МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Методы решения задач электроэнергетики и электротехники»

Ставрополь, 2020

Практическое занятие №1
Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Комплексным числом Z называется выражение вида $Z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x. Число x называется действительной частью комплексного числа Z и обозначается x = ReZ, а y – мнимой частью Z и обозначается y=Im Z. Запись числа Z в виде $Z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

2. Два комплексных числа $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными ($Z_1 = Z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $Z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Пример 1. При каких действительных значениях x и y выполняются равенства:

а) $x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i$;

б) $ix^2 + (3 - i)x - (1 - 2i)y = 2 + 2i$?

Решение: а) преобразуем левую часть выражения, а именно, выделим действительную и мнимую части комплексного числа:

$2x - y - x\cdot i + 2y\cdot i = 4 - 5i$

$(2x - y) + (-x + 2y)\,i = 4 + (-5)i$

Используя условие равенства двух комплексных чисел, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} + \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 3 \\ y = \dfrac{x-5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -2 \end{cases}$$

б) аналогично преобразуем левую часть:

$3x - y + ix^2 - xi + 2yi = 2 + 2i,$

$(3x - y) + (x^2 - x + 2y)i = 2 + 2i,$ откуда

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 - x + 2(3x - 2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + 5x - 6 + 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x_1 = -6; x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -20, y_2 = 1, \\ x_1 = -6, x_2 = 1. \end{cases}$$

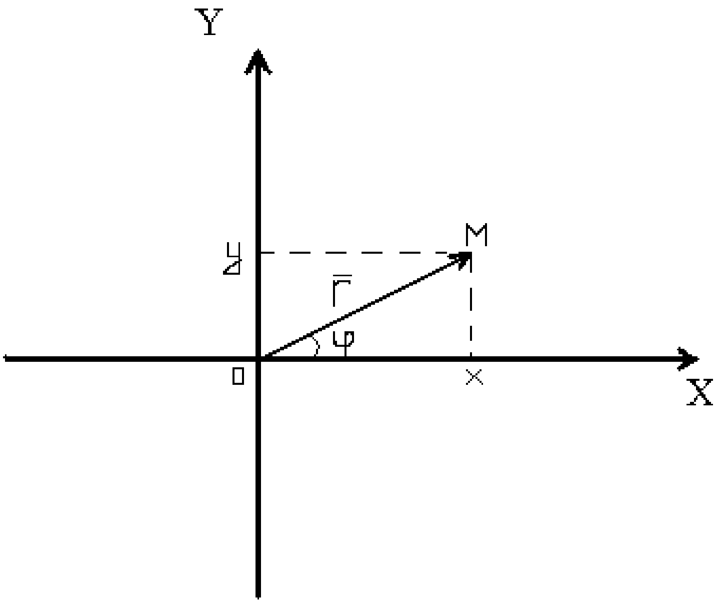
3. Два комплексных числа $Z = x + iy$ и $\bar{Z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными.**

Например: $1 + i$ и $1 - i$; $2i$ и $-2i$.

Комплексные числа, отличающиеся знаком действительной и мнимой частей, называются **противоположными.**

3. Всякое комплексное число $Z = x + iy$ можно изобразить точкой M(x;y) плоскости Oxy такой, что $x = \mathrm{Re}Z$, $y = \mathrm{Im}Z$. Ось OX называется действительной, ось OY-мнимой. И, наоборот, каждую точку M(x;y) координатной плоскости можно рассматривать как об-

раз комплексного числа Z = $x + iy$. Комплексное число Z можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y\}$.



Пример 2. Изобразите геометрически следующие комплексные числа и им сопряженные: а) 3; б) $2i$; в) $-2-3i$; г) $1 + 2i$.

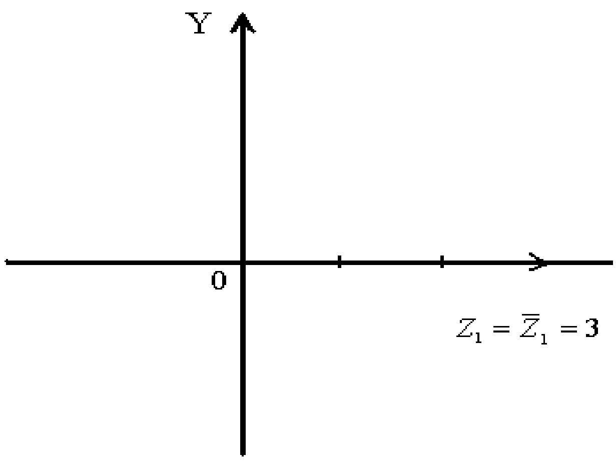
Решение:

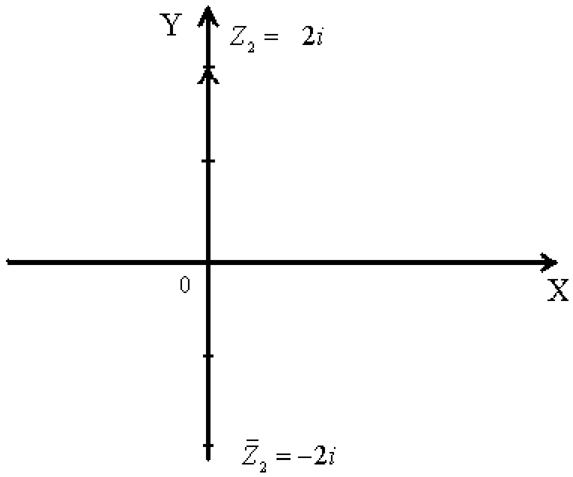
а) $Z_1 = 3 = 3 + 0i$

$\overline{Z_1} = 3 - 0i = 3$, т.е. $Z_1 = \overline{Z_1}$.

б) $Z_2 = 2i = 0 + 2i$

$\overline{Z_2} = 0 - 2i = -2i$.



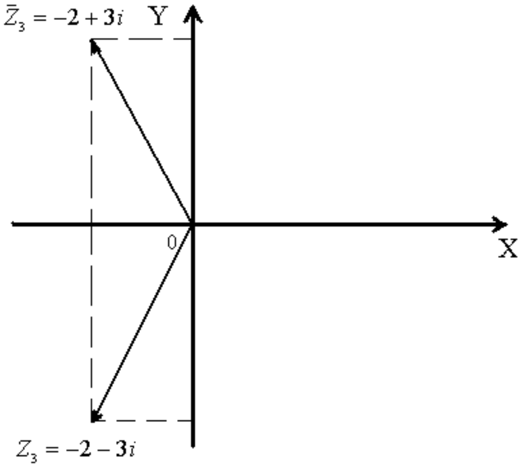


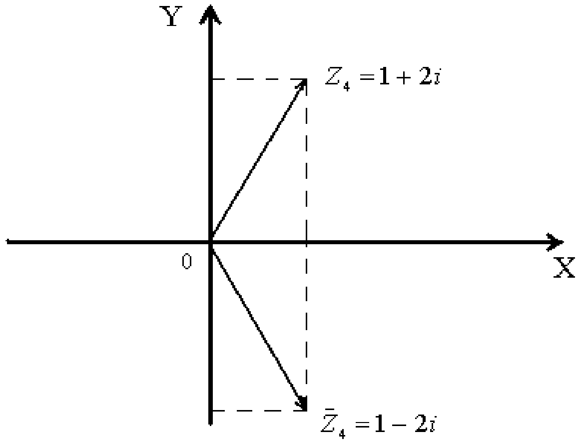
в) $Z_3 = -2 - 3i$

$\overline{Z_3} = -2 + 3i$

г) $Z_4 = 1 + 2i$

$\overline{Z_4} = 1 - 2i$





5. Длина вектора $\vec{r}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|Z|$ или r : r = $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается Arg Z или φ. Arg Z = arg Z + $2\pi\kappa$, κ- любое целое число ; arg Z – главное значение аргумента,

$-\pi <$ arg Z $\le \pi$. Аргумент φ определяется из формулы: tg $\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Так как $-\pi < \arg Z \le \pi$, то из формулы: $tg\varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg Z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & \text{Для внутренних точек I, IV четвертей} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi & \text{Для внутренних точек II четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi & \text{Для внутренних точек III четверти} \end{cases}$$

Если точка Z лежит на действительной или мнимой оси, то arg Z можно найти непосредственно.

Пример 3. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; б) –3i.

Решение:

а) $Z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $|Z_1|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$\arg Z_1=arctg\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=arctg(-1)=-arctg1=-\dfrac{\pi}{4}$ - главное значение аргумента, т.к. $-\pi<-\dfrac{\pi}{4}<\pi$.

б) $Z_2=-3i=0-3i$

$|Z_2|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

Из изображения числа Z_2 следует, что $\arg Z_2=-\dfrac{\pi}{2}$ - главное значение, т.к. $-\pi<-\dfrac{\pi}{2}<\pi$.

6. Суммой двух комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$Z=Z_1+Z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Свойства сложения комплексных чисел:

a) $Z_1+Z_2=Z_2+Z_1$

b) $(Z_1+Z_2)+Z_3=Z_1+(Z_2+Z_3)$.

7. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Если $Z_1=x_1+iy_1, Z_2=x_2+iy_2$, то

$$Z=Z_1-Z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

8. Произведением комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равен-

ством: $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Заметим, что $Z \cdot \overline{Z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + y^2$ - действительное число.

Свойства умножения комплексных чисел:

a) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$.

b) $(Z_1 \cdot Z_2)\cdot Z_3 = Z_1(Z_2 \cdot Z_3)$

c) $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$.

Например:

$(2-3i)(-5+4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$

9. Деление определяется как действие, обратное умножению. Если $Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$, то $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 4. Выполните деление $\dfrac{1+3i}{2+i}$.

Решение: $\dfrac{1+3i}{2+i} = \dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+6i+3}{4+1} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i.$

Пример 5. Выполните указанные действия:

а) (2 – 3i) – (i – 2);

б) (2 – i) (i + 1) – (1,5i + 1) 4i;

в) $\dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{i}{2-i}$;

г) $\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{1-i}{1+2i}(2-i)$;

д) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$.

Решение:

а) $(2-3i)-(i-2)= 2-3i-i+2=4-4i;$

$$б)\quad (2-i)\cdot(i+1)-(1{,}5i+1)\cdot 4i=2i-i^2+2-i-6i^2-4i=$$
$$=2i+1+2-i+6-4i=9-3i;$$

$$в)\quad \frac{1}{1+2i}+\frac{i}{2-i}=\frac{2-i+i(1+2i)}{(1+2i)(2-i)}=\frac{2-i+i+2i^2}{(1+2i)(2-i)}=\frac{2-i+i-2}{(1+2i)(2-i)}=$$
$$=\frac{0}{(1+2i)(2-i)}=0;$$

$$г)\quad \frac{2}{1+i}-\frac{1-i}{1+2i}\cdot(2-i)=\frac{2}{1+i}-\frac{2-2i-i+i^2}{1+2i}=\frac{2}{1+i}-\frac{2-2i-i-1}{1+2i}=$$
$$=\frac{2}{1+i}-\frac{1-3i}{1+2i}=\frac{2(1+2i)-(1-3i)(1+i)}{(1+i)(1+2i)}=\frac{2+4i-(1-3i+i-3i^2)}{1+i+2i+2i^2}=$$
$$=\frac{2+4i-1+3i-i-3}{1+i+2i-2}=\frac{-2+6i}{-1+3i}=\frac{2(-1+3i)}{(-1+3i)}=2;$$

$$д)\quad (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot i\sqrt{2}+(i\sqrt{2})^2=2+2\cdot 2i+i^2\cdot 2=2+4i-2=4i$$

Пример 6. Определите полное сопротивление цепи $Z=\dfrac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}$, если известно $Z_1=(6+8i)$ Ом; $Z_2=8i$ Ом.

Решение:

$$Z=\frac{(6+8i)\cdot 8i}{6+8i+8i}=\frac{48i+64i^2}{6+16i}=\frac{-64+48i}{6+16i}=\frac{-32+24i}{3+8i}=$$
$$=\frac{(-32+24i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)}=\frac{-96+72i+256i-192i^2}{9+64}=$$
$$=\frac{-96+328i+192}{73}=\frac{96+328i}{73}\approx(1{,}32+4{,}5i)\,Ом\ .$$

Пример 7. Постройте на плоскости комплексного переменного линии, заданные уравнениями:

а) $|Z-2i|=3;$

б) $\mathrm{Re}\left(Z^2\right)=1;$

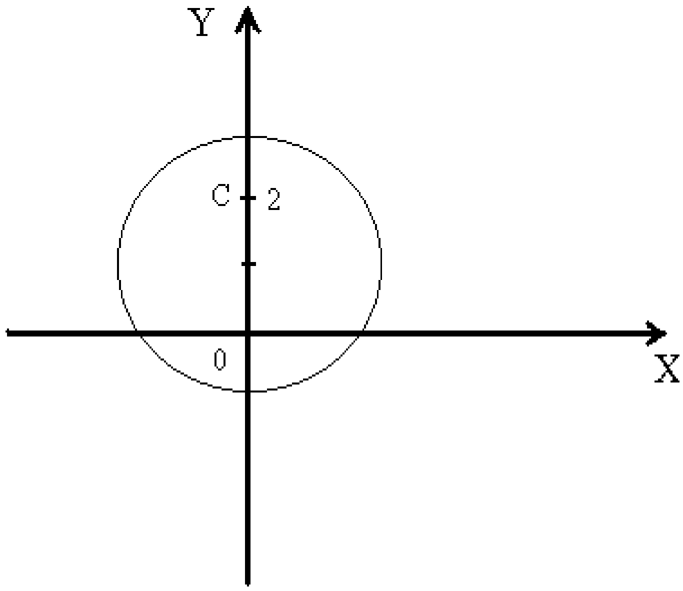
в) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $2\operatorname{Re} Z - (JmZ)^2 = 1$.

Решение: а) $|Z - 2i| = 3$.

Т.к. Z = x + iy, то Z – 2i = x + iy – 2i = x + i(y – 2).

Найдем $|Z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$. По условию $|Z - 2i| = 3$, т.е. $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3$, $x^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Это уравнение задает окружность с центром в т. С (0;2), радиуса 3.



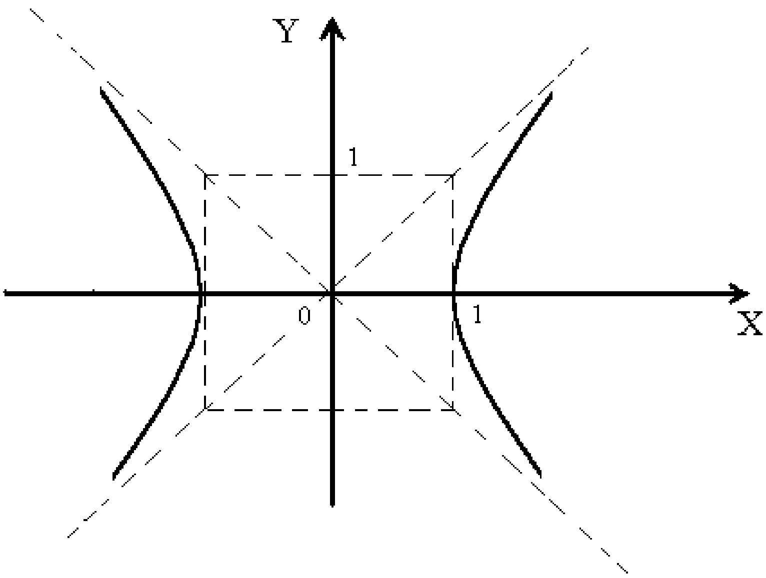
б) $\operatorname{Re}(Z^2) = 1$.

Т.к. Z = $x + iy$, то

$Z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$

$\operatorname{Re}(Z^2) = x^2 - y^2.$

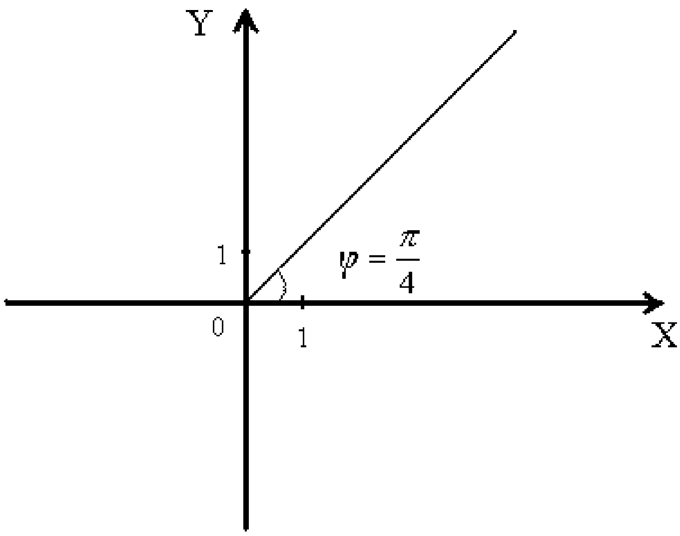
По условию $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение равнобочной гиперболы. Вершина находится в начале координат, полуоси: а = в = 1.



в) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = arctg\dfrac{y}{x}$, то $arctg\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{y}{x} = 1, y = x$. Это уравнение прямой (биссектриса I и III координатных четвертей).

Рассматриваем точки прямой y = x, лежащие только в I четверти.

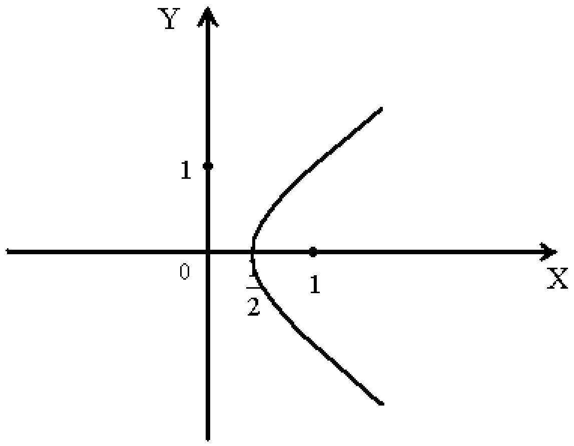


г) $2\operatorname{Re}Z - (JmZ)^2 = 1$.

Т.к. Z=x+iy, то ReZ=x, ImZ=y, тогда

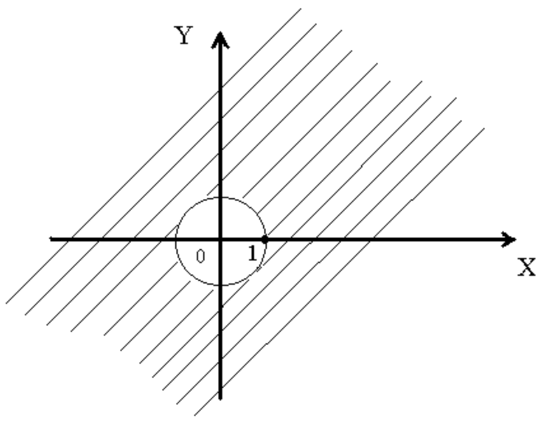
$$2x - y^2 = 1, \qquad 2x = y^2 + 1, \qquad x = \frac{y^2+1}{2}.$$

Это уравнение параболы, вершина в точке с координатами $\left(\frac{1}{2};0\right)$, ось OX – ось симметрии.



Пример 8. Изобразите области, заданные условиями:а) $|Z| \geq 1$; б) $|Z+2-i| \lhd 3$; в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$; г) $1 \leq |z-1+i|^2 \leq 4$; д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2, \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ Решение:

а) $|Z| \geq 1$.Т.к. Z = x + iy, $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то



$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1$.

б) $|Z+2-i| < 3$;

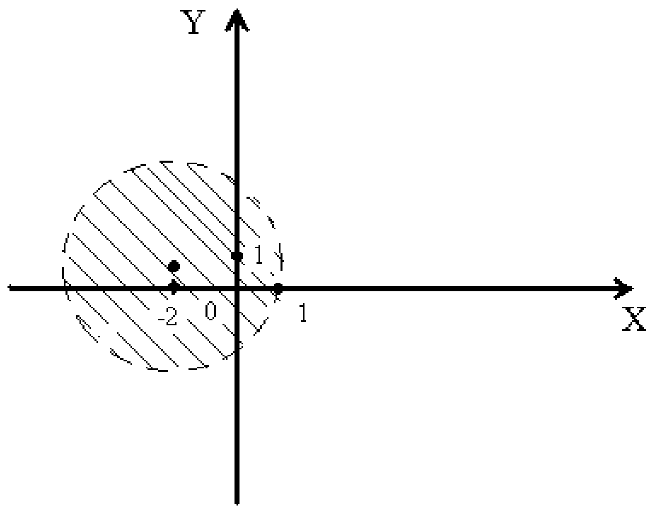
Т.к. Z = x + iy, то $Z+2-i = x+iy+2-i = (x+2)+(y-1)i$

Найдем $\left|Z+2-i\right| = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}.$

По условию $\left|Z+2-i\right| < 3,$ т.е.

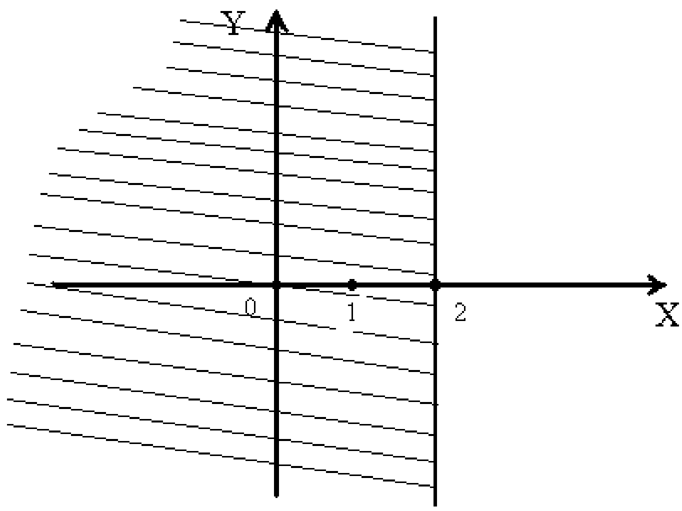
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} < 3$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2 < 9.$$



в) $\operatorname{Re} Z \le 2.$

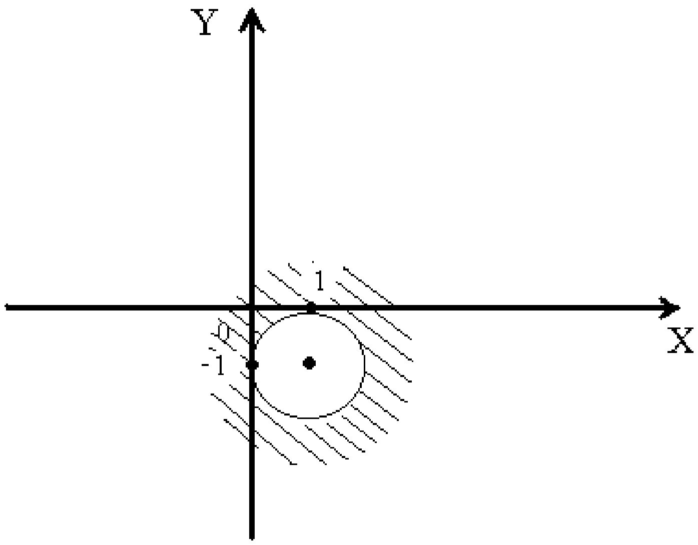
Т.к. Z = x + iy, Re Z =x, то $x \le 2$.



г) $1 \le \left|Z-1+i\right|^2 \le 4.$

Т.к. Z = x + iy, Z – 1 + i = x + iy – 1 + i = (x – 1) + (y + 1) i,

$|Z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}, |Z-1+i|^2=(x-1)^2+(y+1)^2,$ то $1\le(x-1)^2+(y+1)^2\le 4.$



д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \le 2 \\ 0 \le \arg Z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

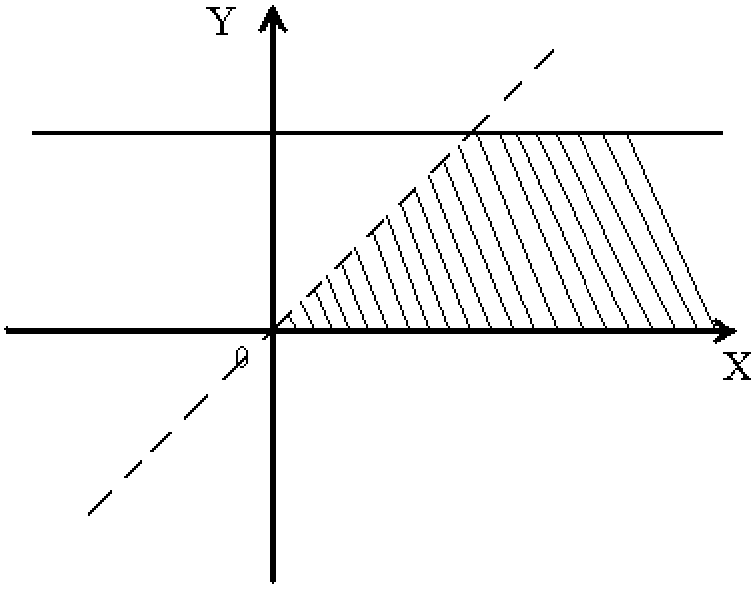
$JmZ \le 2.$

Т.к. Z = $x + iy$, ImZ = y, то $y \le 2$, $0\le \arg Z < \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = arctg\dfrac{y}{x}$, то $0 \le arctg\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{4}$; $tg0 \le \dfrac{y}{x} < tg\dfrac{\pi}{4}$

$0\le\dfrac{y}{x}<1$; $0\le y<x.$

Т.о., $\begin{cases} y\le 2 \\ 0\le y < x \end{cases}$



Решите задачи

1.1. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

2; -i; -2; 3 – 2i; 1 + 2i; - 1 – i.

1.2. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

1) $Z_1 = 4 + 5i; Z_2 = 3 - 2i.$

2) $Z_1 = 0{,}5 - 3{,}2i; Z_2 = 1{,}5 - 0{,}8i.$

3) $Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i; Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$

б) Найдите разность и частное комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

1) $Z_1 = 3 + 4i;\ \ Z_2 = 0{,}4 - 0{,}2i.$

2) $Z_1 = 1 - 2i;\ \ Z_2 = 0{,}6.$

3) $Z_1 = \sqrt{5} - i;\ \ Z_2 = \sqrt{5} - 2i.$

1.3. Найдите мнимую часть Z, если:

1) $Z = (2 - i)^3 \cdot (2 + 11i).$

2) $Z = \dfrac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6.$

3) $Z = \dfrac{5 + 2i}{2 - 5i} - \dfrac{3 - 4i}{4 + 3i} - \dfrac{1}{i}.$

1.4. Выполните действия:

1) $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}.$

2) $2i \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i).$

3) $\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}.$

4) $\dfrac{13 + 12i}{6i - 8} + \dfrac{(1 + 2i)^2}{2 + i}.$

5) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}.$

6) $(7 + i) \cdot (2 - i) - (3 + 5i) \cdot (-i).$

7) $i(3 - i) - (2 + 3i) \cdot (1 - i).$

8) $\dfrac{3}{i} + \dfrac{5 - i}{2} - \dfrac{10 + i}{1 + i.}$

1.6. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа:

а) $Z_1 = 2i\,(x + 2yi) + 3x$ и $Z_2 = 1 - 2i$;

б) $Z_2 = y^2 - 7y + 9xi$ и $Z_2 = -12 + 20i + x^2 i$

равны.

1.7. Найдите модуль комплексного числа Z:

1) Z = -4;

2) Z = -*i;*

3) $Z = -5 - 2\sqrt{6}\,i$;

4) $Z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$;

5) $Z = \dfrac{2-i}{1+i}$.

1.8. В плоскости комплексного переменного начертите линии, заданные уравнениями:

1) $|Z + 1| = 1$;

2) $|Z - 2| + |Z + 2| = 26$;

3) $|Z - 2|^2 + |Z + 2|^2 = 26$;

4) $|Z|^2 + 3Z + 3Z = 0$;

5) $|2i - Z|^2 = 1$;

6) $\mathrm{Im}Z^2 = 4$;

7) $\arg Z = \dfrac{3\pi}{4}$;

8) $(\mathrm{Im}Z)^2 = 4 - \mathrm{Re}\,Z$.

1.9. Изобразите области, заданные условиями:

1) $|Z + 2i - 1| \le 2$;

2) $|Z - i| < |Z + i|$;

3) $\lg|Z - 10i| < 2$;

4) $1 \le \mathrm{Re}\,Z \le 4$;

5) $|Z + i| \le 1$;

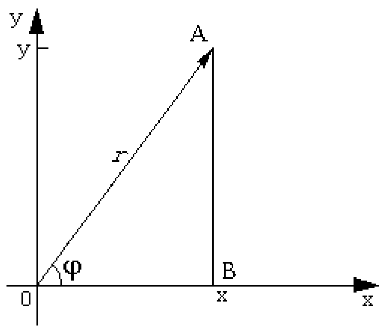
6) $\dfrac{\pi}{6} < \arg Z < \dfrac{\pi}{4}$;

7) $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg Z \le \dfrac{\pi}{2}$;

8) $\begin{cases} 1 < \mathrm{Re}\,Z < 2 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg Z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

Практическое занятие № 2.
Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Показательная функция комплексного переменного

1. Рассмотрим комплексное число Z в алгебраической форме: $z = x + iy$. Изобразим это число на комплексной плоскости в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \{x, y\}$.Рассмотрим ΔAOB, где $B(x,0)$.



Пусть r - модуль комплексного числа z; φ-один из его аргументов (любой). Тогда из ΔAOB следует, что $x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi$. Откуда число z запишется в виде: $z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi$. Представление числа z в виде: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа z.

Пример 1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = -1 - i, z_2 = -2, z_3 = i, z_4 = -3 + 4i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, а $\varphi_1 = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi = \mathrm{arctg}\dfrac{-1}{-1} - \pi = \mathrm{arctg}1 - \pi = \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$, то $z_1 = \sqrt{2}(\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{3\pi}{4}))$.

Так как $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, а $\varphi_2 = \pi$ (по изображению числа на плоскости), то $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$. Учитывая, что $|z_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, а $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$ - один из аргументов z_3, получаем $|z_3| = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

В связи с тем что $|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, а

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg}\frac{4}{-3} + \pi \approx 2{,}21424\,рад \approx 126^o 52',$$

получаем $z_4 = 5(\cos(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}) + i\sin(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}))$

или $\qquad z_4 = 5(\cos 126^o 52' + i\sin 126^o 52'))$.

Пример 2. Записать числа в тригонометрической форме

$$z_1 = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4}, z_2 = -\cos\frac{\pi}{17} - i\sin\frac{\pi}{17}$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos\dfrac{7\pi}{4} = \cos(-\dfrac{\pi}{4})$, а $-\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin(-\dfrac{\pi}{4})$, тогда получим тригонометрическую форму для z_1: $\quad z_1 = 2(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4})$. Аналогично учитывая, что

$$-\cos\frac{\pi}{17} = \cos(\pi - \frac{\pi}{17}) = \cos\frac{16\pi}{17}, \sin\frac{\pi}{17} = \sin(\pi - \frac{\pi}{17}) = \sin\frac{16\pi}{17},$$

получаем $z_2 = \cos\dfrac{16\pi}{17} - i\sin\dfrac{16\pi}{17}$.

2. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$, $\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)$,

то-

гда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_1(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Пример 3. Найти произведение чисел

$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$ и $z_2 = \sqrt{8}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{16} = 4$.

Аргументом произведения $z_1 \cdot z_2$ будет сумма $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}$.

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 4\cos(\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8})$ или $z_1 \cdot z_2 = 4\cos(\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8})$.

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = \frac{(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \cdot (\sqrt{3} + i)}{i - 1}$.

Решение. Число $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, и аргумент $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$; число $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

а аргумент $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi$.

Следовательно, $z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{11\pi}{12}) + i\sin(-\frac{11\pi}{12}))$.

3. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$ (**формула Муавра**), где $n \in \mathrm{N}$.

Пример 5. Вычислить. $(\sqrt{3}-i)^9$.

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, откуда по формуле Муавра имеем

$$(\sqrt{3}-i)^9 = 2^9(\cos 9(-\frac{\pi}{6}) + i\sin 9(-\frac{\pi}{6})) = 512(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}) = 512i.$$

4.**Корнем n-ой степени** из комплексного числа Z называется такое комплексное число W (обозначается $\sqrt[n]{Z}$), если $W^n = Z$.

Все значения корня n-ой степени из $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ содержатся в формуле $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + \pi k}{n}\right)$ (1), где k=0,1,2,…,n-1.

Пример 6.Найти все значения:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3}-i}$.

Решение: а) запишем число Z=-16 в тригонометрической форме $Z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Согласно формуле (1) получаем

$$W_k = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) = i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right)$$, где k=0,1,2,3.

Следовательно,

$$W_0 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\cdot$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right),\ \text{где}\ k=0,1,2.$$

Получаем

$$W_0 = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

в) Пусть $Z = \sqrt{3} - i$, тогда $|Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1) = 2}$,

$$\varphi = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Поформуле (1) имеем

$$W_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2}\right)\right),\ \text{где}\ k=0,1.$$

$$W_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}i,$$

$$W_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}i.$$

Пример7. Записать число $\dfrac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$ в алгебраической форме при условии, что действительные части корней $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5+12i}$ отрицательны.

Решение. Для извлечения квадратного корня из числа $5+12i$ положили $\sqrt{5+12i}=x+iy$, тогда $5+12i=x^2+2xyi-y^2$ и, следовательно, x и y удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

Решив эту систему, получим два решения $(3;2)$ и $(-3;-2)$. По условию действительная часть отрицательна, поэтому $\sqrt{5+12i}=-3-2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i}=-3+2i$. Таким образом, $Z=\dfrac{-3-2i-(-3+2i)}{-3-2i+(-3+2i)}=\dfrac{2}{3}i$.

5. Пусть $z=x+iy$. Если x и y действительные переменные, то z называется **комплексной переменной.**

Если каждому значению комплексной переменной z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w, то w есть функция комплексной переменной z. Функции комплексного аргумента обозначают w=f(z) или w=w(z)

В качестве примера рассмотрим одну функцию комплексной переменной - показательную функцию $w = e^z$, или $w = e^{x+iy}$.

Комплексные значения функции w определяются так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2)$$

Свойства показательной функции:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

3. $(e^z)^m = e^{mz}$ где m – целое число

4. $e^{z+2\pi i} = e^z$

Если в формуле (2) положим x=0, то получим $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Это есть **формула Эйлера**. С ее помощью можно от тригонометрической записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ перейти к показательной форме $z = re^{i\varphi}$ где r - модуль числа z, а φ- его аргумент.

а) Если $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$,

то $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, (3)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (4)$$

б) Если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^n e^{in\varphi}$ (5)

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi K}{n})i}$, где к=0,1,2,3,4,5...,n-1.

Пример 8. Представить в показательной форме комплексное число $z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$.

Решение. Находим модуль числа $|z|=\sqrt{\frac{3}{64}+\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$ и один из его аргументов $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$., откуда, $z=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Пример 9. Записать в показательной форме комплексное число

$$z=\frac{(-\sqrt{3}+i)(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})}{1-i}.$$

Решение: каждое из чисел $-\sqrt{3}+i,\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12},i-1$ представим в показательной форме

$$-\sqrt{3}+i=2e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})=e^{-\frac{\pi}{12}i}.$$

Используя формулы (3), (4) получаем

$$z=\frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i}e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Пример 10. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

Решение: $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi(12K+1)i}{24}}$ (к=0,1,2,3).

Решите задачи

2.1. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $Z=-\sqrt{3}+i$,

2) $Z=-1$,

3) $Z=-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$,

4) $Z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\frac{10\pi}{9}$,

5) $Z=\operatorname{tg}1-i$.

2.2. Записать комплексное число

в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $Z=\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$,

2) $Z=\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$,

3) $Z=\dfrac{1}{(1+i)^2}$,

4) $Z=\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}$,

5) $Z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$.

2.3. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z:

1) $Z = \dfrac{5\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)i}{3\left(\cos 40^0 - i\sin 40^0\right)}$,

2) $Z = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{5} + i\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

2.4 . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

1) $Z = \left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$,

2) $Z = \left(\cos 31^0 + i\sin 31^0\right)^{-10}$,

3) $Z = -\dfrac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^6}$,

4) $Z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

2.5. Записать комплексное число Z в тригонометрической форме:

1) $Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{100}$,

2) $Z = \left(\dfrac{\sqrt{3}i + 1}{i-1}\right)^6$,

3) $Z = \dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n \in N$,

4) $Z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4$,

5) $Z\left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

2.6. Найти значения $\sqrt[n]{Z}$ если:

1) $Z = -1, n = 3$,

2) $Z = 8i, n = 3$,

3) $Z = 1, n = 5$,

4) $Z = 1 + i, n = 8$.

2.7 . Решить уравнения:

1) $Z^3 = 1 + i$,

2) $Z^4 + 1 = 0$,

3) $Z^5 = 1 + \sqrt{3}i$,

4) $Z^6 + 64 = 0$,

5) $Z^2 = \overline{Z}^3$.

2.8 . Представить Z в алгебраической форме:

1) $Z = e^{2-i}$,

2) $Z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i}$,

3) $Z = e^{3i + 7 + 3\pi i - \frac{\pi}{2} i}$.

2.9. Представить в показательной форме комплексное числа:

1) $Z = -\sqrt{12} - 2i$,

2) $Z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

2.10. Записать в показательной и алгебраической формах комплексное число:

1) $Z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$,

2) $Z = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{-3}$,

3) $Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$,

4) $Z=\dfrac{1}{\left(\cos 12^0+i\sin 12^0\right)^5}$,

5) $Z=\dfrac{e^{-\frac{\pi i}{3}}\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}{i}$.

2.11. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{Z}$:

1) $Z=1, n=3$,

2) $Z=-1, n=5$,

3) $Z=-4+\sqrt{48}i, n=3$,

4) $Z=-1-\sqrt{3}i, n=4$.

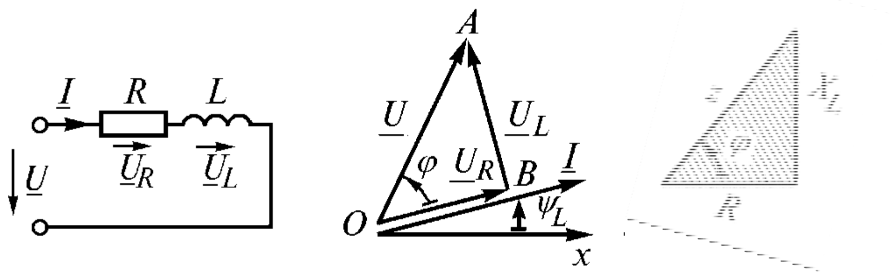
Практическое занятие №3
«Символический метод расчета цепей электрических цепей синусоидального тока».

<u>Цель занятия</u>: объяснение символического метода расчета электрических цепей синусоидального тока; рассмотрение электрических цепей с сосредоточенными элементами (R, L, C) и представление расчета таких цепей.

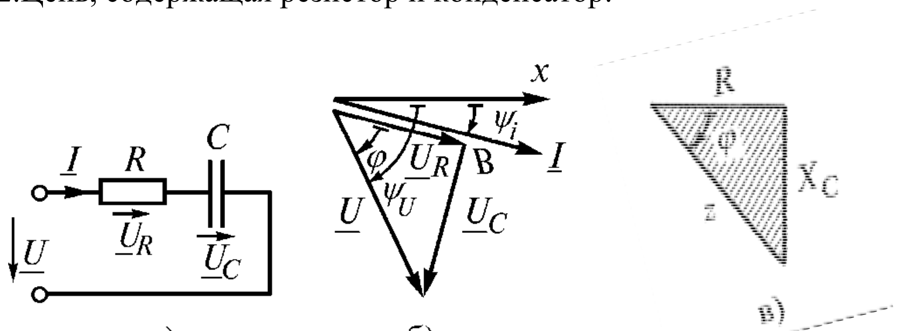
Методика проведения занятия:

Необходимы теоретические сведения

1. Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку:

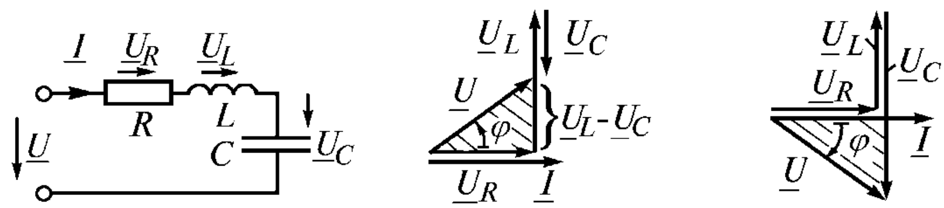


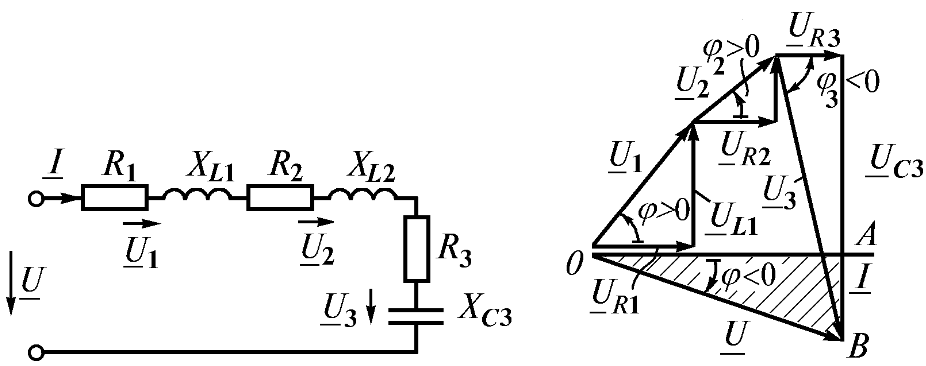
2.Цепь, содержащая резистор и конденсатор:



а) б)

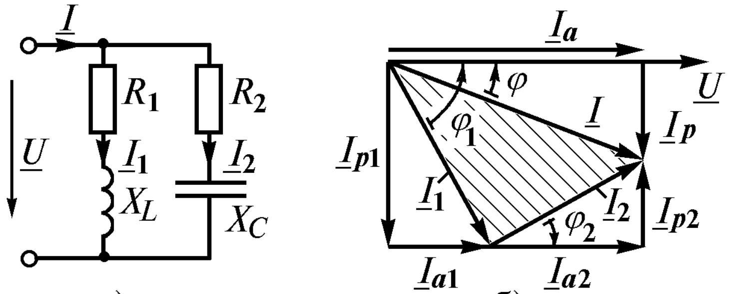
3.Цепь, содержащая последовательное соединение резистора, катушки и конденсатора:





а) б)

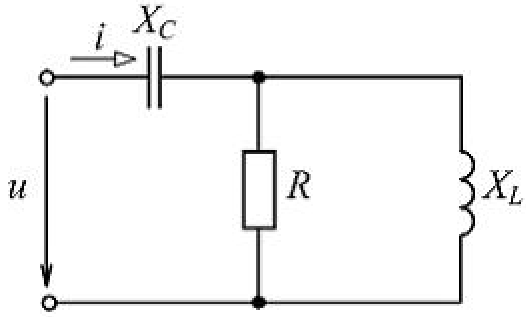
4. Цепь, содержащая параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора:



а) б)

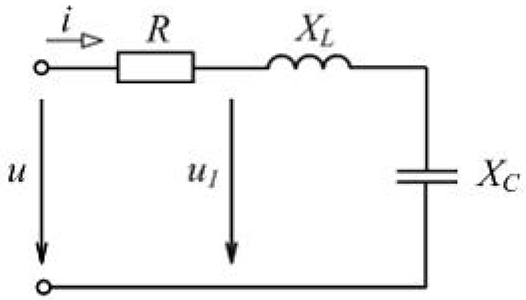
Примеры решения задач:

1. **Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями**



При $R = X_L = X_C = 20$ *Ом* комплексное входное сопротивление цепи (см. рис.) $\underline{Z}_{вх}$ равно ___ *Ом*, напряжение u __________ по фазе от тока *i* на угол …

2. **Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями**



При $u = 282{,}8 \sin \omega t$ *В*, $R = 6$ *Ом*, $X_L = 10$ *Ом*, $X_C = 2$ *Ом* действующее значение напряжения U_1 в цепи, показанной на рисунке, равно ___ *В*. Построить векторную диаграмму.

Практическое занятие №4

Аудиторная контрольная 1

Аудиторная контрольная работа по теме «Комплексные числа».

Практическое занятие №5
Разложение аналитической функции в ряд Фурье

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,2...), \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,2...). \tag{3}$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ вычисляется:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках неразрывности $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}[f\,x_0 - 0] + f(x_0 + 0)$, где x_0 - точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;

3) $S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$ на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$.

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{4}$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,2...). \tag{5}$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,dx, \tag{6}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{7}$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π. В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом 2ℓ, для которой выполняются на сегменте $[-\ell, \ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \tag{8}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{9}$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{10}$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{11}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\,. \tag{12}$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{13}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{14}$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную на интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

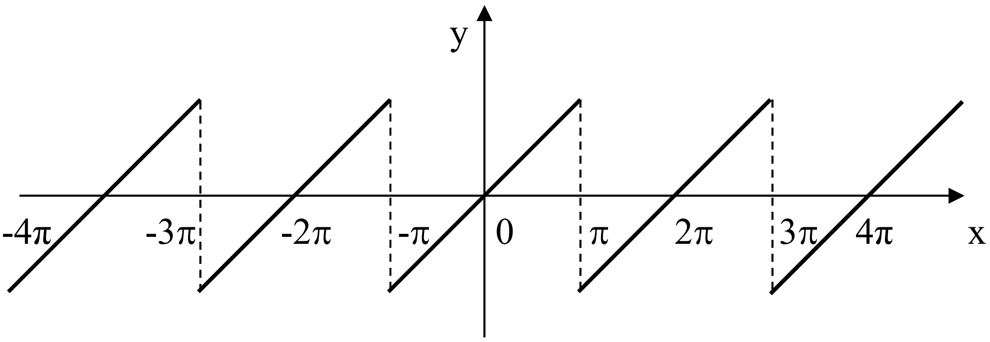


Рис. 1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты Фурье $\left(\text{интегрируем по частям} \left\| \begin{matrix} x = u, & \sin nx\,dx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right\| \right)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\left. \frac{-x\cos nx}{n} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx}_{=0} \right] = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

т.к. $-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + ... \right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-n\pi$ и $n\pi$ сумма ряда равна нулю. На рис. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

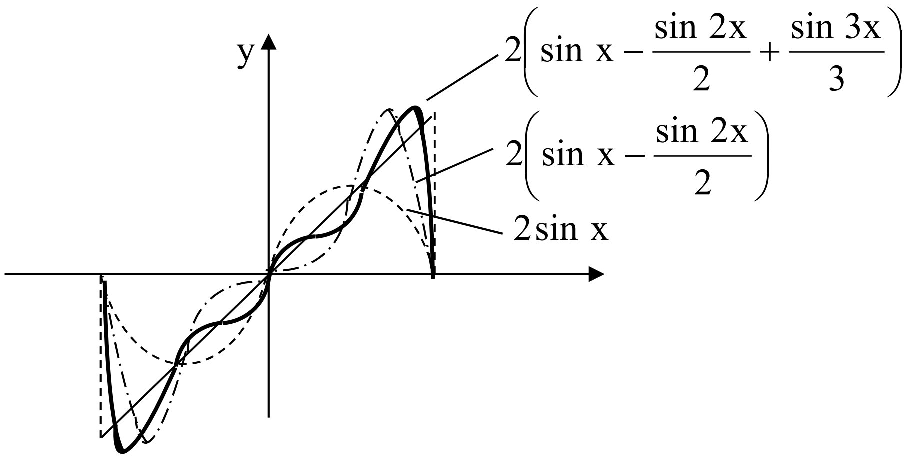


Рис. 2

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0;\quad a<x\le\pi\\ 1, & 0<x<a\\ \frac{1}{2}, & x=0,\ x=a\end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

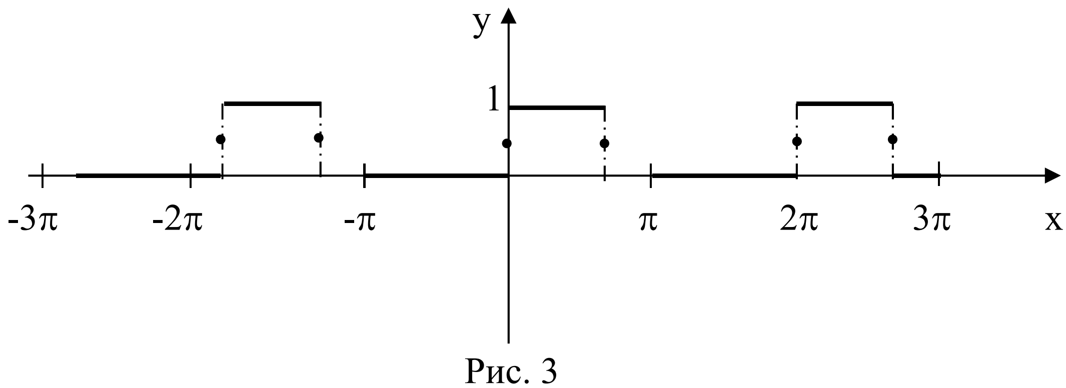


Рис. 3

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a dx=\frac{x}{\pi}\bigg|_0^a=\frac{a}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\bigg|_0^a=\frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^a f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot \sin\, nx\; dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\cos\, nx\right)\Big|_0^a = \frac{\cos\, nx}{\pi n}\Big|_0^a = \frac{1-\cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n\pi}\cdot\cos nx + \frac{1-\cos na}{n\pi}\cdot\sin na\,.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале $(0;4)$ формулой $f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$

Построим график функции (рис. 4).

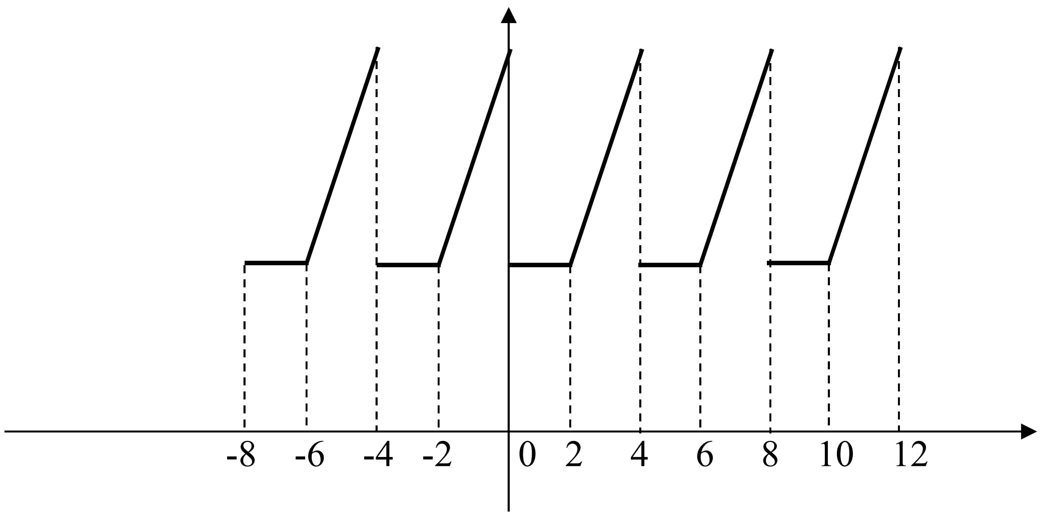


Рис. 4

Решение. Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x = 2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_2^4 3x\,\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + 3\left(\frac{2\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right] = \frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right), \quad n \neq 0\,.$$

При a – четном $\cos\, n\pi = 1$ и $x_n = 0$, при n – нечетном $\cos\, n\pi = -1$ и $a_n = \dfrac{12}{n^2\pi^2}$.

При n=0

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cdot 12\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_2^0+\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Big|_2^4+\underbrace{\int_2^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}dx}_{=0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12(1-\cos n\pi)-3(2\cdot 4\cos 2\pi n-4\cos \pi n)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12-\cancel{12\cos n\pi}+24+\cancel{12\cos n\pi}\right]=\frac{-12}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0,2)$ сумма ряда $S(x)=6$, в интервале $(2,4)$ - $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(2-0)+f(2+0)\right]=6.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T=2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x)=|\,x\,|$ (рис. 5).

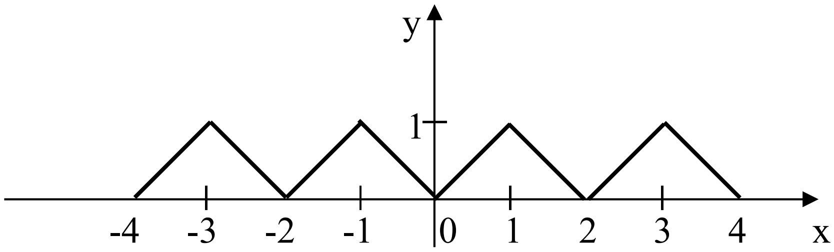


Рис. 5

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell=1$, получим $a_0=2\int\limits_0^1 x\,dx=2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=1$,

$$a_n=2\int\limits_0^1 x\cos n\pi x\,dx=2\left.\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n-\text{четные},\\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n-\text{нечетное.}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x)=\begin{cases}-2x & \text{при} \quad -\pi\le x<0,\\ 3x & \text{при} \quad 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{10}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{12}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$

$$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right).$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[0,2\pi]$ формулой $f(x)=\dfrac{x}{2}$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $y = |\sin x|$.

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{\cos 2kx}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \ldots\right]$.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

Ответ: $f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ 2 - x & \text{при} \quad 1 \le x \le 2, \end{cases} \qquad f(x+2)=f(x).$$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -3 < x \le 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x < 3, \end{cases} \qquad f(x+6)=f(x).$$

Ответ: $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3} - \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$, $f(x+10) = f(x)$.

Ответ: $f(x) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$.

Практическое занятие №6

Аудиторная контрольная 2

Аудиторная контрольная работа по теме «Ряды Фурье. Интеграл Фурье».

Практическое занятие №7

Использование комплексных чисел и рядов Фурье к расчету электрических цепей несинусоидального тока.

Цель: закрепить навыки использования комплексных чисел и рядов Фурье для анализа электрических цепей.

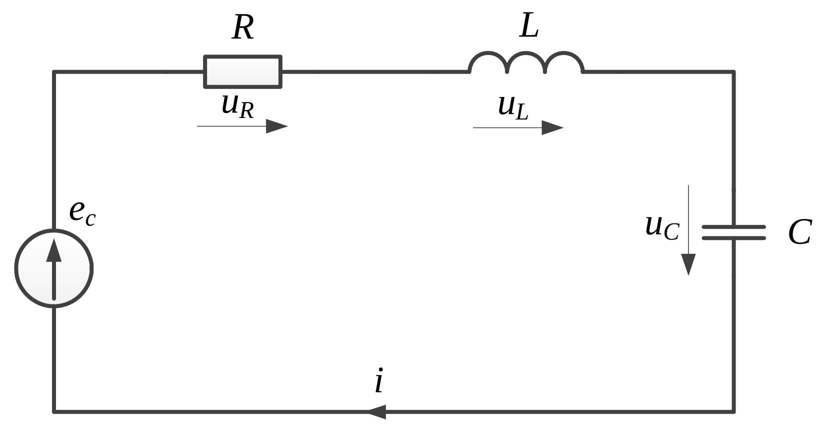
Задание: используя разложение в ряд Фурье сигналов (треугольного и однополупериодного выпрямления), рассчитать электрическую цепь, состоящую из последовательного соединения источника несинусоидального напряжения, резистивного, емкостного и индуктивного элемента. При разложении в ряд Фурье ограничиться 7 первыми гармониками, построить временные зависимости тока, протекающего в электрической цепи, напряжений на резистивного, емкостного и индуктивного элементах.

Указания: параметры элементов L = 100 мГн; C = 100 мкФ; R = 30 Ом.

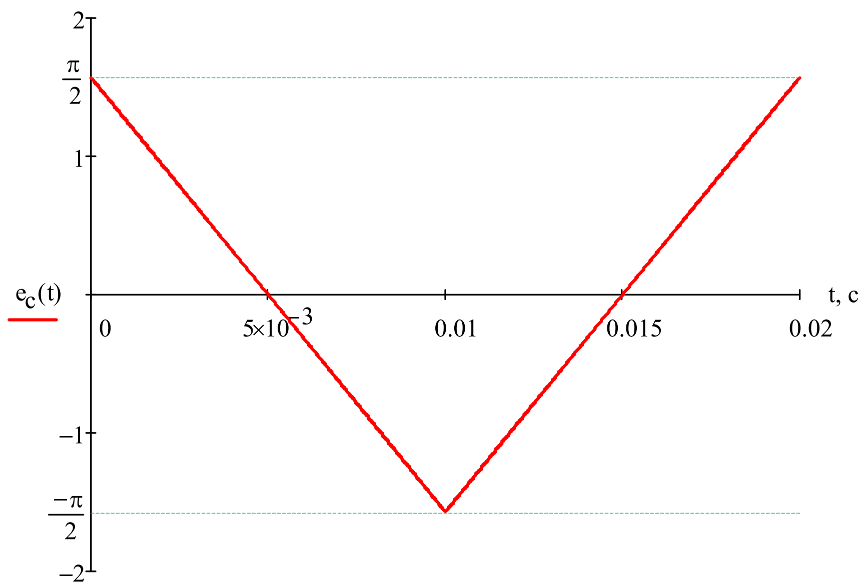
Частота основной (первой) гармоники 50 Гц.

Для расчета необходимо перейти от мгновенного значения каждой гармоники к комплексу ее действующего значения, рассчитать комплексное сопротивление элементов, произвести расчет для данной гармоники, произвести переход от комплекса действующего значения к мгновенному.

Схема цепи



Форма воздействующего напряжения



Частота воздействующего напряжения

$f = 50\text{Гц} \quad \omega = 2\pi f = 314.159 \cdot \text{рад/с}$

Разложение в ряд Фурье (пример 5 из ПЗ № 6 с заменой cosφ на sin(φ+π/2))

$$e_c(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{100} \frac{\sin\left[(2k+1)\cdot\omega\cdot t + \frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)^2}$$

Мгновенные значения первых гармоник

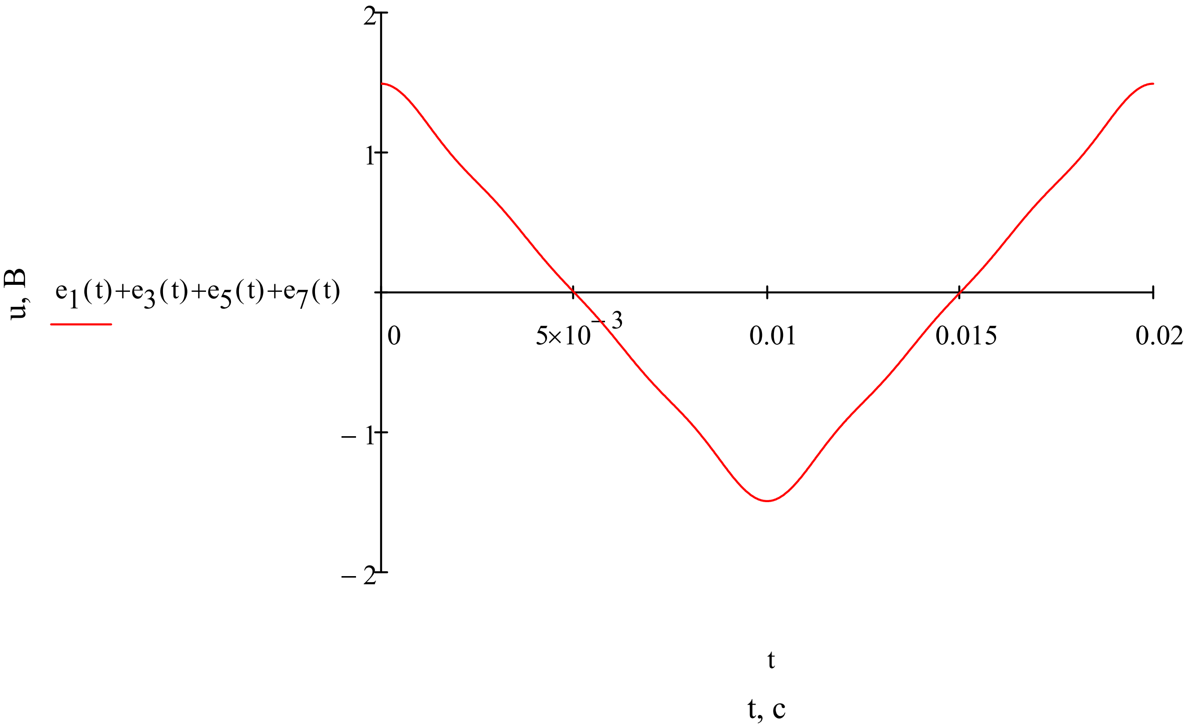
$$e_1(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{В}$$

$$e_3(t) = \frac{4}{9\pi} \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{В}$$

$$e_5(t) = \frac{4}{25\pi} \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{В}$$

$$e_7(t) = \frac{4}{49\pi} \cdot \sin\left(700\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{В}$$

Исходный сигнал



Комплексы действующих значений первых гармоник

$$\underline{E_1} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.9j\cdot B$$

$$\underline{E_3} = \frac{4}{9\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.1j\cdot B$$

$$\underline{E_5} = \frac{4}{25\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.036j\cdot B$$

$$\underline{E_7} = \frac{4}{49\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.018j\cdot B$$

Параметры элементов

$C = 100\cdot 10^{-6}\Phi \qquad L = 100\cdot 10^{-3}\text{Гн} \qquad R = 30\text{Ом}$

Сопротивления для гармоник, нулевая (постоянная составляющая) отстутствует

$$\underline{X_{C1}} = \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C} = -31.831j\cdot\text{Ом}$$

$$\underline{X_{L1}} = j\cdot\omega\cdot L = 31.416j\cdot\text{Ом}$$

$$\underline{Z_1} = R + \underline{X_{C1}} + \underline{X_{L1}} = (30 - 0.415j)\cdot\text{Ом}$$

$$\underline{X_{C3}} = \frac{\underline{X_{C1}}}{3} = -10.61j\cdot\text{Ом}$$

$$\underline{X_{L3}} = \underline{X_{L1}}\cdot 3 = 94.248j\cdot\text{Ом}$$

$\underline{Z_3} = R + \underline{X_{C3}} + \underline{X_{L3}} = (30 + 83.637j)\cdot Ом$

$\underline{X_{C5}} = \dfrac{\underline{X_{C1}}}{5} = -6.366j\cdot Ом$

$\underline{X_{L5}} = \underline{X_{L1}}\cdot 5 = 157.08j\cdot Ом$

$\underline{Z_5} = R + \underline{X_{C5}} + \underline{X_{L5}} = (30 + 150.713j)\cdot Ом$

$\underline{X_{C7}} = \dfrac{\underline{X_{C1}}}{7} = -4.547j\cdot Ом$

$\underline{X_{L7}} = \underline{X_{L1}}\cdot 7 = 219.911j\cdot Ом$

$\underline{Z_7} = R + \underline{X_{C7}} + \underline{X_{L7}} = (30 + 215.364j)\cdot Ом$

Расчет для первой гармоники

$\underline{I_1} = \dfrac{\underline{E_1}}{\underline{Z_1}} = \left(-4.151\times 10^{-4} + 0.03j\right)\cdot A$

$\left|\underline{I_1}\right| = 0.03\cdot A \qquad \psi 1 = \arg\left(\underline{I_1}\right) = 1.585 = 90.814\cdot °$

$\underline{U_{R1}} = \underline{I_1}\cdot R = (-0.012 + 0.9j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{R1}}\right| = 0.9\cdot B \qquad \psi_{R1} = \arg\left(\underline{U_{R1}}\right) = 1.585 = 90.814\cdot °$

$\underline{U_{L1}} = \underline{I_1}\cdot\underline{X_{L1}} = (-0.943 - 0.013j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{L1}}\right| = 0.943\cdot B \qquad \psi_{L1} = \arg\left(\underline{U_{L1}}\right) = -3.128 = -179.221\cdot °$

$\underline{U_{C1}} = \underline{I_1}\cdot\underline{X_{C1}} = (0.955 + 0.013j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{C1}}\right| = 0.955\cdot B \qquad \psi_{C1} = \arg\left(\underline{U_{C1}}\right) = 0.01383 = 0.792\cdot °$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_1(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{I_1}\right|\cdot\sin(100\pi\cdot t + \psi 1) = 0.04244\cdot\sin(314.2\cdot t + 1.585) \ A$

$u_{R1}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{R1}}\right|\cdot\sin\left(100\pi\cdot t + \psi_{R1}\right) = 1.273\cdot\sin(314.2\cdot t + 1.585) \ B$

$u_{L1}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{L1}}\right|\cdot\sin\left(100\pi\cdot t + \psi_{L1}\right) = 1.333\cdot\sin(314.2\cdot t - 3.128) \ B$

$u_{C1}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{C1}}\right|\cdot\sin\left(100\pi\cdot t + \psi_{C1}\right) = 1.351\cdot\sin(314.2\cdot t + 0.01383) \quad B$

Расчет для третьей гармоники

$\underline{I_3} = \dfrac{\underline{E_3}}{\underline{Z_3}} = \left(1.06\times 10^{-3} + 3.801j\times 10^{-4}\right)\cdot A$

$\left|\underline{I_3}\right| = 1.126\times 10^{-3}\cdot A \quad \psi 3 = \arg\left(\underline{I_3}\right) = 0.3444 = 19.733\cdot °$

$\underline{U_{R3}} = \underline{I_3}\cdot R = (0.032 + 0.011j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{R3}}\right| = 0.034\cdot B \qquad \psi_{R3} = \arg\left(\underline{U_{R3}}\right) = 0.3444 = 19.733\cdot °$

$\underline{U_{L3}} = \underline{I_3} \cdot \underline{X_{L3}} = (-0.036 + 0.1j) \cdot B$

$\left|\underline{U_{L3}}\right| = 0.106 \cdot B \qquad \psi_{L3} = \arg\left(\underline{U_{L3}}\right) = 1.915 = 109.721 \cdot °$

$\underline{U_{C3}} = \underline{I_3} \cdot \underline{X_{C3}} = \left(4.033 \times 10^{-3} - 0.011j\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{C3}}\right| = 0.012 \cdot B \qquad \psi_{C3} = \arg\left(\underline{U_{C3}}\right) = -1.226 = -70.245 \cdot °$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{I_3}\right| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi 3) = 0.001592 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.344 \text{ A}$

$u_{R3}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{R3}}\right| \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \psi_{R3}\right) = 0.04776 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.3444) \text{ B}$

$u_{L3}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{L3}}\right| \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \psi_{L3}\right) = 0.1501 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 1.915) \text{ B}$

$u_{C3}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{C3}}\right| \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \psi_{C3}\right) = 0.01689 \cdot \sin(942.5 \cdot t - 1.226) \text{ B}$

Расчет для пятой гармоники

$\underline{I_5} = \frac{\underline{E_5}}{\underline{Z_5}} = \left(2.298 \times 10^{-4} + 4.575j \times 10^{-5}\right) \cdot A$

$\left|\underline{I_5}\right| = 2.344 \times 10^{-4} \cdot A \qquad \psi 5 = \arg\left(\underline{I_5}\right) = 0.1965 = 11.259 \cdot °$

$\underline{U_{R5}} = \underline{I_5} \cdot R = \left(6.895 \times 10^{-3} + 1.373j \times 10^{-3}\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{R5}}\right| = 7.031 \times 10^{-3} \cdot B \qquad \psi_{R5} = \arg\left(\underline{U_{R5}}\right) = 0.1965 = 11.259 \cdot °$

$\underline{U_{L5}} = \underline{I_5} \cdot \underline{X_{L5}} = \left(-7.186 \times 10^{-3} + 0.036j\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{L5}}\right| = 0.037 \cdot B \qquad \psi_{L5} = \arg\left(\underline{U_{L5}}\right) = 1.767 = 101.242 \cdot °$

$\underline{U_{C5}} = \underline{I_5} \cdot \underline{X_{C5}} = \left(2.913 \times 10^{-4} - 1.463j \times 10^{-3}\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{C5}}\right| = 1.492 \times 10^{-3} \cdot B \qquad \psi_{C5} = \arg\left(\underline{U_{C5}}\right) = -1.374 = -78.724 \cdot °$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_5(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{I_5}\right| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi 5) = 0.0003314 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$

$u_{R5}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{R5}}\right| \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \psi_{R5}\right) = 0.009943 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$

$u_{L5}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{L5}}\right| \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \psi_{L5}\right) = 0.05206 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 1.767)$

$u_{C5}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{C5}}\right| \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \psi_{C5}\right) = 0.00211 \cdot \sin(1571.0 \cdot t - 1.374)$

Расчет для седьмой гармоники

$\underline{I_7} = \frac{\underline{E_7}}{\underline{Z_7}} = \left(8.369 \times 10^{-5} + 1.166j \times 10^{-5}\right) \cdot A$

$\left|\underline{I_7}\right| = 8.45 \times 10^{-5} \cdot A \qquad \psi 7 = \arg\left(\underline{I_7}\right) = 0.1384 = 7.93 \cdot °$

$\underline{U_{R7}} = \underline{I_7} \cdot R = \left(2.511 \times 10^{-3} + 3.497j \times 10^{-4}\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{R7}}\right| = 2.535 \times 10^{-3} \cdot B \qquad \psi_{R7} = \arg\left(\underline{U_{R7}}\right) = 0.1384 = 7.93 \cdot °$

$$\underline{U_{L7}} = \underline{I_7}\cdot\underline{X_{L7}} = \left(-2.564\times10^{-3} + 0.018j\right)\cdot B$$

$$\left|\underline{U_{L7}}\right| = 0.019\cdot B \qquad \psi_{L7} = \arg\left(\underline{U_{L7}}\right) = 1.709 = 97.918\cdot^\circ$$

$$\underline{U_{C7}} = \underline{I_7}\cdot\underline{X_{C7}} = \left(5.301\times10^{-5} - 3.806j\times10^{-4}\right)\cdot B$$

$$\left|\underline{U_{C7}}\right| = 3.842\times10^{-4}\cdot B \qquad \psi_{C7} = \arg\left(\underline{U_{C7}}\right) = -1.432 = -82.048\cdot^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_7(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{I_7}\right|\cdot\sin(700\pi\cdot t + \psi7) = 0.0001195\cdot\sin(2199.0\cdot t + 0.1384)$$

$$u_{R7}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{R7}}\right|\cdot\sin\left(700\pi\cdot t + \psi_{R7}\right) = 0.003585\cdot\sin(2199.0\cdot t + 0.1384)$$

$$u_{L7}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{L7}}\right|\cdot\sin\left(700\pi\cdot t + \psi_{L7}\right) = 0.02628\cdot\sin(2199.0\cdot t + 1.709)$$

$$u_{C7}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{C7}}\right|\cdot\sin\left(700\pi\cdot t + \psi_{C7}\right) = 0.0005434\cdot\sin(2199.0\cdot t - 1.432)$$

Суммируем все гармоники

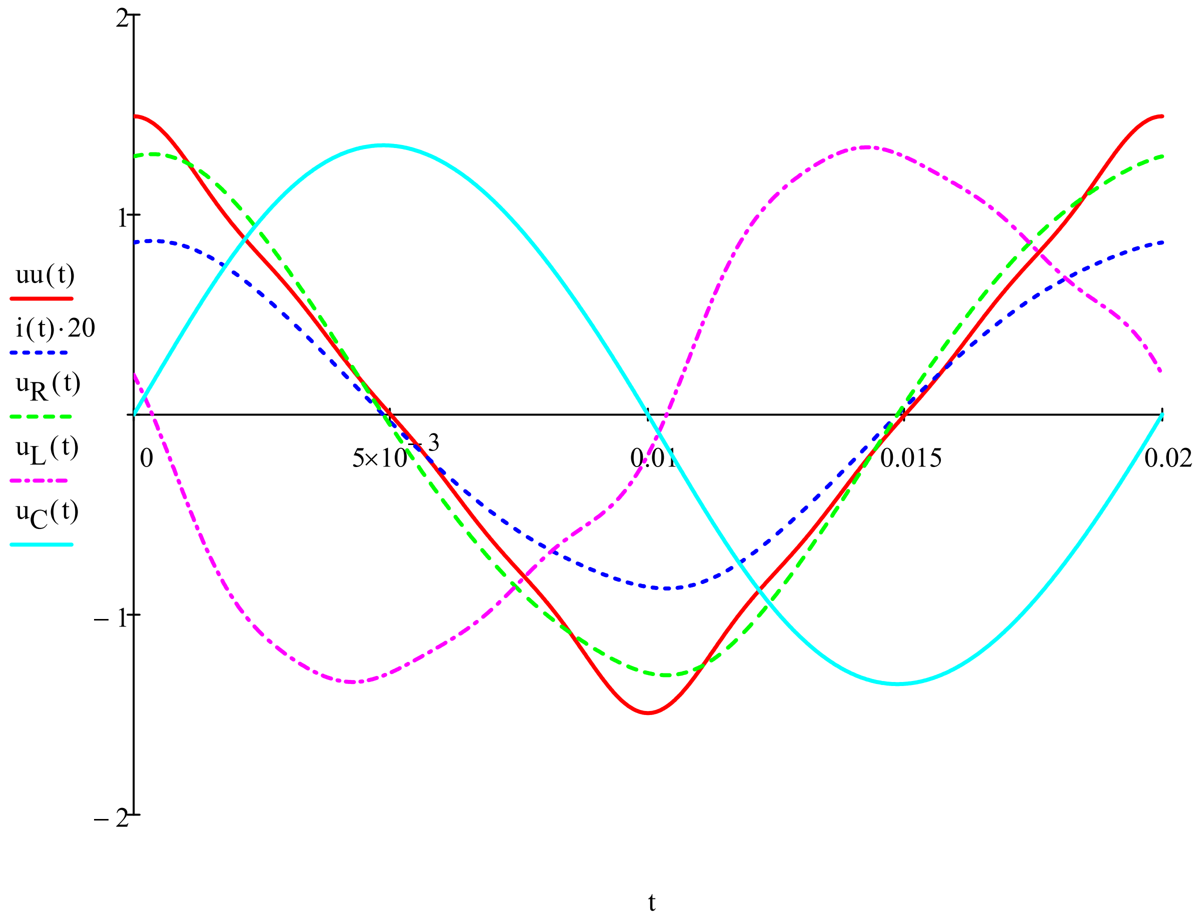
$$u_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R3}(t) + u_{R5}(t) + u_{R7}(t)$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C3}(t) + u_{C5}(t) + u_{C7}(t)$$

$$u_L(t) = u_{L1}(t) + u_{L3}(t) + u_{L5}(t) + u_{L7}(t)$$

$$uu(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) + i_7(t)$$



Практическое занятие №8

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами

Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t), \tag{11}$$

(где $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \tag{12}$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т. е. от уравнения (11) с условиями (12) перейти к операторному уравнению

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) X(p) + Q(p) = F(p),$$

где $X(p)$ – изображение искомого решения, $F(p)$ – изображение функции $f(t)$, а $Q(p)$ – некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0,\ x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x'_0 = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0.$ Решив операторное уравнение относительно

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ – характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0,\ x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (11). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо операторного уравнения получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = -e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq p\,X(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2\,X(p) - p - 2.$$

Кроме того, $-e^t \doteq -\dfrac{1}{p-1}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид $p^2X(p) - p - 2 + 4\,X(p) = -\dfrac{1}{p-1}$.

Отсюда находим $X(p) = \dfrac{p^2+p-3}{(p-1)\left(p^2+4\right)}$.

Разлагая эту дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{-1}{5(p-1)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{6p+11}{p^2+4}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, находим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5}\,e^t + \frac{6}{5}\cos 2t + \frac{11}{10}\sin 2t.$$

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \qquad x(0)=0,\ \ y(0)=0{,}5;\ \ z(0)=0. \\ z' = z - x; \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = x(t) \doteq X(p) = X;\ y = y(t) \doteq Y(p) = Y;\ z = z(t) \doteq Z(p) = Z.$

Находим, что $x' \doteq p\,X;\qquad y' \doteq p\,Y - 0{,}5;\qquad z' \doteq p\,Z.$

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX + Y - Z = 0, \\ \qquad pY - Z = 0{,}5 + \dfrac{2}{p+1}, \\ X + (p-1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)\,(p^2-p+1)}{2(p^4-1)},$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2(p^2+1)} \doteq$$

$$\doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2}\sin t.$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)} \doteq \frac{5}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

Ответ: $x(t) \doteq -e^{-t} + \cos t - \dfrac{3}{2}\sin t,$

$$y(t) \doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t},$$

$$z(t) \doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 3. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = e^{2t}\cos^2 6t + \sin 2t \sin 4t + 3.$$

Решение. В силу свойства линейности преобразования Лапласа найдем изображение каждого слагаемого:

$$\cos^2 6t = \frac{1+\cos 12t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12t \doteq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+12^2}.$$

Применяя теорему смещения изображения к первому слагаемому, получим

$$e^{2t}\cos^2 6t \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+144}.$$

Изображение первого слагаемого можно было найти также по таблице оригиналов и изображений, используя формулу 9.

Второе слагаемое

$$\sin 2t \sin 4t = \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 6t \doteq \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}.$$

Третье слагаемое $3 \doteq \frac{3}{p}$. Окончательно получаем

$$f(t) \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2+144} + \frac{p}{2(p^2+4)} - \frac{p}{2(p^2+36)} + \frac{3}{p}.$$

Пример 4. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t \in (1,\ 3) \\ 0, & t \notin (1,\ 3) \end{cases}$$

Решение. Из рисунка 8 видно, что $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$; $f_1(t)=f_3(t-1)$; $f_2=f_4(t-3)$.

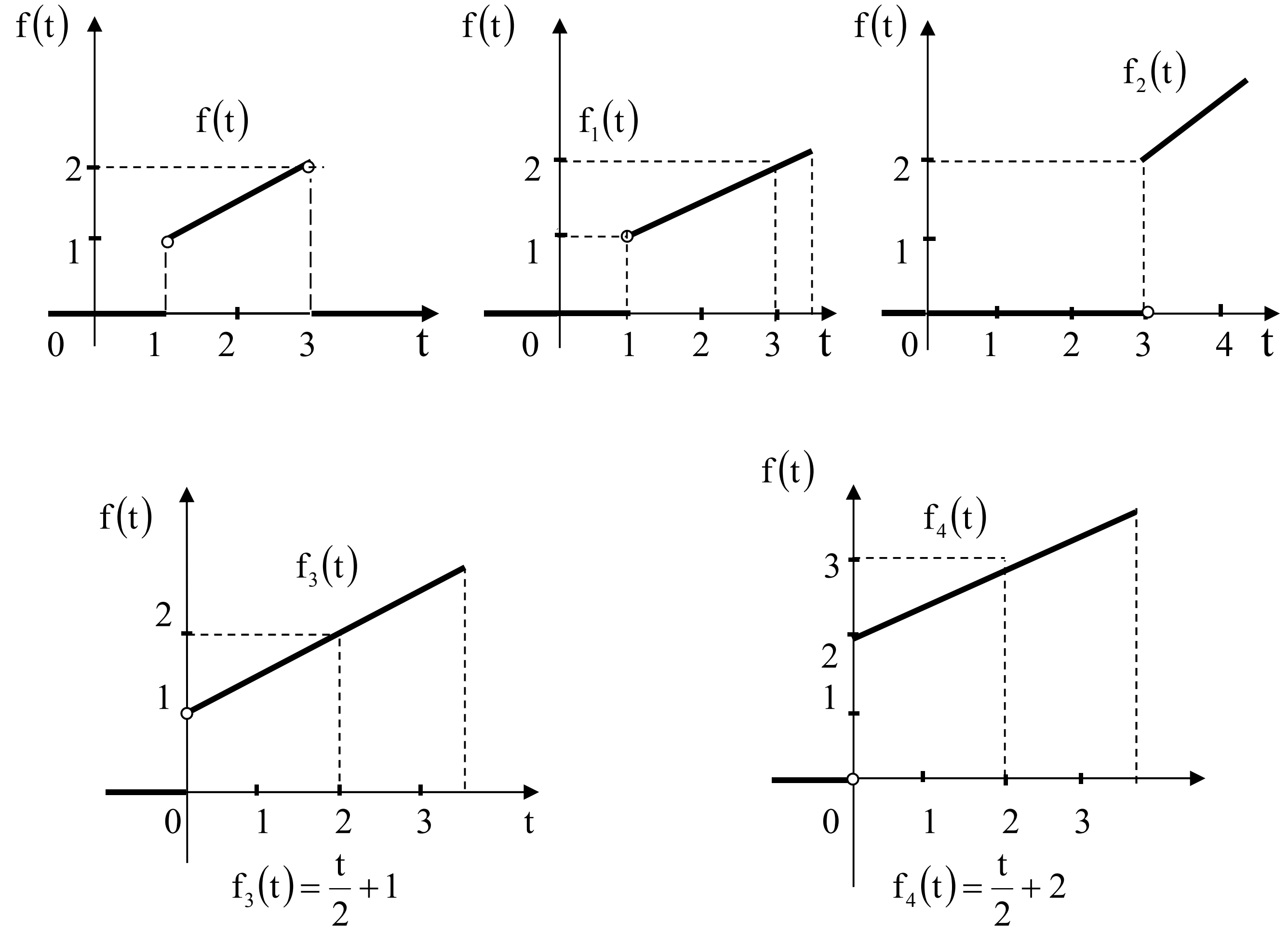


Рисунок 8

Так как $f_3(t)\doteq\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{p}$; $f_4(t)\doteq\frac{1}{2p^2}+\frac{2}{p}$, по свойству запаздывания оригинала

получаем $$f(t)\doteq\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{2}{p}\right)e^{-3p}.$$

Образцы решения типовых заданий представлены примерами №№ 10 – 14.

Задания для самостоятельного решения

1 Решить данные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$x''+2x'-3x=e^{-t}, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=1.$$

Данные системы дифференциальных уравнений решить операционным методом при указанных начальных условиях. В некоторых вариантах в скобках указан один из корней характеристического уравнения. $\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^{2}. \end{cases} \qquad x(0) = 2, \; y(0) = 1.$$

Практическое занятие №9

Аудиторная контрольная 3

Аудиторная контрольная работа по теме «Основы операционного исчисления».