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ и его ротором:

$$\oint_{Г} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} (rot\vec{a},\vec{n})d\sigma, \tag{14}$$

где σ — поверхность, ограниченная замкнутым контуром $Г$, а $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к этой поверхности. Направление нормали должно быть согласовано с направлением обхода контура $Г$.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$I = \int_{0}^{1} dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

Решение. Зная пределы интегрирования, найдем границы области интегрирования $D: x = 0,\ x = 1,\ y = 2\sqrt{x},\ y = -2\sqrt{x}$ и построим их (рис. 12). Область D располагается в полосе $0 \le x \le 1$ и ограничена снизу и сверху соответствующими ветвями параболы $y^2 = 4x$.

Найдем новые пределы внешнего (по y) и внутреннего (по x) интегрирования. Так как область D проецируется на ось Oy в отрезок AB, то пределами внешнего интегрирования являются ординаты точек A и B, т. е.

$y=-2$ и $y=2$ соответственно. Левой границей области является кривая $x=y^2/4$ (уравнение параболы $y^2=4x$ разрешено относительно x), а правой — прямая $x=1$. Таким образом, двойной интеграл I с измененным порядком интегрирования запишется в виде

$$I=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{y^2/4}^{1}f(x,y)dx.$$

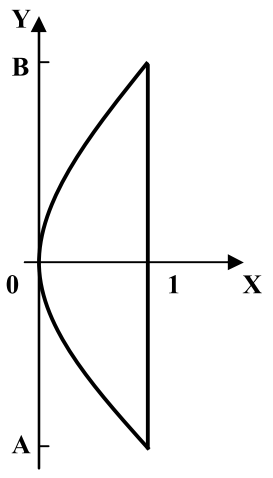
Пример 2. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_V(-2x)dV$, если область V ограничена поверхностями $\sigma_1: z=2$ и $\sigma_2: z^2=x^2+y^2\ (z\geq 0)$ (рис. 13).

Решение. Исключая z из уравнений σ_1 и σ_2, получим уравнение границы области D_{xy} (проекции V на плоскость xOy): $x^2+y^2=4$. Для вычисления интеграла I переходим к цилиндрическим координатам по формулам (4) с пределами интегрирования $0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq\rho\leq 2,\ \rho\leq z\leq 2$ ($z=\rho$ уравнение верхней части конуса $z^2=x^2+y^2$ в цилиндрических координатах). По формуле (5) получаем

$$I=\iiint\limits_V(-2z)dV=\iiint\limits_V(-2z)\rho\,d\rho d\varphi dz$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\,d\rho\int\limits_\rho^2 2zdz=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\left(z^2\Big|_\rho^2\right)d\rho=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho(4-\rho^2)d\rho=-\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(2\rho^2-\frac{\rho^2}{4}\right)\Big|_0^2\right)d\varphi=-4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-8\pi.$$



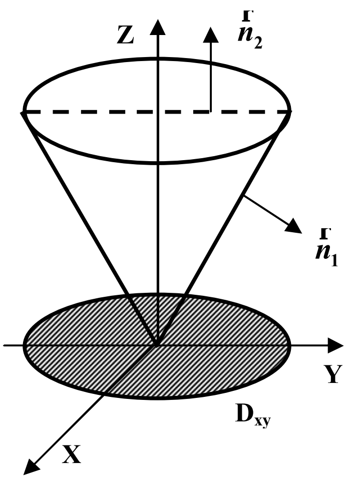


Рис. 12 Рис. 13

Пример 3. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{\sigma_2} \frac{z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma,$$

где σ_2 — внешняя часть конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(z \geq 0)$, отсекаемая плоскостью $z = 2$ (рис. 13).

Решепие. Поверхность σ_2 однозначно проецируется в область D_{xy} плоскости xOy, и интеграл вычисляется по формуле (7).

Единичный вектор внешней нормали к поверхностях σ_2 найдем по формуле (8):

$$\vec{n}_2 = \pm \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{\overrightarrow{xi} + \overrightarrow{yj} - \overrightarrow{zk}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Здесь в выражении для нормали выбран знак плюс, так как угол γ между осью Oz и нормалью $\vec{n}_2$ — тупой и, следовательно, $\cos\gamma = \pm \frac{(-z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ должен быть отрицательным. Учитывая, что $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, на поверхности σ_2 получаем

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{dxdy}{z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iint\limits_{D_{xy}} z^2 dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy.$$

Область D_{xy} есть круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Поэтому в последнем интеграле переходим к полярным координатам (при этом $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$):

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\rho_2}{4} \right) \Bigg|_0^2 \right) d\varphi = 4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi.$$

Пример 4. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \overrightarrow{yi} - \overrightarrow{xj} - \overrightarrow{z^2 k}$.
Решение. По формуле (9) получаем

$$div\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial z}(-z^2) = -2x.$$

Ротор данного векторного поля находим по формуле (10):

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & -z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-x) \right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-z^2) - \frac{\partial}{\partial z} y \right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y} y \right)\vec{k} = -2\vec{k}.$$

Пример 5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ, образованную плоскостью $z = 2$ и частью конуса $z^2 = x^2 + y^2\ (z > 0)$. Проверить результат с помощью формулы Остроградского.

Решение. Поверхность σ состоит из двух поверхностей: σ_1 — части плоскости $z = 2$ и σ_2 — части конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (рис. 13). Поэтому поток через σ равен сумме потоков вектора $\vec{a}$ через составляющие поверхности:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint\limits_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma,$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — внешние нормали к плоскости и конусу соответственно.

Для поверхности $z = 2$ в силу формулы (8) получим $\vec{n}_1 = \vec{k}$ и, следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma = \iint_{\sigma_1} (-z^2) d\sigma = -4 \iint_{D_{xy}} dxdy =$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \, d\rho = -4 \int_0^{2\pi} \left(\left(\rho^2 / 2 \right) \Big|_0^2 \right) d\varphi = -8 \int_0^{2\pi} d\varphi = -16\pi ,$$

так как на поверхности σ_1 имеем $z = 2$.

Вычислим поток через поверхность σ_2 уравнение которой в явном виде дается соотношением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вектор внешней нормали равен $\vec{n}_2 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. По формуле (11) получаем

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma = \iint_{\sigma_2} \frac{xy - xy + z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma_2} \frac{z^3 d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 8\pi$$

(см. пример 3).

Таким образом, поток векторного поля через поверхность $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ равен

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -16\pi + 8\pi = -8\pi .$$

Найдем решение этой задачи с помощью формулы Остроградского (13). Дивергенция поля $a = y\vec{i} - x\vec{j} - z^2\vec{k}$ равна $div\vec{a} = -2z$ (см. пример 4), и поток

$$\Pi = \iiint_V div\vec{a} dV = \iiint_{\sigma} (-2z) dV = -8\pi ,$$

как это было вычислено в примере 2.

Пример 6. Вычислить циркуляцию векторного поле $a = y\vec{i} - x\vec{j} - z^2\vec{k}$ no контуру Γ, образованному пересечением поверхностей $\sigma_1 : z = 2$ и $\sigma_2 : z^2 = x^2 + y^2 \ (z \geq 0)$. Проверить результат с помощью формулы Стокса.

Решение. Пересечением указанных поверхностей является окружность

$x^2+y^2=4,\ \ z=2$ (рис. 13). Направление обхода контура выбирается обычно так, чтобы ограниченная им область оставалась слева. Запишем параметрические уравнения контура Γ :

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} dx = -2\sin t dt, \\ dy = 2\cos t dt, \\ dz = 0, \end{cases} \tag{15}$$

причем параметр t изменяется от 0 до 2π . По формуле (12) с учетом (6) и (15) получаем

$$Ц = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t)dt - 2\cos t \cdot 2\cos t dt - 4\cdot 0 =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t - 4\cos^2 t)dt = -4\int_0^{2\pi} dt = -8\pi .$$

Применим теперь формулу Стокса (14). В качестве поверхности σ, натянутой на контур Γ , можно взять часть плоскости $z=2$. Направление нормали $\vec{n}=\vec{k}$ к этой поверхности согласуется с направлением обхода контура Γ . Ротор данного векторного поля вычислен в примере 4: $rot\,\vec{a}=-2\vec{k}$. Поэтому искомая циркуляция

$$Ц = \iint_{\sigma} (rot\,\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma} (-2\vec{k},\vec{k})d\sigma =$$

$$= -2\iint_{\sigma} d\sigma = -2\iint_{D_{xy}} \rho d\rho d\varphi = -2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \left(\left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^2 \right) d\varphi = -4\int_0^{2\pi} d\varphi = -8\pi ,$$

что совпадает со значением циркуляции, полученным непосредственным вычислением.

Контрольные вопросы

Интегральное исчисление функции одной действительной переменной.

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
4. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
5. Как записать всю совокупность первообразных функций?
6. Что называется неопределенным интегралом?
7. Почему интеграл называется неопределенным?
8. Что означает постоянная С в определении неопределенного интеграла?
9. В чем заключается правило интегрирования выражения, содержащего постоянный множитель?
10. В чем заключается правило интегрирования алгебраической суммы функций?
11. Чему равен интеграл от дифференциала некоторой функции?
12. Напишите основные формулы интегрирования.
13. Как проверить результата интегрирования?
14. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
15. Что такое интегральные кривые? Как они расположены друг относительно друга? Могут ли они пересекаться?
16. Какие методы интегрирования известны?
17. Сформулируйте основные положения метода замены переменной.
18. Сформулируйте основные положения метода интегрирования по частям.
19. Сформулируйте основные положения метода интегрирования рациональных функций.
20. Сформулируйте основные положения метода интегрирования тригонометрических выражений.
21. Что такое определенный интеграл?
22. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
23. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
24. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
25. Назовите основные методы интегрирования определенных интегралов.
26. Какие интегралы называются несобственными?

Интегральное исчисление функции нескольких переменных.

1. Введите понятие двойного интеграла и определите его свойства.
2. Опишите методику перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным и цилиндрическим координатам.
3. Введите понятие тройного интеграла и определите его свойства.
4. Опишите методику перехода от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим координатам.

Практическое занятие № 29-32

Дифференциальные уравнения и системы

Основные теоретические сведения

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y=\varphi(x,C)$, которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения. Решения, получающиеся из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при определенном значении произвольной постоянной C, называются *частными.* Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y=y_0$ при $x=x_0$ (другая запись $y\big|_{x=x_0}=y_0$), называется *задачей Коши.*

График всякого решения $y=\varphi(x)$ данного дифференциального уравнения, построенный на плоскости xOy, называется *интегральной кривой* этого уравнения.

2. Уравнение вида $y'+A(x)y=B(x)$ называется *линейным.* Если $B(x)=0$, то уравнение называется *однородным;* если $B(x)\neq 0$ - *неоднородным.* Общее решение однородного уравнения получается путем разделения переменных; общее решение неоднородного уравнения получается из общего решения соответствующего однородного уравнения с помощью вариации произвольной постоянной интегрирования C.

Данное неоднородное уравнение можно интегрировать также с помощью замены $y=uv$, где u, v — две неизвестные функции.

3. *Дифференциальное уравнение n-го порядка,* разрешенное относительно производной, имеет вид $y^{(n)}=f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$. Задача нахождения решения $y=\varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $y\big|_{x=x_0}=y_0$; $y'\big|_{x=x_0}=y_0'$ … ; $y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$ называется *задачей Коши.*

Для нахождения частного решения иногда используют так называемые краевые условия. Эта условии (их число не должно превышать порядка уравнения) задаются не в одной точке, а на концах некоторого промежутка. Краевые условия ставятся лишь для уравнений порядка выше первого.

4. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Если в уравнении $y^{(n)}=f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ а)

непрерывна по всем своим аргументам $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ в некоторой области D их изменения; б) имеет ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то найдется интервал $x_{0-h} < x < x_0 + h\ (h > 0)$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0'$; $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где значения $x = x_0;\ y = y_0;\ y' = y_0';\ ...;$ $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ содержатся в области D.

Проинтегрировать (в конечном виде) уравнение n-го порядка можно только в некоторых частных случаях.

5. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами* имеет вид $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, где a_0, a_1, a_2 - числа, причем $a_0 \neq 0$. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным,* а если $f(x) \neq 0$ - *неоднородным.*

6. Квадратное уравнение $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Пусть $D = a_1^2 - 4a_0 a_2$ — дискриминант квадратного уравнения. Возможны следующие случая:

1) $D > 0$ — общим решением уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ является функция $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ (k_1 и k_2 - корни характеристического уравнения);

2) $D = 0$ — общим решением служит функция $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$ (k — корень характеристического уравнения);

3) $D < 0$ — общим решением является функция $y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + + C_2 \sin \beta x)$ ($k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$ - корни характеристического уравнения).

7. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теореме.

Теорема. Если y^* — некоторое частное решение неоднородного уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ и Y — общее решение соответствующего однородного уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = Y + y^*$.

Укажем правило нахождения частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1) Пусть $f(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$; тогда:

а) $y^* = Ax^2 + Bx + C$, если нуль не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx$, если нуль является простым корнем характеристического уравнения;

в) $y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$, если нуль является двукратным корнем характеристического уравнения.

2) Пусть $f(x) = be^{\alpha x}$; тогда:

а) $y^* = Ae^{\alpha x}$, если число α не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^* = Axe^{\alpha x}$, если число α является корнем характеристического уравнения;

в) $y^* = Ax^2 e^{\alpha x}$, если число α является двукратным корнем характеристического уравнения.

3) Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(M \cos \beta x + N \sin \beta x)$; тогда:

а) $y^* = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^* = xe^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, если число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения;

8. Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — неизвестные функции независимой переменной t, называется *нормальной системой.*

Пусть дана система n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения $\dfrac{dX}{dt} = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Решение системы ищем в виде $x_1 = p_1 e^{\lambda t}, x_2 = p_2 e^{\lambda t}, \ldots, x_n = p_n e^{\lambda t}$. Подставив значении $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в систему дифференциальных уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + & a_{12}p_2 + & \ldots & a_{1n}p_n = 0, \\ a_{21}p_1 + & (a_{22} - \lambda)p_2 + & \ldots & a_{2n}p_n = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}p_1 + & a_{n2}p_2 + & \ldots & (a_{nn} - \lambda)p_n = 0. \end{cases}$$

Система должна иметь ненулевое решение, поэтому для определения λ получаем уравнение n -й степени:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть это характеристическое уравнение имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет n решений:

1-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_1$:

$$x_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 t};\ x_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 t};\ ...;\ x_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

2-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_2$:

$$x_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 t};\ x_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 t};\ ...;\ x_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

…………………………………………………………………….

n-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_n$:

$$x_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n t};\ x_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n t};\ ...;\ x_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n t};$$

Получена фундаментальная система решений. Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = c_1x_{11} + c_2x_{12} + ... + c_nx_{1n}, \\ x_2 = c_1x_{21} + c_2x_{22} + ... + c_nx_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + ... + c_nx_{nn}. \end{cases}$$

Пример 2. Найтн общее решение уравнения $2xy''' = y''$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = -1;\ y'(1) = 0;\ y''(1) = 1$.

Решение. Пусть $y'' = z$. Имеем $2xz' - z = 0 \Rightarrow 2x\dfrac{dz}{dx} = z \Rightarrow \dfrac{dz}{z} =$ $= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = \dfrac{1}{2}\ln x + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1\sqrt{x}$. Но $z = y'' \Rightarrow y'' = C_1\sqrt{x} \Rightarrow$ $\Rightarrow y' = C_1\dfrac{x^{3/2}}{3/2} + C_2;\ y' = \dfrac{2}{3}C_1x\sqrt{x} + C_2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}C_1\dfrac{x^{5/2}}{5/2} + C_2x + C_3$.

Следовательно, $y = \dfrac{4}{15}C_1x^2\cdot\sqrt{x} + C_2x + C_3$ — общее решение дифференциального уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим в выражения для $y,\ y',\ y''$ значение $x = 1$:

$$y(1)=-1 \Rightarrow \frac{4}{15}C_1+C_2+C_3=-1;$$
$$y'(1)=0 \Rightarrow \frac{2}{3}C_1+C_2=0;$$
$$y''(1)=1 \Rightarrow C_1=1.$$

Из системы уравнений $C_2+C_3=\frac{19}{15}; C_2=-\frac{2}{3}$ находим $C_2=-\frac{2}{3}$; $C_3=-\frac{3}{5}$. Значит, искомое частное решение имеет вид

$$y=\frac{4}{15}x^2-\sqrt{x}-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=5\sin 2x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_0=\frac{2}{29}$; $y_0'=\frac{1}{29}$ при $x=0$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y''+4y'+13y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+13=0$, откуда $k_1=-2-3i, k_2=-2+3i$. Следовательно, $Y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+$ $+C_2\sin 3x)$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$. Имеем

$$y^{*'}=-2A\cdot\sin 2x+2B\cos 2x,\; y^{*''}=-4A\cdot\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$$-4A\cdot\cos 2x-4B\sin 2x-8A\cdot\sin 2x+8B\cos 2x+13A\cdot\cos 2x+$$
$$+13B\sin 2x=5\sin 2x;$$
$$(9A+8B)\cos 2x+(-8A+9B)\sin 2x=5\sin 2x$$

и получим систему для вычисления коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} 9A+8B=0 & A=-\dfrac{8}{29} \\ \qquad\quad \Rightarrow & \\ -8A+9B=5 & B=\dfrac{9}{29} \end{cases}$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^*=-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения — вид

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y_0=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1-\frac{8}{29}=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1=\frac{10}{29};$$

$$y'=-2x^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{-2x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x)+$$
$$+\frac{16}{29}\sin 2x+\frac{18}{29}\cos 2x;\quad y'=\frac{1}{29}\Rightarrow -2C_1+3C_2+\frac{18}{29}=\frac{1}{29}\Rightarrow C_2=\frac{1}{29}.$$

Искомое частное решение таково:

$$y=e^{-2x}\left(\frac{10}{29}\cos 3x+\frac{1}{29}\sin 3x\right)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x.$$

Пример 4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2-3x_1. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 + x_2. \end{cases}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 4.$$

Подставим найденные значения корней характеристического уравнения в систему линейных алгебраических уравнений относительно p_1, p_2.

Для $\lambda = -2$ имеем

$$\begin{cases} (1+2)p_1 - 3p_2 = 0 \\ -3p_1 + (1+2)p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p_1 - 3p_2 = 0 \\ -3p_1 + 3p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 = 0 \\ p_1 - p_2 = 0 \end{cases}$$

(второе уравнение есть следствие первого). Возьмем, например, $p_1 = k$; тогда $p_2 = -k$. Полагая $k = 1$, найдем $p_1 = 1; p_2 = -1$. Итак, для $\lambda = -2$ получим $x_{11} = e^{-2t}; x_{21} = e^{-2t}$.

Для $\lambda = 4$ имеем

$$\begin{cases} (1-4)p_1 - 3p_2 = 0 \\ -3p_1 + (1-4)p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p_1 - 3p_2 = 0 \\ -3p_1 - 3p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 = 0 \end{cases}$$

(второе уравнение есть следствие первого). Возьмем, например, $p_1 = k$; тогда $p_2 = -k$. Полагая $k = 1$, найдем $p_1 = 1$; $p_2 = -1$. Итак, для $\lambda = 4$ получим $x_{12} = e^{4t}; x_{22} = -e^{4t}$.

Фундаментальная система решений:

для $\lambda = -2$: $x_{11} = e^{-2t}; x_{21} = e^{-2t}$,

для $\lambda = 4$: $x_{12} = e^{4t}; x_{22} = -e^{4t}$.

Следовательно, общее решение системы имеет вид

$$x_1 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}, \; x_2 = C_1 e^{-2t} - C_2 e^{4t}$$

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое называется частным?
4. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?
5. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?
6. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?
7. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого, третьего порядка?
8. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения?
9. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?
10. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
11. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными?
12. Как решается уравнение с разделенными переменными?
13. Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?
14. Каков алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными?
15. В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл?
16. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка?
17. Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?
18. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?
19. Какой вид имеет простейшее дифференциальное уравнение второго порядка? Как оно решается?
20. Как определяется и как записывается в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
21. Что такое характеристическое уравнение?

Практическое занятие № 33-34

РЯДЫ

Основные теоретические сведения

1. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1)$$

называется *сходящимся,* если существует *предел* его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда. Если же предел частичных сумм не существует, то ряд (1) называется *расходящимся.*

Необходимый признак сходимости: если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty: \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

К достаточным признакам сходимости рядов с положительными членами $(a_n \geq 0)$ относятся:

а) Признак сравнения в предельной форме: если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ (k \neq 0, \infty), \qquad (2)$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или расходятся. В качестве эталонных рядов для сравнения обычно служат:

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, сходящийся при $a > 1$ и расходящийся при $a \leq 1$;

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходящийся при $0 \leq q < 1$ расходящийся при $q \geq 1$.

n-l

б) Признак Даламбера: если существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad (3)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $0 \leq q < 1$ и расходится при $q > 1$. Если же $q = 1$, то вопрос о сходимости ряда этим признаком не решается.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами, имеющими разные знаки, называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, и *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

в) Признак Лейбница: если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяют условиям: 1) $a_n a_{n+1} < 0$ (т.е. ряд знакочередующийся); 2) $|a_1| > |a_2| > \dots > |a_n| > \dots$; 3) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, то ряд сходится. Погрешность Δ, происходящая от замены суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой его первых n членов, по абсолютной величине меньше первого из отброшенных членов:

$$\Delta = |S - S_n| < |a_{n+1}|. \tag{4}$$

1. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{5}$$

называется *степенным рядом* (относительно $(x-a)$), точка $x = a$ *центром разложения,* a_n — *коэффициентами ряда.* Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если ряд (5) сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. При $|x-a| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Интервал $]a-R, a+R[$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (5). Радиус сходимости R может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{6}$$

Степенной ряд (5) внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать с сохранением радиуса сходимости.

3. *Степенным рядом с комплексными членами* называется выражение вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n,$$

где $z_n = x_n + iy_n$, a_n - комплексные постоянные. Областью сходимости этого ряда является круг с центром в начале координат: $|z| < R$, где R — радиус сходимости ряда.

По определению,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..., \ R = \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \ R = \infty; \tag{7}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \ R = \infty;$$

Отсюда следует, что

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{8}$$

4. *Рядом Фурье* периодической функции $f(x), -l \le x \le l,$ называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, ...;$$

Функция, заданная на полупериоде $[0, l]$, может быть представлена различными рядами Фурье. При четном продолжении данной функции на второй полупериод $[0, -l)$ получается ряд по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}; \tag{9}$$

$$b_n = 0; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

а при нечетном продолжении — ряд по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}; \; a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, 3, ...;$$

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,(2n+3)}{n}.$$

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Даламбера (3). Так как общий член ряда $a_n = \dfrac{arctg\,(2n+3)}{n}$, то, заменяя в выражении n-го члена n на $n+1$, находим $a_{n+1} = \dfrac{arctg\,(2n+5)}{n+1}$. Затем ищем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при $n \to \infty$:

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n \cdot arctg\,(2n+5)}{(n+1)arctg\,(2n+3)} = 1.$$

Поскольку полученный предел равен единице, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (здесь для вычисления предела было использовано правило Лопиталя). Применим теперь признак сравнения в предельной форме. В качестве эталонного ряда выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ и в силу формулы (2) получим

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{arctg\,(2n+3)}{n \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} arctg\,(2n+3) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, исследуемый ряд является расходящимся, так как эталонный ряд с общим членом $b_n = \dfrac{1}{n}$ и расходится (гармонический ряд).

Пример 2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+3}{n^2+1}(x+2)^n$. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

Решение. Радиус сходимости находим по формуле (6):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)((n+1)^2+1)}{(n+4)(n^2+1)} = 1.$$

Интервал сходимости данного ряда определяется неравенством $|x+2| < 1$ или $-3 < x < -1$

Исследуем концы интервала сходимости. При $x = -1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(-1+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1},$$

предельного признака сравнения (эталонный пряд — гармонический).

При $x = -3$ получаем числовой знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(-3+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n^2+1},$$

который сходится по признаку Лейбница. Так как ряд, составленный из абсолютных членов данного ряда, т. е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+3}{n^2+1}$, расходится, то исследуемый ряд, сходится условно.

Таким образом, интервал сходимости исследуемого степенного ряда имеет вид $-3 \le x < 1$.

Пример 3. Вычислить $I = \int\limits_{-0,6}^{0}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд по степеням x:

$$(1+x^2)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^4 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^6 + ..., \quad |x| < 1.$$

Таж как отрезок интегрирования $[-0{,}6;\, 0]$ находится внутри интервала сходимости биномиального ряда, то ряд можно почленно интегрировать. Подставляя в интеграл вышеприведенное разложение подынтегральной функции и почленно интегрируя в указанных пределах, получаем

$$I = \int_{-0,6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_{-0,6}^{0} (1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + ...)dx =$$

$$= \left(x - \frac{1}{3\cdot 3}x^3 + \frac{2}{9\cdot 5}x^5 - \frac{14}{81\cdot 7}x^7 + ... \right)\Bigg|_{-0,6}^{0} =$$

$$= -\left(-0{,}6 + \frac{(0{,}6)^3}{9} - \frac{2\cdot(0{,}6)^5}{45} + \frac{14\cdot(0{,}6)^7}{567} - ... \right).$$

Четвертый член $14\cdot\dfrac{(0{,}6)^7}{567} \approx 0{,}0007$ меньше $0{,}001$. Поэтому согласно неравенству (4) для вычисления приближенного значения интеграла с требуемой точностью достаточно ограничиться первыми тремя членами ряда:

$$I = 0{,}6 - \frac{(0{,}6)^3}{9} + \frac{2\cdot(0{,}6)^5}{45} \approx 0{,}579.$$

Пример 4. Найти сумму ряда с комплексными членами:

$$1 + \pi i - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!}i + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5}{5!}i - ... .$$

Решение. Общий член данного ряда имеет вид

$$z_n = \frac{\pi^n}{n!}i^n = \frac{(\pi i)^n}{n!},$$

т. е. ряд, по определению, является функцией $f(z) = e^z$ при $z = \pi i$ [см. формулу (7)]. Следовательно, сумма этого ряда равна значению функции $f(z) = e^z$ в указанной точке: $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ [см. формулу (8)].

Таким образом, получаем $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\pi i)^n}{n!}=-1$.

Прамер 5. Разложить периодическую функцию $f(x)=|x-1|,\ 0\le x\le 3$ в ряд Фурье по косинусам. Построить график функции.

Решение. Данная функция определена на полупериоде $[0,3]$, т. е. $l=3$. Для разложения такой функции в ряд Фурье по косинусам ее следует продолжить на второй полупериод $[-3,0)$ четным образом (рис. 14). Для четной функции коэффициенты $b_n=0$ коэффициенты a_n вычисляются по формулам (9):

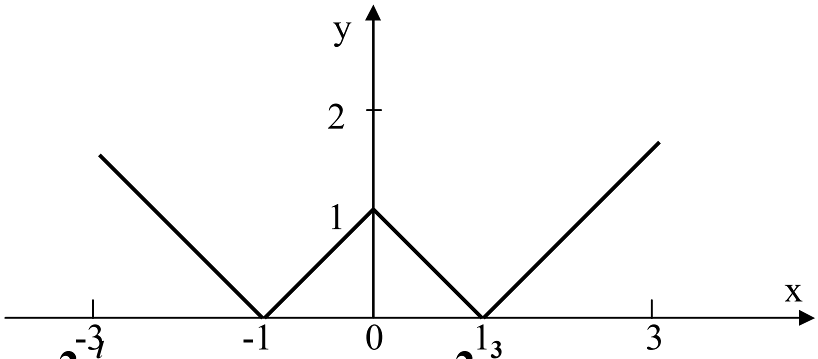


Рис. 14

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^3|x-2|\cos\frac{n\pi x}{3}dx.$$

Так как

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 \ \ при \ x\ge 1,\\ -(x-1) \ при \ x<1,\end{cases}$$

то отрезок интегрирования разобьем на два отрезка: от 0 до 1, где $f(x)=-x+1$ и от 1 до 3, где $f(x)=x-1$. Тогда

$$a_n=\frac{2}{3}\left(\int\limits_0^1(1-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int\limits_1^3(x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right).$$

При $n=0$ имеем

$$a_0=\frac{2}{3}\left(\int\limits_0^1(1-x)dx+\int\limits_1^3(x-1)dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1+\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^3\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{3}.$$

Для вычисления коэффшаиентов $a_n\ (n=1,2,...)$ применим метод интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu,$$

причем в первом интеграле примем $u=1-x,\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}$, откуда $du=-dx,\ v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}$. Во втором интеграле положим $u=x-1,$ $dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, откуда $du=dx,\ v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}$. Тогда

$$a_n=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\pi n}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^1+\frac{3}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\pi n}(x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3-\frac{3}{n\pi}\int_1^3\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{\pi^2n^2}cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{9}{\pi^2n^2}cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_1^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{\pi^2n^2}\left(-\cos\frac{n\pi x}{3}+1+\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{6}{\pi^2n^2}\left(\cos n\pi+1-2\cos\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{6}{\pi^2n^2}\left((-1)^n+1-2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

так как $\cos n\pi=(-1)^n$.

Следовательно, искомое разложение функции в ряд Фурье по косинусам имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}=$$

$$=\frac{5}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n+1-2\cos\frac{n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

Это разложение справедливо в области непрерывности данной функции.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение числового ряда.
2. Что является суммой ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
4. Назовите свойства сходящихся рядов.
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Назовите достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
7. В чем заключается признак сравнения?
8. Сформулируйте признак сходимости Даламбера.
9. В чем заключается признак Коши и интегральный признак?
10. В чем отличие знакопеременного ряда от знакочередующегося?
11. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда и условно сходящегося ряда
12. Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакопеременного ряда.
13. Понятие степенного ряда.
14. Ряд Тейлора.
15. Ряд Маклорена.

Основная литература

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные. — Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 c. — 978-5-8265-1412-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63859.html

2. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебник / А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 c. — ISBN 978-5-94211-710-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71687.html

3. Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, И. А. Волынская, О. Е. Карпухина [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 104 c. — ISBN 978-5-94211-711-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71688.html

4. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, В. В. Ивакин, М. А. Керейчук [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 102 c. — ISBN 978-5-94211-712-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71689.html

5. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля : учебник / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 213 c. — ISBN 978-5-94211-713-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71690.html

6. Высшая математика. Том 5. Теория вероятностей. Основы математической статистики. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление : учебник / А. П. Господариков, Е. Г. Булдакова, Л. И. Гончар [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 207 c. — ISBN 978-5-94211-715-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71691.html

7. Высшая математика. Том 6. Специальные функции. Основные задачи математической физики. Основы линейного программирования : учебник / Г А. П. осподариков, И. Б. Ерунова, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. :

Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 122 с. — ISBN 978-5-94211-720-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71692.html

Дополнительная литература

1. Богомолов Н.В. Математика : Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
2. Математика в примерах и задачах : Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для бакалавров. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
4. Данко П.Е. Высшая математика в примерах и задачах : В 2-х ч. — М. : ОНИКС, 2008.
5. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — URL: http://www.iprbookshop.ru/49604.html