

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «**Методы решения задач электроэнергетики и
электротехники**»

Для студентов направления подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и
электротехника, профиль подготовки – Электропривод и автоматика
промышленных установок и технологических
Год начала обучения 2022

Содержание

Введение	3
Практическая работа № 1. Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме	4
Практическая работа № 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Показательная функция комплексного переменного	19
Практическая работа № 3. Символический метод расчета цепей синусоидального тока	31
Практическая работа № 4. Разложение периодической функции в ряд Фурье	33
Практическая работа № 5. Использование комплексных чисел и рядов Фурье к расчету электрических цепей несинусоидального тока	41
Практическая работа № 6. Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений и систем	47
Практическая работа № 7. Обработка опытных данных методами интерполирования и аппроксимации	53
Практическая работа № 8. Численные методы решения дифференциальных уравнений	56
Список рекомендуемой литературы	60

Введение

Дисциплина «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» изучается студентами направления подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника (профиль подготовки – «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов») на 1-м курсе, когда закладываются базовые знания. Так как, кроме освоения теоретического материала, требуется закрепление полученных знаний, поэтому в учебном процессе высших учебных заведений наряду с теоретическим обучением значительное место отводится выполнению практических работ. Правильное сочетание теоретических знаний с практическими работами обеспечивает высокое качество подготовки выпускников.

Основной целью дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» является формирование у студентов практических навыков по планированию, проведению, анализу и оптимизации результатов исследования сложных процессов профессиональной деятельности выпускника по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника.

Задачами курса являются: изучение методов теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, применение математического аппарата численных методов при решении задач электроэнергетики и электротехники.

Практическое занятие №1

Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Комплексным числом Z называется выражение вида

$Z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x . Число x называется действительной частью комплексного числа Z и обозначается $x = \operatorname{Re}Z$, а y – мнимой частью Z и обозначается $y = \operatorname{Im} Z$. Запись числа Z в виде $Z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

2. Два комплексных числа $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными ($Z_1 = Z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $Z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Пример 1. При каких действительных значениях x и y выполняются равенства:

а) $x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i$;

б) $ix^2 + (3 - i)x - (1 - 2i)y = 2 + 2i$?

Решение: а) преобразуем левую часть выражения, а именно, выделим действительную и мнимую части комплексного числа:

$$2x - y - xi + 2yi = 4 - 5i$$

$$(2x - y) + (-x + 2y)i = 4 + (-5)i$$

Используя условие равенства двух комплексных чисел, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} + \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \begin{cases} 3x = 3 \\ y = \frac{x - 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = -2 \end{cases}$$

б) аналогично преобразуем левую часть:

$$3x - y + ix^2 - xi + 2yi = 2 + 2i,$$

$$(3x - y) + (x^2 - x + 2y)i = 2 + 2i, \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - x + 2y = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 - x + 2(3x - 2) = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x_1 = -6; x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -20, y_2 = 1, \\ x_1 = -6, x_2 = 1. \end{cases}$$

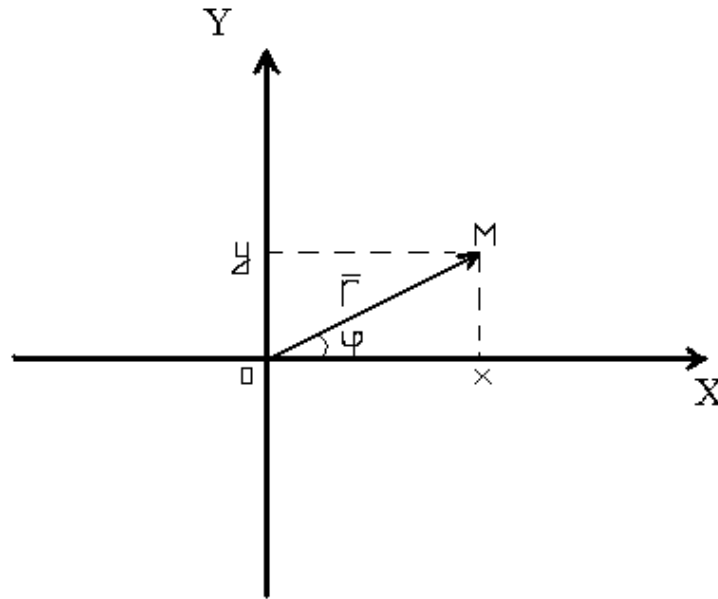
3. Два комплексных числа $Z = x + iy$ и $\bar{Z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

Например: $1 + i$ и $1 - i$; $2i$ и $-2i$.

Комплексные числа, отличающиеся знаком действительной и мнимой частей, называются **противоположными**.

3. Всякое комплексное число $Z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re}Z$, $y = \operatorname{Im}Z$. Ось Ox называется действительной, ось Oy -мнимой. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как об-

раз комплексного числа $Z = x + iy$. Комплексное число Z можно задать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y\}$.



Пример 2. Изобразите геометрически следующие комплексные числа и им сопряженные: а) 3; б) $2i$; в) $-2-3i$; г) $1 + 2i$.

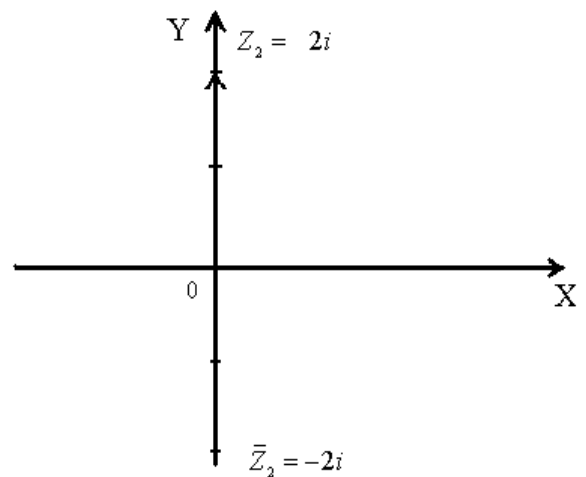
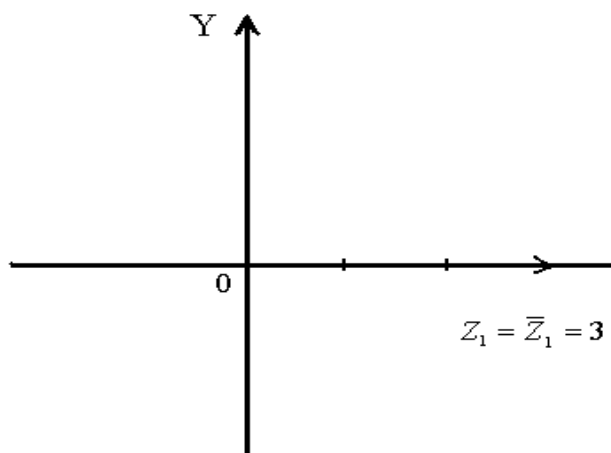
Решение:

а) $Z_1 = 3 = 3 + 0i$

$$\overline{Z}_1 = 3 - 0i = 3, \text{ т.е. } Z_1 = \overline{Z}_1.$$

б) $Z_2 = 2i = 0 + 2i$

$$\overline{Z}_2 = 0 - 2i = -2i.$$

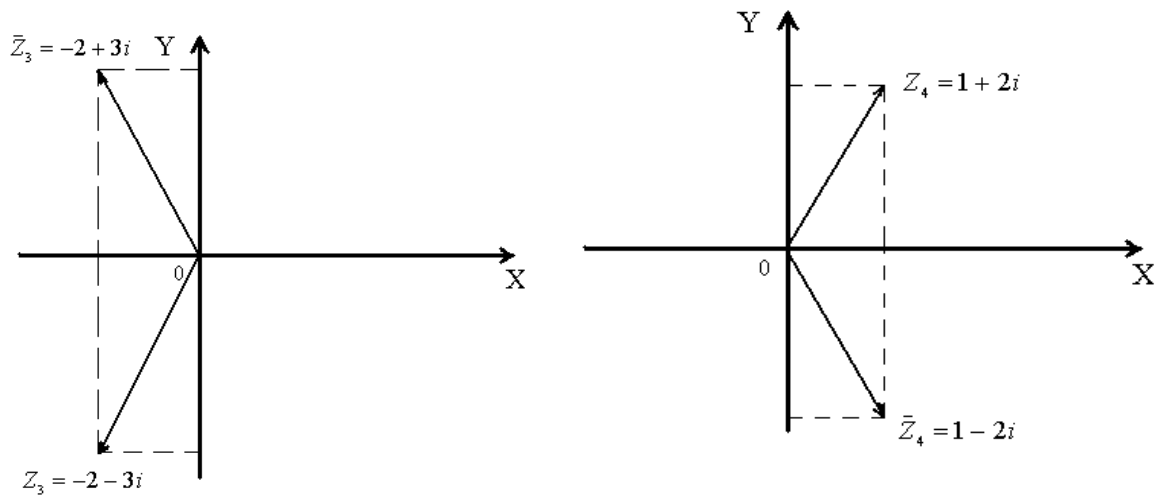


в) $Z_3 = -2 - 3i$

$$\overline{Z}_3 = -2 + 3i$$

г) $Z_4 = 1 + 2i$

$$\overline{Z}_4 = 1 - 2i$$



5. Длина вектора \vec{r} называется модулем комплексного числа и обозначается $|Z|$ или r : $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором \vec{r} , изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается $\text{Arg } Z$ или φ . $\text{Arg } Z = \arg Z + 2\pi k$, k – любое целое число ; $\arg Z$ – главное значение аргумента, $-\pi < \arg Z \leq \pi$. Аргумент φ определяется из формулы: $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$.

Так как $-\pi < \arg Z \leq \pi$, то из формулы: $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg Z = \begin{cases} \text{arctg} \frac{y}{x} & \text{Для внутренних точек} \\ \text{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{I, IV четвертей} \\ \text{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{Для внутренних точек} \\ & \text{II четверти} \\ & \text{Для внутренних точек} \\ & \text{III четверти} \end{cases}$$

Если точка Z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg Z$ можно найти непосредственно.

Пример 3. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; б) $-3i$.

Решение:

$$\text{а) } Z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad |Z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg Z_1 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1 = -\frac{\pi}{4} \text{ - главное значение}$$

аргумента, т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{4} < \pi$.

$$\text{б) } Z_2 = -3i = 0 - 3i$$

$$|Z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Из изображения числа Z_2 следует, что $\arg Z_2 = -\frac{\pi}{2}$ - главное зна-

чение, т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{2} < \pi$.

6. Суммой двух комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и

$Z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$Z = Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Свойства сложения комплексных чисел:

$$\text{а) } Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$$

$$\text{б) } (Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3).$$

7. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Если $Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$Z = Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

8. Произведением комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равен-

ством: $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Заметим, что $Z \cdot \bar{Z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$ - действительное число.

Свойства умножения комплексных чисел:

- a) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$.
- b) $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 = Z_1(Z_2 \cdot Z_3)$
- c) $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$.

Например:

$$(2 - 3i)(-5 + 4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$$

9. Деление определяется как действие, обратное умножению. Если

$$Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2, \text{ то } Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 4. Выполните деление $\frac{1 + 3i}{2 + i}$.

$$\text{Решение: } \frac{1 + 3i}{2 + i} = \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i + 6i + 3}{4 + 1} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i.$$

Пример 5. Выполните указанные действия:

a) $(2 - 3i) - (i - 2)$;

б) $(2 - i)(i + 1) - (1,5i + 1)4i$;

в) $\frac{1}{1 + 2i} + \frac{i}{2 - i}$;

г) $\frac{2}{1 + i} - \frac{1 - i}{1 + 2i}(2 - i)$;

д) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$.

Решение:

$$a) (2 - 3i) - (i - 2) = 2 - 3i - i + 2 = 4 - 4i;$$

$$б) (2 - i) \cdot (i + 1) - (1,5i + 1) \cdot 4i = 2i - i^2 + 2 - i - 6i^2 - 4i = \\ = 2i + 1 + 2 - i + 6 - 4i = 9 - 3i;$$

$$в) \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i} = \frac{2-i+i(1+2i)}{(1+2i)(2-i)} = \frac{2-i+i+2i^2}{(1+2i)(2-i)} = \frac{2-i+i-2}{(1+2i)(2-i)} = \\ = \frac{0}{(1+2i)(2-i)} = 0;$$

$$г) \frac{2}{1+i} - \frac{1-i}{1+2i} \cdot (2-i) = \frac{2}{1+i} - \frac{2-2i-i+i^2}{1+2i} = \frac{2}{1+i} - \frac{2-2i-i-1}{1+2i} = \\ = \frac{2}{1+i} - \frac{1-3i}{1+2i} = \frac{2(1+2i) - (1-3i)(1+i)}{(1+i)(1+2i)} = \frac{2+4i - (1-3i+i-3i^2)}{1+i+2i+2i^2} = \\ = \frac{2+4i-1+3i-i-3}{1+i+2i-2} = \frac{-2+6i}{-1+3i} = \frac{2(-1+3i)}{(-1+3i)} = 2;$$

$$д) (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot i\sqrt{2} + (i\sqrt{2})^2 = 2 + 2 \cdot 2i + i^2 \cdot 2 = 2 + 4i - 2 = 4i$$

Пример 6. Определите полное сопротивление цепи $Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$,

если известно $Z_1 = (6 + 8i) \text{ Ом}$; $Z_2 = 8i \text{ Ом}$.

Решение:

$$Z = \frac{(6 + 8i) \cdot 8i}{6 + 8i + 8i} = \frac{48i + 64i^2}{6 + 16i} = \frac{-64 + 48i}{6 + 16i} = \frac{-32 + 24i}{3 + 8i} = \\ = \frac{(-32 + 24i)(3 - 8i)}{(3 + 8i)(3 - 8i)} = \frac{-96 + 72i + 256i - 192i^2}{9 + 64} = \\ = \frac{-96 + 328i + 192}{73} = \frac{96 + 328i}{73} \approx (1,32 + 4,5i) \text{ Ом} .$$

Пример 7. Постройте на плоскости комплексного переменного линии, заданные уравнениями:

$$a) |Z - 2i| = 3;$$

$$б) \text{Re}(Z^2) = 1;$$

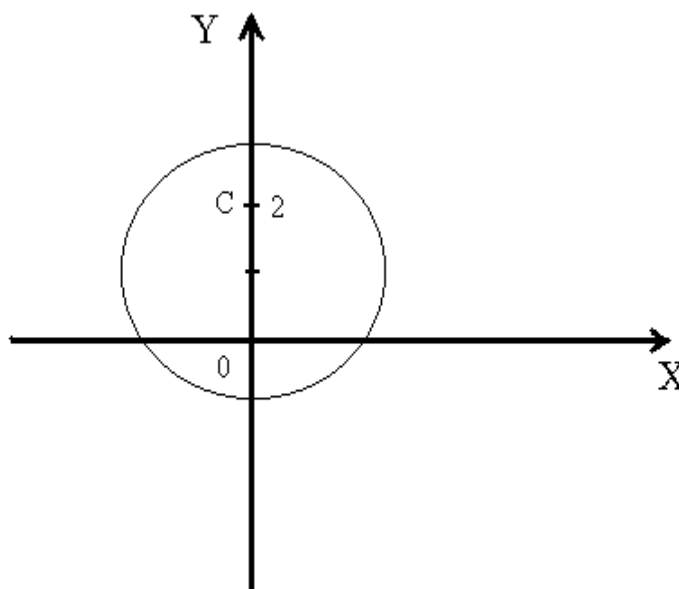
$$в) \arg Z = \frac{\pi}{4};$$

$$г) 2 \operatorname{Re} Z - (\operatorname{Im} Z)^2 = 1.$$

Решение: а) $|Z - 2i| = 3$.

Т.к. $Z = x + iy$, то $Z - 2i = x + iy - 2i = x + i(y - 2)$.

Найдем $|Z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$. По условию $|Z - 2i| = 3$, т.е. $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3$, $x^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Это уравнение задает окружность с центром в т. С (0;2), радиуса 3.



$$б) \operatorname{Re}(Z^2) = 1.$$

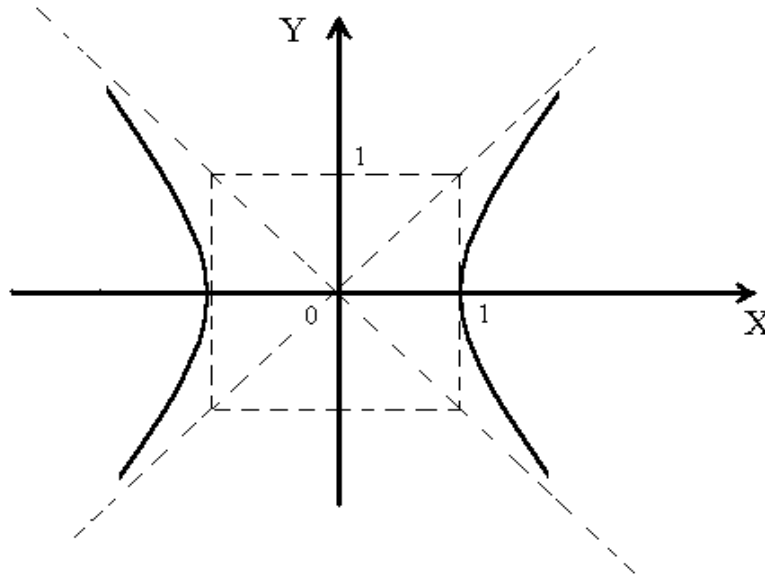
Т.к. $Z = x + iy$, то

$$Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

$$\operatorname{Re}(Z^2) = x^2 - y^2.$$

По условию $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение равнобочной гиперболы.

Вершина находится в начале координат, полуоси: $a = b = 1$.



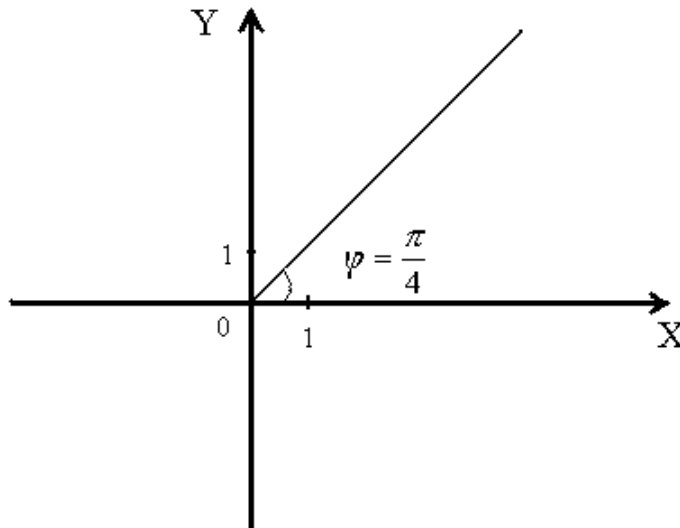
в) $\arg Z = \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = \arctg \frac{y}{x}$, то $\arctg \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}$; $\frac{y}{x} = 1, y = x$. Это уравнение

прямой (биссектриса I и III координатных четвертей).

Рассматриваем точки прямой $y = x$ лежащие только в I четверти.

г)



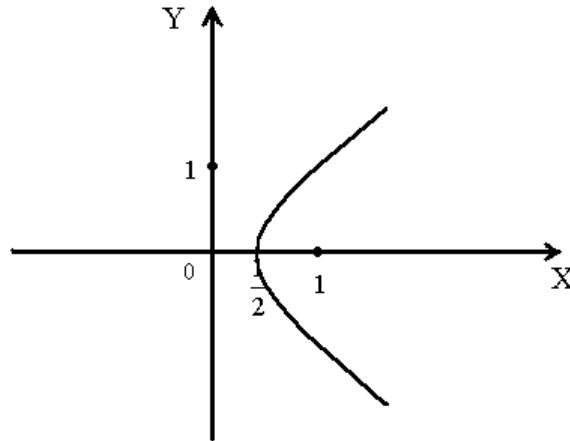
ваем $y = x$, в I чет-

$$2\operatorname{Re}Z - (\operatorname{Im}Z)^2 = 1.$$

Т.к. $Z = x + iy$, то $\operatorname{Re}Z = x$, $\operatorname{Im}Z = y$, тогда

$$2x - y^2 = 1, \quad 2x = y^2 + 1, \quad x = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

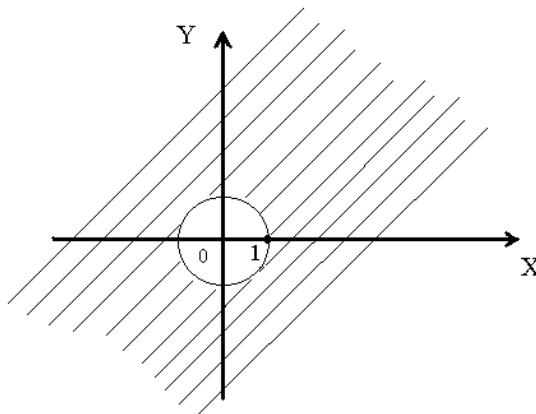
Это уравнение параболы, вершина в точке с координатами $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, ось OX – ось симметрии.



Пример 8. Изобразите области, заданные условиями: а) $|Z| \geq 1$; б)

$|Z + 2 - i| < 3$; в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$; г) $1 \leq |z - 1 + i|^2 \leq 4$; д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2, \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ Решение:

а) $|Z| \geq 1$. Т.к. $Z = x + iy$, $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то



$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1.$$

б) $|Z + 2 - i| < 3$;

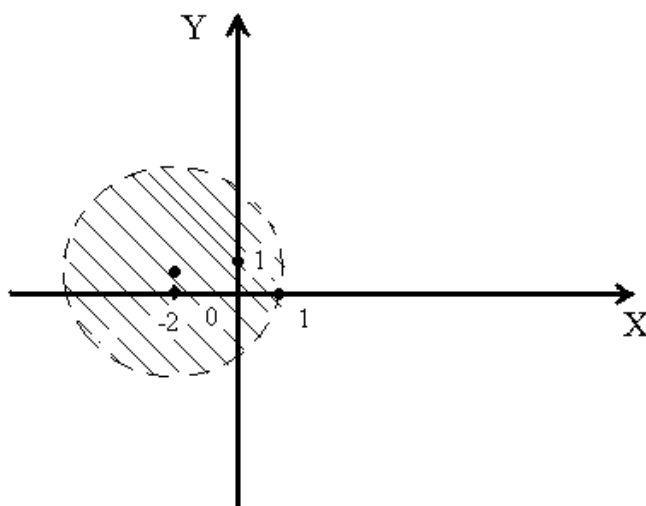
Т.к. $Z = x + iy$, то $Z + 2 - i = x + iy + 2 - i = (x + 2) + (y - 1)i$

Найдем $|Z + 2 - i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$.

По условию $|Z + 2 - i| < 3$, т.е.

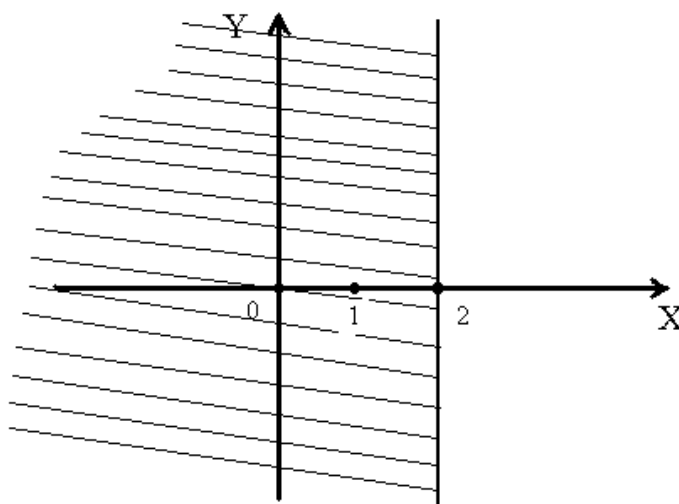
$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} < 3$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 < 9.$$



в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$.

Т.к. $Z = x + iy$, $\operatorname{Re} Z = x$, то $x \leq 2$.

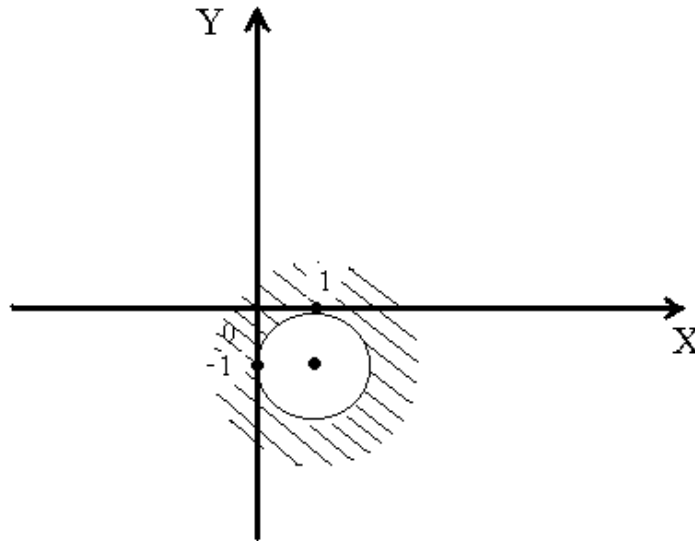


г) $1 \leq |Z - 1 + i|^2 \leq 4$.

Т.к. $Z = x + iy$, $Z - 1 + i = x + iy - 1 + i = (x - 1) + (y + 1)i$,

$$|Z - 1 + i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}, |Z - 1 + i|^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2, \quad \text{TO}$$

$$1 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4.$$



$$\text{д) } \begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2 \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

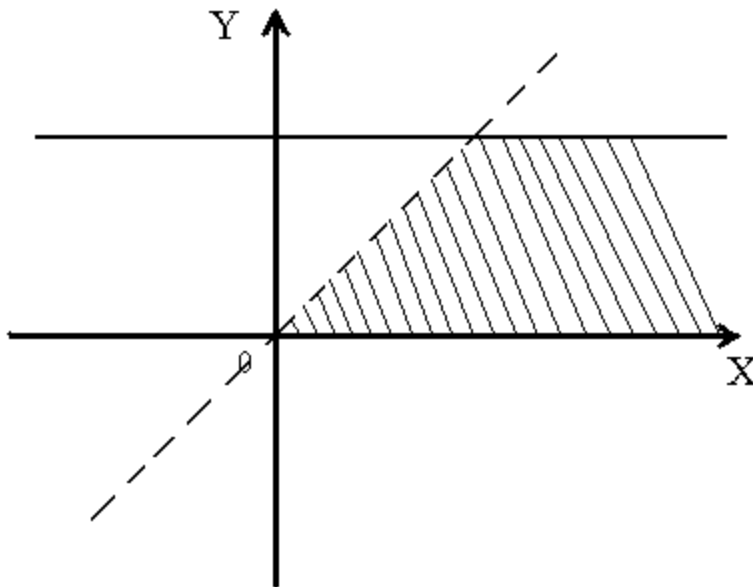
$$\operatorname{Im} Z \leq 2.$$

Т.к. $Z = x + iy$, $\operatorname{Im} Z = y$, то $y \leq 2$, $0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, то $0 \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} 0 \leq \frac{y}{x} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$

$$0 \leq \frac{y}{x} < 1; \quad 0 \leq y < x.$$

$$\text{Т.о., } \begin{cases} y \leq 2 \\ 0 \leq y < x \end{cases}$$



Решите задачи

1.1. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

2; $-i$; -2 ; $3 - 2i$; $1 + 2i$; $-1 - i$.

1.2. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2 , если:

1) $Z_1 = 4 + 5i$; $Z_2 = 3 - 2i$.

2) $Z_1 = 0,5 - 3,2i$; $Z_2 = 1,5 - 0,8i$.

3) $Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$; $Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

б) Найдите разность и частное комплексных чисел Z_1 и Z_2 ,

если:

1) $Z_1 = 3 + 4i$; $Z_2 = 0,4 - 0,2i$.

2) $Z_1 = 1 - 2i$; $Z_2 = 0,6$.

3) $Z_1 = \sqrt{5} - i$; $Z_2 = \sqrt{5} - 2i$.

1.3. Найдите мнимую часть Z , если:

$$1) \quad Z = (2 - i)^3 \cdot (2 + 11i).$$

$$2) \quad Z = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6.$$

$$3) \quad Z = \frac{5 + 2i}{2 - 5i} - \frac{3 - 4i}{4 + 3i} - \frac{1}{i}.$$

1.4. Выполните действия:

$$1) \quad i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}.$$

$$2) \quad 2i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

$$3) \quad \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}.$$

$$4) \quad \frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}.$$

$$5) \quad \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}.$$

$$6) \quad (7+i) \cdot (2-i) - (3+5i) \cdot (-i).$$

$$7) \quad i(3-i) - (2+3i) \cdot (1-i).$$

$$8) \quad \frac{3}{i} + \frac{5-i}{2} - \frac{10+i}{1+i}.$$

1.6. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа:

$$а) \quad Z_1 = 2i(x + 2yi) + 3x \quad \text{и} \quad Z_2 = 1 - 2i;$$

$$б) \quad Z_1 = y^2 - 7y + 9xi \quad \text{и} \quad Z_2 = -12 + 20i + x^2i$$

равны.

1.7. Найдите модуль комплексного числа Z :

$$1) \quad Z = -4;$$

$$2) \quad Z = -i;$$

$$3) Z = -5 - 2\sqrt{6}i;$$

$$4) Z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$$

$$5) Z = \frac{2-i}{1+i}.$$

1.8. В плоскости комплексного переменного начертите линии, заданные уравнениями:

$$1) |Z + 1| = 1;$$

$$5) |2i - Z|^2 = 1;$$

$$2) |Z - 2| + |Z + 2| = 26;$$

$$6) \operatorname{Im} Z^2 = 4;$$

$$3) |Z - 2|^2 + |Z + 2|^2 = 26;$$

$$7) \arg Z = \frac{3\pi}{4};$$

$$4) |Z|^2 + 3Z + 3\bar{Z} = 0;$$

$$8) (\operatorname{Im} Z)^2 = 4 - \operatorname{Re} Z.$$

1.9. Изобразите области, заданные условиями:

$$1) |Z + 2i - 1| \leq 2;$$

$$5) |Z + i| \leq 1;$$

$$2) |Z - i| < |Z + i|;$$

$$6) \frac{\pi}{6} < \arg Z < \frac{\pi}{4};$$

$$3) \lg |Z - 10i| < 2;$$

$$7) -\frac{\pi}{4} \leq \arg Z \leq \frac{\pi}{2};$$

$$4) 1 \leq \operatorname{Re} Z \leq 4;$$

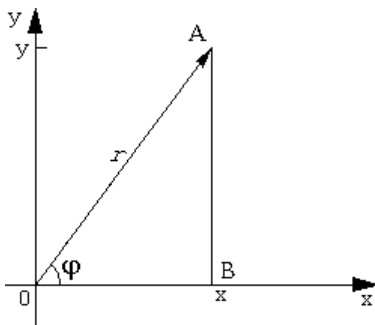
$$8) \begin{cases} 1 < \operatorname{Re} Z < 2 \\ -\frac{\pi}{4} < \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Практическое занятие № 2

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Показательная функция комплексного переменного

1. Рассмотрим комплексное число Z в алгебраической форме:



$z = x + iy$. Изобразим это число на комплексной плоскости в виде вектора $\vec{OA} = \{x, y\}$. Рассмотрим $\triangle AOB$, где $B(x, 0)$.

Пусть r - модуль комплексного числа z ; φ - один из его аргументов (любой). Тогда из $\triangle AOB$ следует, что $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$. Откуда число z запишется в виде: $z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi$. Представление числа z в виде: $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа z .

Пример 1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$, $z_4 = -3 + 4i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, а

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{-1} - \pi = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{то}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

Так как $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, а $\varphi_2 = \pi$ (по изображению числа на плоскости), то $z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$. Учитывая, что $|z_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, а $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ - один из аргументов z_3 , получаем $|z_3| = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

В связи с тем что $|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, а

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg} \frac{4}{-3} + \pi \approx 2,21424 \text{ рад} \approx 126^\circ 52',$$

$$\text{получаем } z_4 = 5(\cos(\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}) + i \sin(\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}))$$

$$\text{или } z_4 = 5(\cos 126^\circ 52' + i \sin 126^\circ 52').$$

Пример 2. Записать числа в тригонометрической форме

$$z_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{4} - 2i \sin \frac{\pi}{4}, z_2 = -\cos \frac{\pi}{17} - i \sin \frac{\pi}{17}$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4})$, а

$-\sin \frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$, тогда получим тригонометрическую форму для

$$z_1: z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}). \quad \text{Аналогично учитывая, что}$$

$$-\cos \frac{\pi}{17} = \cos(\pi - \frac{\pi}{17}) = \cos \frac{16\pi}{17}, \sin \frac{\pi}{17} = \sin(\pi - \frac{\pi}{17}) = \sin \frac{16\pi}{17},$$

$$\text{получаем } z_2 = \cos \frac{16\pi}{17} - i \sin \frac{16\pi}{17}.$$

2. Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$,

то-

$$\text{гда } z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Пример 3. Найти произведение чисел

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \text{ и } z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{16} = 4$.

Аргументом произведения $z_1 \cdot z_2$ будет сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}.$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 4\cos\left(\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8}\right)$ или

$$z_1 \cdot z_2 = 4\cos\left(\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное

$$\text{число } z = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot (\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

Решение. Число $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, и аргумент

$\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$; число $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргу-

мент $\varphi_3 = \arctg\frac{1}{-1} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

а аргумент $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12}$.

Следовательно, $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$.

3. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$ (**формула Муавра**), где $n \in \mathbb{N}$.

Пример 5. Вычислить. $(\sqrt{3} - i)^9$.

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, откуда по формуле Муавра имеем

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9 (\cos 9(-\frac{\pi}{6}) + i \sin 9(-\frac{\pi}{6})) = 512 (\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2}) = 512i.$$

4. Корнем n-ой степени из комплексного числа Z называется такое комплексное число W (обозначается $\sqrt[n]{Z}$), если $W^n = Z$.

Все значения корня n-ой степени из $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ содержатся в формуле $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + \pi k}{n} \right)$ (1), где

$k=0,1,2,\dots,n-1$.

Пример 6. Найти все значения:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3} - i}$.

Решение: а) запишем число $Z=-16$ в тригонометрической форме $Z = -16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Согласно формуле (1) получаем

$$W_k = 2 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) \right), \text{ где } k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$W_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \text{ где } k=0,1,2.$$

Получаем

$$W_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i.$$

в) Пусть $Z = \sqrt{3} - i$, тогда $|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

По формуле (1) имеем

$$W_k = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) \right), \text{ где } k=0,1.$$

$$W_0 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i,$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i.
\end{aligned}$$

Пример 7. Записать число $\frac{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$ в алгебраической

форме при условии, что действительные части корней $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5-12i}$ отрицательны.

Решение. Для извлечения квадратного корня из числа $5+12i$ положили $\sqrt{5+12i} = x + iy$, тогда $5+12i = x^2 + 2xyi - y^2$ и, следовательно, x и y удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

Решив эту систему, получим два решения $(3;2)$ и $(-3;-2)$. По условию действительная часть отрицательна, поэтому $\sqrt{5+12i} = -3 - 2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i} = -3 + 2i$. Таким образом, $Z = \frac{-3 - 2i - (-3 + 2i)}{-3 - 2i + (-3 + 2i)} = \frac{2}{3}i$.

5. Пусть $z = x + iy$. Если x и y действительные переменные, то z называется **комплексной переменной**.

Если каждому значению комплексной переменной z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w , то w есть функция комплексной

переменной z . Функции комплексного аргумента обозначают $w=f(z)$ или $w=w(z)$

В качестве примера рассмотрим одну функцию комплексной переменной - показательную функцию $w = e^z$, или $w = e^{x+iy}$.

Комплексные значения функции w определяются так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (2)$$

Свойства показательной функции:

$$1. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$2. e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

$$3. (e^z)^m = e^{mz} \text{ где } m - \text{ целое число}$$

$$4. e^{z+2\pi i} = e^z$$

Если в формуле (2) положим $x=0$, то получим $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Это есть **формула Эйлера**. С ее помощью можно от тригонометрической записи комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ перейти к показательной форме $z = r e^{i\varphi}$ где r - модуль числа z , а φ - его аргумент.

$$\text{а) Если } z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \text{ и } z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2},$$

$$\text{то } z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (4)$$

$$\text{б) Если } z = r e^{i\varphi}, \text{ то } z^n = r^n e^{in\varphi} \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \text{ где } k=0,1,2,3,4,5,\dots,n-1.$$

Пример 8. Представить в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i.$$

Решение. Находим модуль числа $|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ и один из его

$$\text{аргументов } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}, \text{ откуда, } z = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Пример 9. Записать в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3} + i)(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12})}{1 - i}.$$

Решение: каждое из чисел $-\sqrt{3} + i, \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}, i - 1$ представим

в показательной форме

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = e^{-\frac{\pi}{12}i}.$$

Используя формулы (3), (4) получаем

$$z = \frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i} e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Пример 10. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$ в показательной форме.

$$\text{Решение: } \sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi(12K+1)i}{24}} \quad (K=0,1,2,3).$$

Решите задачи

2.1. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $Z = -\sqrt{3} + i$,

2) $Z = -1$,

3) $Z = -\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$,

4) $Z = 1 + \cos \frac{10\pi}{9} + i \frac{10\pi}{9}$,

5) $Z = \operatorname{tg} 1 - i$.

2.2. Записать комплексное число

в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $Z = \frac{i \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}$,

2) $Z = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}}$,

3) $Z = \frac{1}{(1+i)^2}$,

4) $Z = \frac{-\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{13\pi}{12} - i \sin \frac{13\pi}{12}}$,

5) $Z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{i}$.

2.3. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z :

$$1) Z = \frac{5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)},$$

$$2) Z = \frac{\sin \frac{2\pi}{5} + i \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5}\right)}{i - 1}.$$

2.4 . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

$$1) Z = \left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12},$$

$$2) Z = (\cos 31^\circ + i \sin 31^\circ)^{-10},$$

$$3) Z = -\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6},$$

$$4) Z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

2.5. Записать комплексное число Z в тригонометрической форме:

$$1) Z = (\sqrt{3} - i)^{100},$$

$$2) Z = \left(\frac{\sqrt{3}i + 1}{i - 1}\right)^6,$$

$$3) Z = \frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n \in N,$$

$$4) Z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4,$$

$$5) Z \left(\sin \frac{6\pi}{5} + i \left(1 + \cos \frac{6\pi}{5}\right) \right)^5.$$

2.6. Найти значения $\sqrt[n]{Z}$ если:

$$1) Z = -1, n = 3,$$

2) $Z = 8i, n = 3,$

3) $Z = 1, n = 5,$

4) $Z = 1 + i, n = 8.$

2.7 . Решить уравнения:

1) $Z^3 = 1 + i,$

2) $Z^4 + 1 = 0,$

3) $Z^5 = 1 + \sqrt{3}i,$

4) $Z^6 + 64 = 0,$

5) $Z^2 = \bar{Z}^3.$

2.8 . Представить Z в алгебраической форме:

1) $Z = e^{2-i},$

2) $Z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i},$

3) $Z = e^{3i + 7 + 3\pi i - \frac{\pi i}{2}}.$

2.9 . Представить в показательной форме комплексное числа:

1) $Z = -\sqrt{12} - 2i,$

2) $Z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$

2.10 . Записать в показательной и алгебраической формах комплексное число:

1) $Z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right),$

2) $Z = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{12}} \right)^{-3},$

3) $Z = (\sqrt{3} - i)^6,$

$$4) Z = \frac{1}{(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)^5},$$

$$5) Z = \frac{e^{-\frac{\pi i}{3}} (1 + \sqrt{3}i)^7}{i}.$$

2.11. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{Z}$:

1) $Z = 1, n = 3,$

2) $Z = -1, n = 5,$

3) $Z = -4 + \sqrt{48}i, n = 3,$

4) $Z = -1 - \sqrt{3}i, n = 4.$

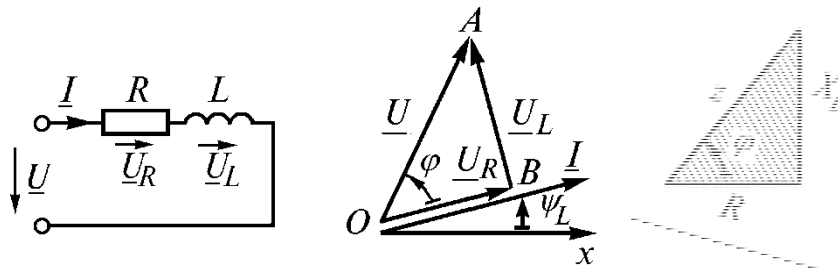
Практическое занятие №3

Символический метод расчета цепей электрических цепей синусоидального тока

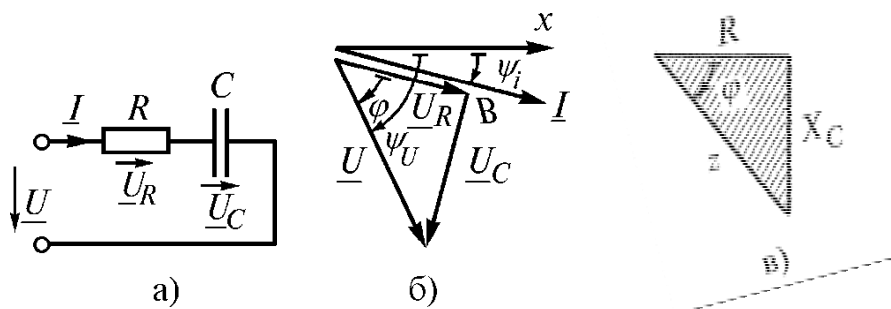
Цель занятия: объяснение символического метода расчета электрических цепей синусоидального тока; рассмотрение электрических цепей с сосредоточенными элементами (R, L, C) и представление расчета таких цепей.

Методика проведения занятия: Необходимы теоретические сведения

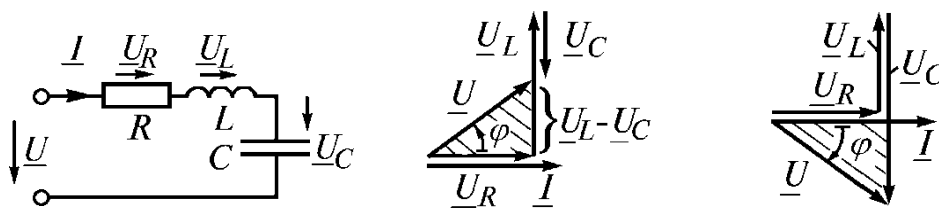
1. Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку:



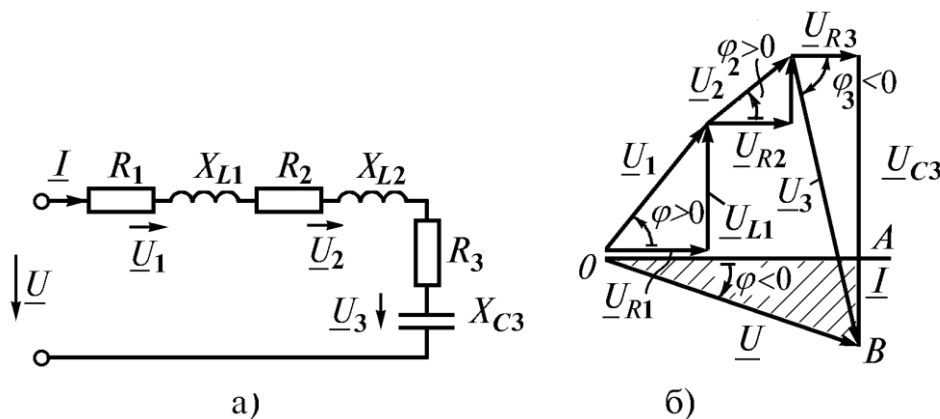
2. Цепь, содержащая резистор и конденсатор:



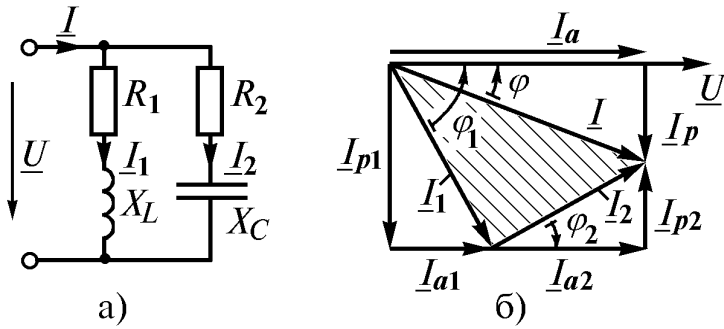
3. Цепь, содержащая последовательное соединение резистора, катушки и



конденсатора:

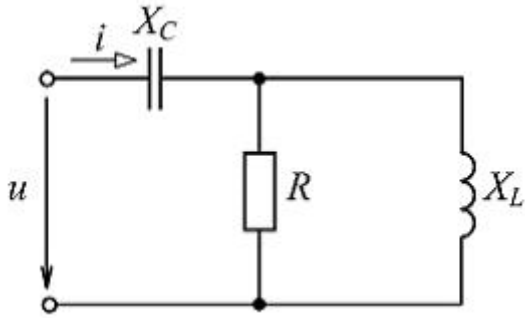


4. Цепь, содержащая параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора:



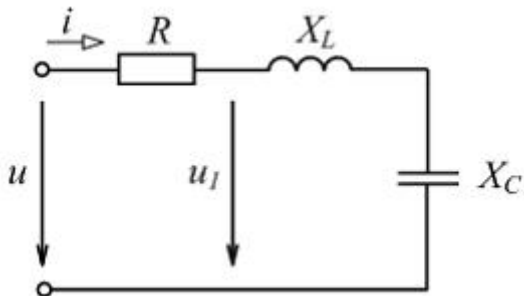
Примеры решения задач:

1. Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями



При $R = X_L = X_C = 20 \text{ Ом}$ комплексное входное сопротивление цепи (см. рис.) $\underline{Z}_{\text{вх}}$ равно $\underline{\quad}$ Ом, напряжение u $\underline{\quad}$ по фазе от тока i на угол ...

2. Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями



При $u = 282,8 \sin \omega t \text{ В}$, $R = 6 \text{ Ом}$, $X_L = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 2 \text{ Ом}$ действующее значение напряжения U_1 в цепи, показанной на рисунке, равно $\underline{\quad}$ В. Построить векторную диаграмму.

Практическое занятие №4
Разложение аналитической функции в ряд Фурье

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π , т.е. $S(x+2\pi) = S(x)$.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ вычисляется:

- 1) $S(x) = f(x)$ во всех точках неразрывности $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;
- 2) $S(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0)] + f(x_0 + 0)$, где x_0 – точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;
- 3) $S(x) = \frac{1}{2} [f(\pi - 0)] + f(\pi + 0)$ на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$.

В случае, когда $f(x)$ – четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (4)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (6)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (7)$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π . В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом 2ℓ , для которой выполняются на сегменте $[-\ell, \ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (8)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (10)$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (11)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (12)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (13)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (14)$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле,

определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

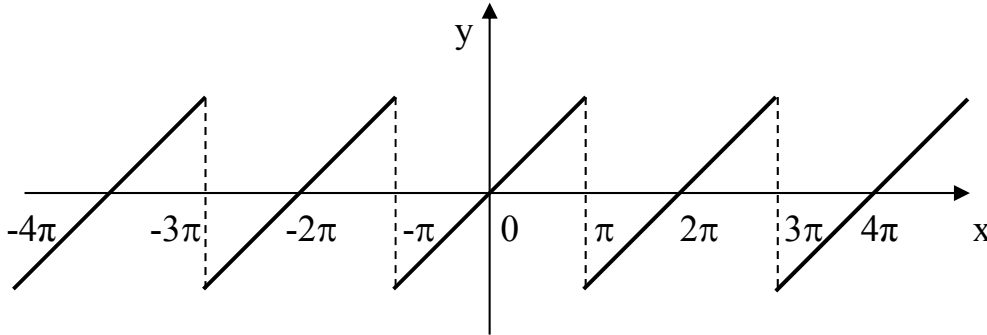


Рис. 1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты

Фурье $\left(\begin{array}{l} \text{интегрируем по частям} \\ \left. \begin{array}{l} x = u, \quad \sin nx \, dx = dv \\ dx = du, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\} \end{array} \right):$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^\pi \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{\pi} \cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

$\stackrel{=0}{\text{т.к.}}$

т.к. $-\int_{-\pi}^\pi \cos nx \, dx = -\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^\pi = 0.$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx + \dots \right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-\pi$ и π сумма ряда равна нулю. На рис. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

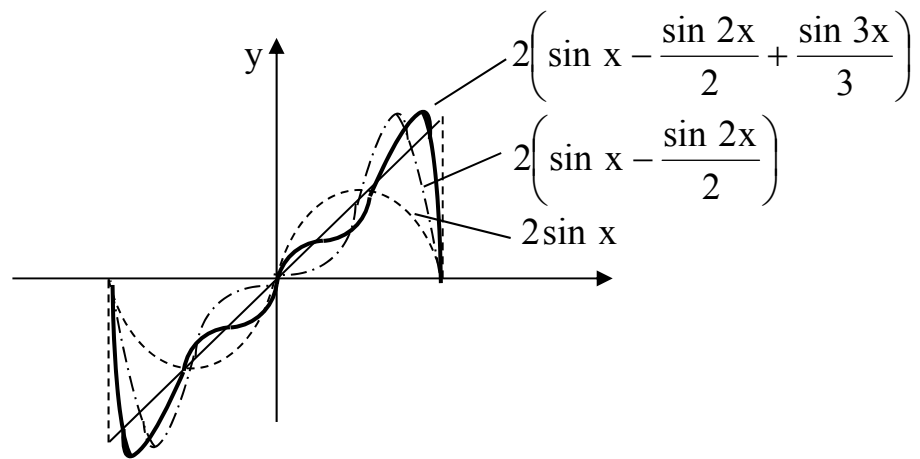


Рис. 2

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0; \quad a < x \leq \pi \\ 1, & 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = a \end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

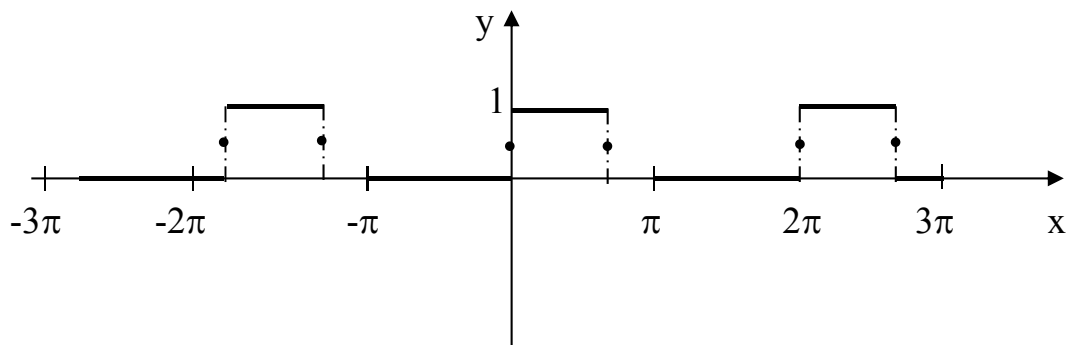


Рис. 3

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a dx = \frac{x}{\pi} \Big|_0^a = \frac{a}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \sin nx \Big|_0^a = \frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^a f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\cos nx \right) \Big|_0^a = \frac{\cos nx}{\pi n} \Big|_0^a = \frac{1 - \cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n\pi} \cdot \cos nx + \frac{1 - \cos na}{n\pi} \cdot \sin na.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале

$$(0; 4) \text{ формулой } f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

Построим график функции (рис. 4).

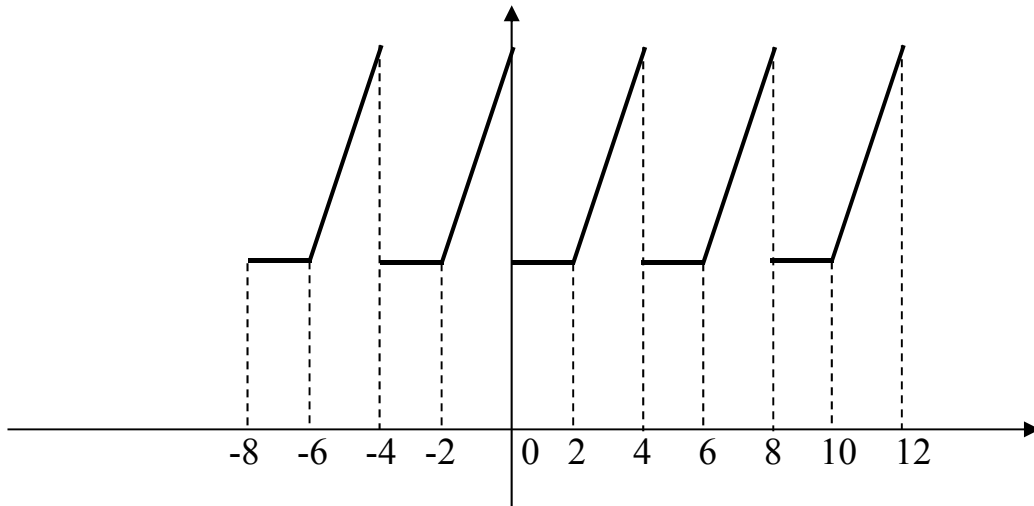


Рис. 4

Решение. Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x = 2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx + \int_2^4 3x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left(\frac{2\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] = \frac{6}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi), \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

При n – четном $\cos n\pi = 1$ и $x_n = 0$, при n – нечетном $\cos n\pi = -1$ и $a_n = \frac{12}{n^2 \pi^2}$.

При $n=0$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 dx + \int_2^4 3x dx \right) = \frac{1}{2} \left(6x \Big|_0^2 + \frac{3x^2}{2} \Big|_2^4 \right) = 15,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_2^4 3x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{12}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left(\frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \cdot 12 \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_2^0 + \frac{3}{2} \left[\frac{2x}{\pi n} \left(-\cos \frac{\pi n x}{2} \right) \Big|_2^4 + \int_2^4 \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [12(1 - \cos n\pi) - 3(2 \cdot 4 \cos 2\pi n - 4 \cos \pi n)] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [12 - 12 \cos n\pi + 24 + 12 \cos n\pi] = \frac{-12}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) -$$

$$- \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0, 2)$ сумма ряда $S(x) = 6$, в интервале $(2, 4)$ - $S(x) = 3x$. В точке разрыва $x = 2$,

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(2-0) + f(2+0)] = 6.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x) = |x|$ (рис. 5).

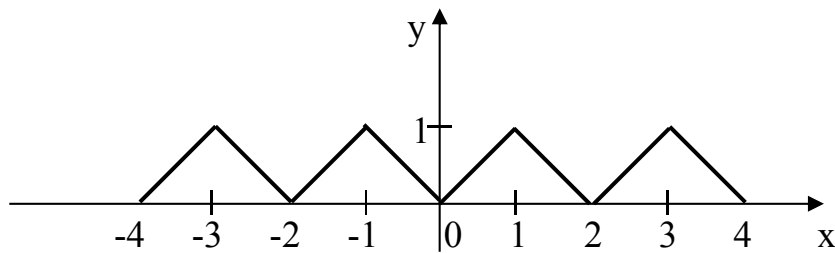


Рис. 5

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell = 1$, получим $a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$,

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = 2 \left(\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четные,} \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 3x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi} \left(\frac{\cos x}{12} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) +$
 $+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[0, 2\pi]$ формулой $f(x) = \frac{x}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $y = |\sin x|$.

Ответ:
$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{\cos 2kx}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \dots \right].$$

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

Ответ:
$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x).$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x < 3, \end{cases} \quad f(x+6) = f(x).$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{3} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = 10 - x \quad \text{при } 5 < x < 15, \quad f(x+10) = f(x).$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{n}.$$

Практическое занятие №5

Использование комплексных чисел и рядов Фурье к расчету электрических цепей несинусоидального тока

Цель: закрепить навыки использования комплексных чисел и рядов Фурье для анализа электрических цепей.

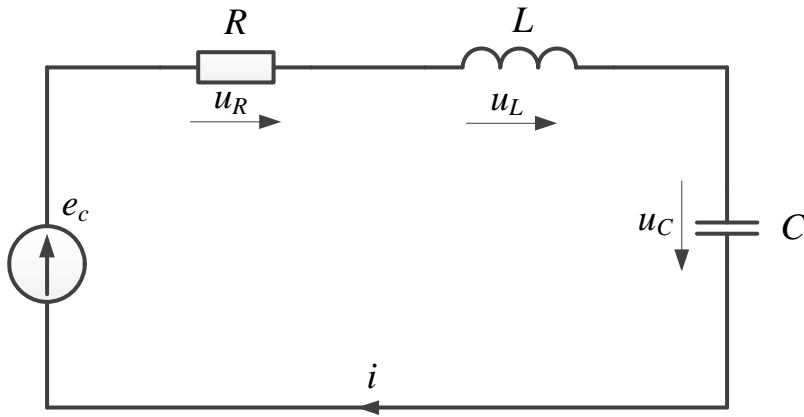
Задание: используя разложение в ряд Фурье сигналов (треугольного и однополупериодного выпрямления), рассчитать электрическую цепь, состоящую из последовательного соединения источника несинусоидального напряжения, резистивного, емкостного и индуктивного элемента. При разложении в ряд Фурье ограничиться 7 первыми гармониками, построить временные зависимости тока, протекающего в электрической цепи, напряжений на резистивного, емкостного и индуктивного элементах.

Указания: параметры элементов $L = 100$ мГн; $C = 100$ мкФ; $R = 30$ Ом.

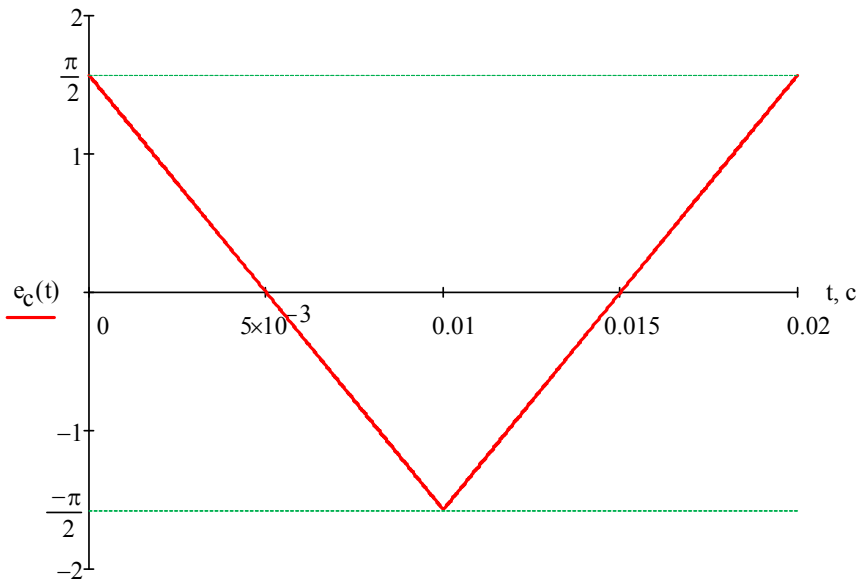
Частота основной (первой) гармоники 50 Гц.

Для расчета необходимо перейти от мгновенного значения каждой гармоники к комплексу ее действующего значения, рассчитать комплексное сопротивление элементов, произвести расчет для данной гармоники, произвести переход от комплекса действующего значения к мгновенному.

Схема цепи



Форма действующего напряжения



Частота действующего напряжения

$$f = 50 \text{ Гц} \quad \omega = 2\pi f = 314.159 \cdot \text{рад/с}$$

Разложение в ряд Фурье (пример 5 из ПЗ № 6 с заменой $\cos\varphi$ на $\sin(\varphi + \pi/2)$)

$$e_c(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{100} \frac{\sin\left[(2k+1) \cdot \omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)^2}$$

Мгновенные значения первых гармоник

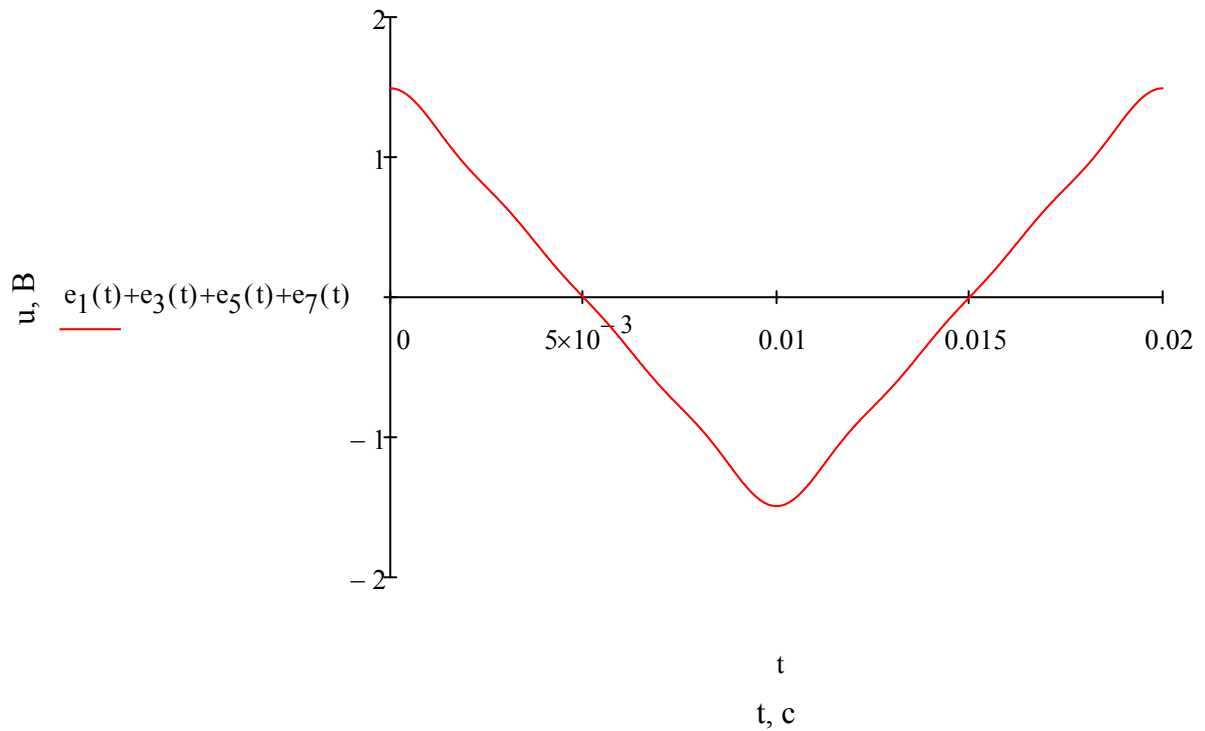
$$e_1(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

$$e_3(t) = \frac{4}{9\pi} \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

$$e_5(t) = \frac{4}{25\pi} \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

$$e_7(t) = \frac{4}{49\pi} \cdot \sin\left(700\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

Исходный сигнал



Комплексы действующих значений первых гармоник

$$\underline{E}_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.9j \cdot \text{В}$$

$$\underline{E}_3 = \frac{4}{9 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.1j \cdot \text{В}$$

$$\underline{E}_5 = \frac{4}{25 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.036j \cdot \text{В}$$

$$\underline{E}_7 = \frac{4}{49 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.018j \cdot \text{В}$$

Параметры элементов

$$C = 100 \cdot 10^{-6} \text{Ф} \quad L = 100 \cdot 10^{-3} \text{Гн} \quad R = 30 \text{Ом}$$

Сопротивления для гармоник, нулевая (постоянная составляющая) отсутствует

$$\underline{X}_{C1} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -31.831j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L1} = j \cdot \omega \cdot L = 31.416j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_1 = R + \underline{X}_{C1} + \underline{X}_{L1} = (30 - 0.415j) \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{C3} = \frac{\underline{X}_{C1}}{3} = -10.61j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L3} = \underline{X}_{L1} \cdot 3 = 94.248j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_3 = R + \underline{X}_{C3} + \underline{X}_{L3} = (30 + 83.637j) \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{C5} = \frac{\underline{X}_{C1}}{5} = -6.366j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L5} = \underline{X}_{L1} \cdot 5 = 157.08j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_5 = R + \underline{X}_{C5} + \underline{X}_{L5} = (30 + 150.713j) \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{C7} = \frac{\underline{X}_{C1}}{7} = -4.547j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L7} = \underline{X}_{L1} \cdot 7 = 219.911j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_7 = R + \underline{X}_{C7} + \underline{X}_{L7} = (30 + 215.364j) \cdot \text{Ом}$$

Расчет для первой гармоники

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = (-4.151 \times 10^{-4} + 0.03j) \cdot \text{А}$$

$$|\underline{I}_1| = 0.03 \cdot \text{А} \quad \psi_1 = \arg(\underline{I}_1) = 1.585 = 90.814^\circ$$

$$\underline{U}_{R1} = \underline{I}_1 \cdot R = (-0.012 + 0.9j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{R1}| = 0.9 \cdot \text{В} \quad \psi_{R1} = \arg(\underline{U}_{R1}) = 1.585 = 90.814^\circ$$

$$\underline{U}_{L1} = \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_{L1} = (-0.943 - 0.013j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{L1}| = 0.943 \cdot \text{В} \quad \psi_{L1} = \arg(\underline{U}_{L1}) = -3.128 = -179.221^\circ$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_{C1} = (0.955 + 0.013j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{C1}| = 0.955 \cdot \text{В} \quad \psi_{C1} = \arg(\underline{U}_{C1}) = 0.01383 = 0.792^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{I}_1| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_1) = 0.04244 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 1.585) \text{ А}$$

$$u_{R1}(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{U}_{R1}| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_{R1}) = 1.273 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 1.585) \text{ В}$$

$$u_{L1}(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{U}_{L1}| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_{L1}) = 1.333 \cdot \sin(314.2 \cdot t - 3.128) \text{ В}$$

$$u_{C1}(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{U}_{C1}| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_{C1}) = 1.351 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 0.01383) \text{ В}$$

Расчет для третьей гармоники

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = (1.06 \times 10^{-3} + 3.801j \times 10^{-4}) \cdot \text{А}$$

$$|\underline{I}_3| = 1.126 \times 10^{-3} \cdot \text{А} \quad \psi_3 = \arg(\underline{I}_3) = 0.3444 = 19.733^\circ$$

$$\underline{U}_{R3} = \underline{I}_3 \cdot R = (0.032 + 0.011j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{R3}| = 0.034 \cdot \text{В} \quad \psi_{R3} = \arg(\underline{U}_{R3}) = 0.3444 = 19.733^\circ$$

$$\underline{U}_{L3} = \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_{L3} = (-0.036 + 0.1j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{L3}| = 0.106 \cdot B \quad \psi_{L3} = \arg(\underline{U}_{L3}) = 1.915 = 109.721^\circ$$

$$\underline{U}_{C3} = \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_{C3} = (4.033 \times 10^{-3} - 0.011j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{C3}| = 0.012 \cdot B \quad \psi_{C3} = \arg(\underline{U}_{C3}) = -1.226 = -70.245^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot |I_3| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_3) = 0.001592 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.344) \text{ A}$$

$$u_{R3}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{R3}| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_{R3}) = 0.04776 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.3444) \text{ B}$$

$$u_{L3}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{L3}| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_{L3}) = 0.1501 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 1.915) \text{ B}$$

$$u_{C3}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{C3}| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_{C3}) = 0.01689 \cdot \sin(942.5 \cdot t - 1.226) \text{ B}$$

Расчет для пятой гармоники

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{E}_5}{\underline{Z}_5} = (2.298 \times 10^{-4} + 4.575j \times 10^{-5}) \cdot A$$

$$|\underline{I}_5| = 2.344 \times 10^{-4} \cdot A \quad \psi_5 = \arg(\underline{I}_5) = 0.1965 = 11.259^\circ$$

$$\underline{U}_{R5} = \underline{I}_5 \cdot R = (6.895 \times 10^{-3} + 1.373j \times 10^{-3}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{R5}| = 7.031 \times 10^{-3} \cdot B \quad \psi_{R5} = \arg(\underline{U}_{R5}) = 0.1965 = 11.259^\circ$$

$$\underline{U}_{L5} = \underline{I}_5 \cdot \underline{X}_{L5} = (-7.186 \times 10^{-3} + 0.036j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{L5}| = 0.037 \cdot B \quad \psi_{L5} = \arg(\underline{U}_{L5}) = 1.767 = 101.242^\circ$$

$$\underline{U}_{C5} = \underline{I}_5 \cdot \underline{X}_{C5} = (2.913 \times 10^{-4} - 1.463j \times 10^{-3}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{C5}| = 1.492 \times 10^{-3} \cdot B \quad \psi_{C5} = \arg(\underline{U}_{C5}) = -1.374 = -78.724^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_5(t) = \sqrt{2} \cdot |I_5| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_5) = 0.0003314 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$$

$$u_{R5}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{R5}| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_{R5}) = 0.009943 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$$

$$u_{L5}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{L5}| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_{L5}) = 0.05206 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 1.767)$$

$$u_{C5}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{C5}| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_{C5}) = 0.00211 \cdot \sin(1571.0 \cdot t - 1.374)$$

Расчет для седьмой гармоники

$$\underline{I}_7 = \frac{\underline{E}_7}{\underline{Z}_7} = (8.369 \times 10^{-5} + 1.166j \times 10^{-5}) \cdot A$$

$$|\underline{I}_7| = 8.45 \times 10^{-5} \cdot A \quad \psi_7 = \arg(\underline{I}_7) = 0.1384 = 7.93^\circ$$

$$\underline{U}_{R7} = \underline{I}_7 \cdot R = (2.511 \times 10^{-3} + 3.497j \times 10^{-4}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{R7}| = 2.535 \times 10^{-3} \cdot B \quad \psi_{R7} = \arg(\underline{U}_{R7}) = 0.1384 = 7.93^\circ$$

$$\underline{U}_{L7} = I_7 \cdot \underline{X}_{L7} = (-2.564 \times 10^{-3} + 0.018j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{L7}| = 0.019 \cdot B \quad \psi_{L7} = \arg(\underline{U}_{L7}) = 1.709 = 97.918^\circ$$

$$\underline{U}_{C7} = I_7 \cdot \underline{X}_{C7} = (5.301 \times 10^{-5} - 3.806j \times 10^{-4}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{C7}| = 3.842 \times 10^{-4} \cdot B \quad \psi_{C7} = \arg(\underline{U}_{C7}) = -1.432 = -82.048^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_7(t) = \sqrt{2} \cdot |I_7| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_7) = 0.0001195 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 0.1384)$$

$$u_{R7}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{R7}| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_{R7}) = 0.003585 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 0.1384)$$

$$u_{L7}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{L7}| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_{L7}) = 0.02628 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 1.709)$$

$$u_{C7}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{C7}| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_{C7}) = 0.0005434 \cdot \sin(2199.0 \cdot t - 1.432)$$

Суммируем все гармоники

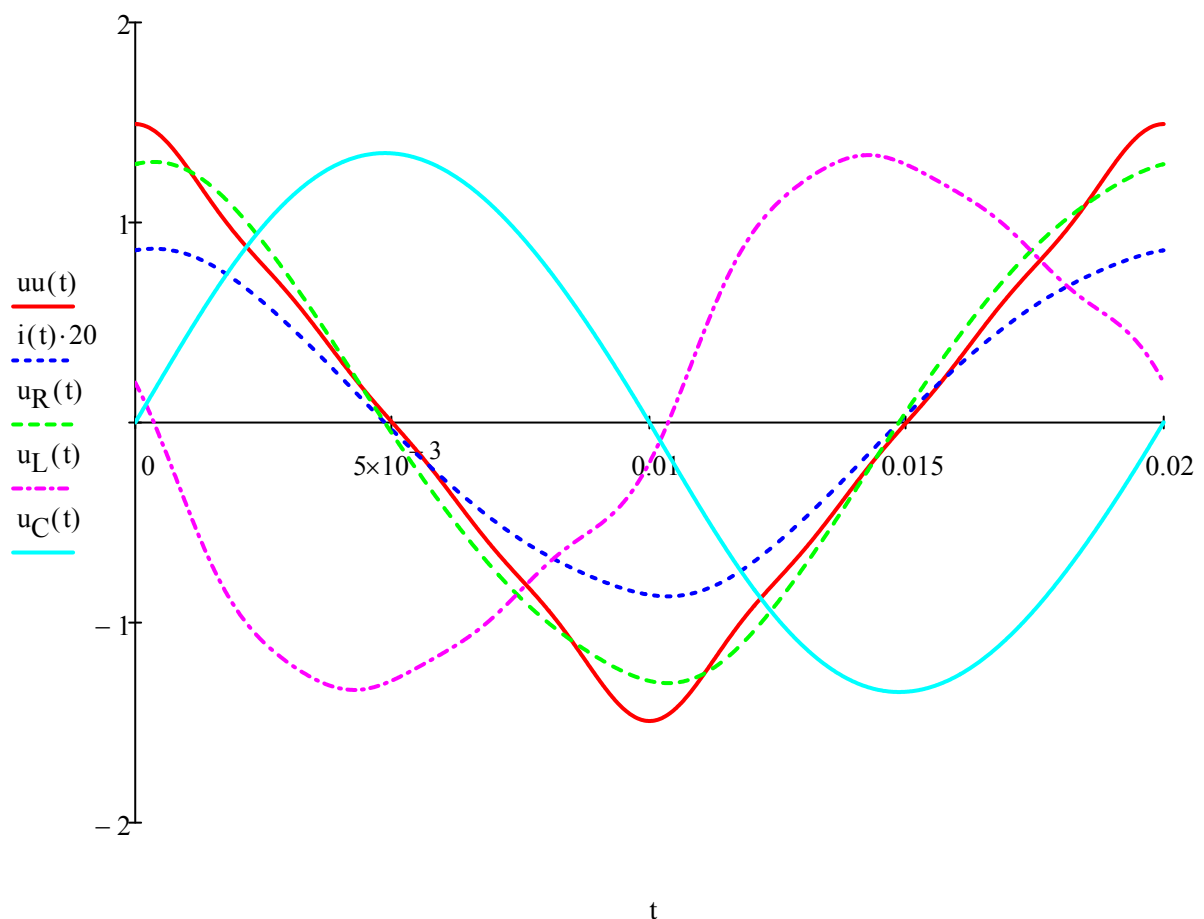
$$u_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R3}(t) + u_{R5}(t) + u_{R7}(t)$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C3}(t) + u_{C5}(t) + u_{C7}(t)$$

$$u_L(t) = u_{L1}(t) + u_{L3}(t) + u_{L5}(t) + u_{L7}(t)$$

$$uu(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) + i_7(t)$$



Практическое занятие №6
Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с
постоянными коэффициентами

Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t), \quad (11)$$

(где $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (12)$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т.е. от уравнения (11) с условиями (12) перейти к операторному уравнению

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) + Q(p) = F(p),$$

где $X(p)$ – изображение искомого решения, $F(p)$ – изображение функции $f(t)$, а $Q(p)$ – некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$. Решив операторное уравнение относительно

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ – характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (11). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо операторного уравнения получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = -e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq pX(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - p - 2.$$

Кроме того, $-e^t \doteq -\frac{1}{p-1}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид $p^2 X(p) - p - 2 + 4X(p) = -\frac{1}{p-1}$.

Отсюда находим $X(p) = \frac{p^2 + p - 3}{(p-1)(p^2 + 4)}$.

Разлагая эту дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{-1}{5(p-1)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{6p+11}{p^2+4}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, находим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5} e^t + \frac{6}{5} \cos 2t + \frac{11}{10} \sin 2t.$$

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, & x(0) = 0, \quad y(0) = 0,5; \quad z(0) = 0. \\ z' = z - x; \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = x(t) \doteq X(p) = X$; $y = y(t) \doteq Y(p) = Y$; $z = z(t) \doteq Z(p) = Z$.

Находим, что $x' \doteq pX$; $y' \doteq pY - 0,5$; $z' \doteq pZ$.

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX + Y - Z = 0, \\ pY - Z = 0,5 + \frac{2}{p+1}, \\ X + (p-1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)},$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2(p^2+1)} \doteq \\ &\doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2} \sin t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)} \doteq \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq \\ &\doteq \frac{5}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{p+5}{2(p^4-1)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq \\ &\doteq -\frac{1}{4} \cos t - \frac{5}{4} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t. \end{aligned}$$

Ответ: $x(t) \doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2} \sin t,$

$$y(t) \doteq \frac{5}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t,$$

$$z(t) \doteq -\frac{1}{4} \cos t - \frac{5}{4} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t.$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 3. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = e^{2t} \cos^2 6t + \sin 2t \sin 4t + 3.$$

Решение. В силу свойства линейности преобразования Лапласа найдем изображение каждого слагаемого:

$$\cos^2 6t = \frac{1 + \cos 12t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12t \doteq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 12^2}.$$

Применяя теорему смещения изображения к первому слагаемому, получим

$$e^{2t} \cos^2 6t \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 + 144}.$$

Изображение первого слагаемого можно было найти также по таблице оригиналов и изображений, используя формулу 9.

Второе слагаемое

$$\sin 2t \sin 4t = \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 6t \doteq \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 36}.$$

Третье слагаемое $3 \doteq \frac{3}{p}$. Окончательно получаем

$$f(t) \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2 + 144} + \frac{p}{2(p^2 + 4)} - \frac{p}{2(p^2 + 36)} + \frac{3}{p}.$$

Пример 4. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t \in (1, 3) \\ 0, & t \notin (1, 3) \end{cases}$$

Решение. Из рисунка 8 видно, что $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$; $f_1(t) = f_3(t - 1)$; $f_2 = f_4(t - 3)$.

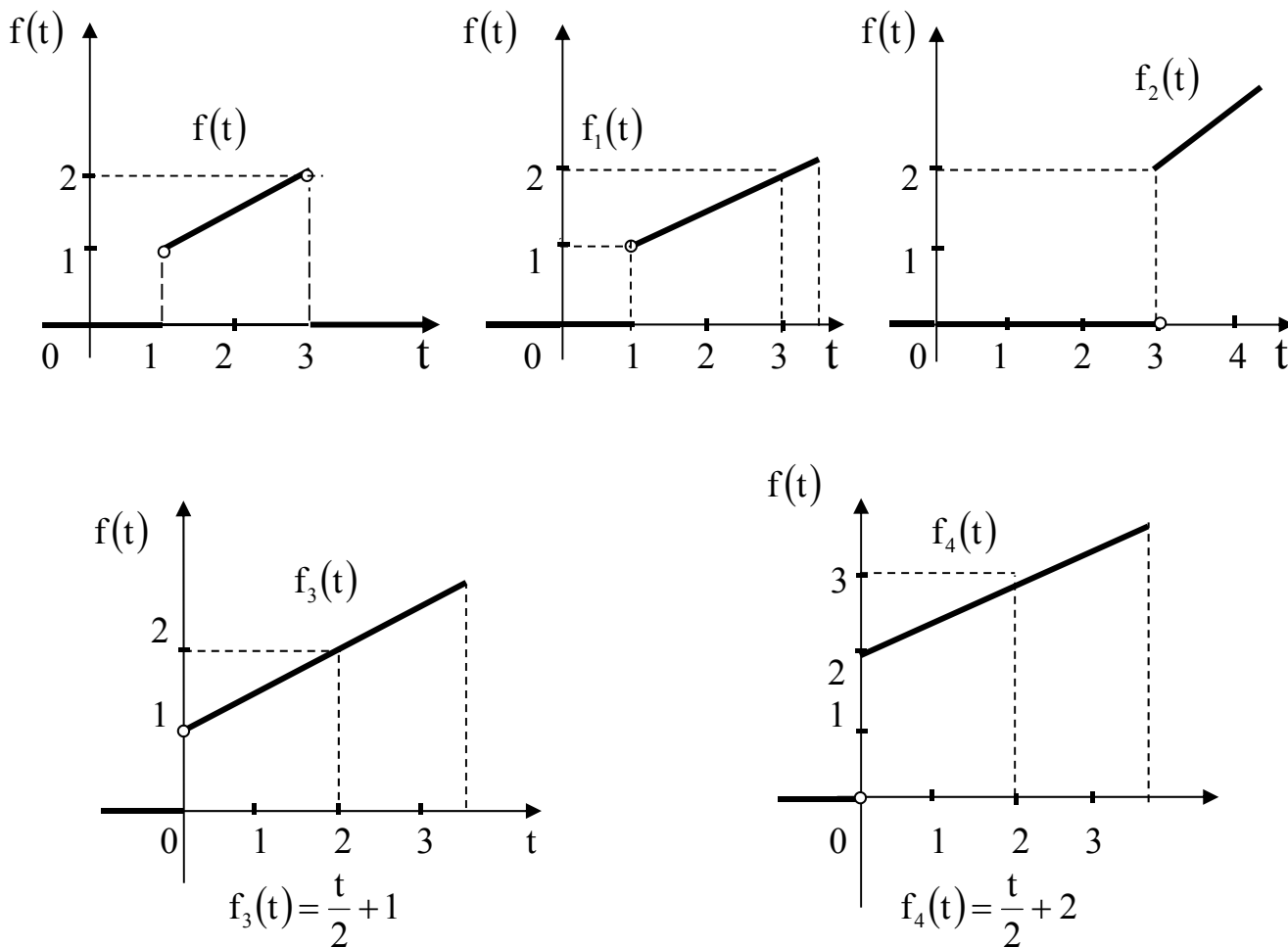


Рисунок 8

Так как $f_3(t) \doteq \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p}$; $f_4(t) \doteq \frac{1}{2p^2} + \frac{2}{p}$, по свойству запаздывания оригинала получаем $f(t) \doteq \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p} - \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{2}{p}\right)e^{-3p}$.

Образцы решения типовых заданий представлены примерами №№ 10 – 14.

Задания для самостоятельного решения

1 Решить данные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t},$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Данные системы дифференциальных уравнений решить операционным методом при указанных начальных условиях. В некоторых вариантах в скобках указан один из корней характеристического уравнения. \dot{x} означает $\frac{dx}{dt}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

Практическое занятие №7

Обработка опытных данных методами интерполирования и аппроксимации

$$x = 1,54$$

Прямая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \text{ где } q = \frac{x-x_0}{h}, y_i = f_i, \text{ а}$$

выражения вида $\Delta^k y_i$ — конечные разности.

Обратная интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \text{ где } q = \frac{x-x_n}{h}$$

Решение в Excel приведено на следующей странице.

Результат 21,759.

Решение в Mathcad:

linterp – линейная интерполяция, interp – сплайн интерполяция, cspline – функция подбирающая коэффициенты для кубических сплайнов.

$$x := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 2.718 \\ 3.320 \\ 4.055 \\ 4.953 \\ 6.049 \\ 7.389 \\ 9.025 \\ 11.023 \\ 13.464 \\ 16.445 \\ 20.086 \\ 24.533 \\ 29.964 \\ 36.598 \\ 44.701 \end{pmatrix}$$

$$\text{linterp}(x, y, 1.54) = 21.865$$

$$\text{interp}(\text{cspline}(x, y), x, y, 1.54) = 21.759$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	
1																			
2	x	y																	
3	0,5	2,718	0,602	0,133	0,030	0,005	0,006	-0,011	0,024	-0,044	0,071	-0,099	0,112	-0,077	-0,063	0,390			
4	0,6	3,320	0,735	0,163	0,035	0,011	-0,005	0,013	-0,020	0,027	-0,028	0,013	0,035	-0,140	<u>0,327</u>				
5	0,7	4,055	0,898	0,198	0,046	0,006	0,008	-0,007	0,007	-0,001	-0,015	0,048	-0,105	<u>0,187</u>					
6	0,8	4,953	1,096	0,244	0,052	0,014	0,001	0,000	0,006	-0,016	0,033	-0,057	<u>0,082</u>						
7	0,9	6,049	1,340	0,296	0,066	0,015	0,001	0,006	-0,010	0,017	-0,024	<u>0,025</u>							
8	1	7,389	1,636	0,362	0,081	0,016	0,007	-0,004	0,007	-0,007	<u>0,001</u>								
9	1,1	9,025	1,998	0,443	0,097	0,023	0,003	0,003	0,000	<u>-0,006</u>									
10	1,2	11,023	2,441	0,540	0,120	0,026	0,006	0,003	<u>-0,006</u>										
11	1,3	13,464	2,981	0,660	0,146	0,032	0,009	<u>-0,003</u>											
12	1,4	16,445	3,641	0,806	0,178	0,041	<u>0,006</u>												
13	1,5	20,086	4,447	0,984	0,219	<u>0,047</u>													
14	1,6	24,533	5,431	1,203	<u>0,266</u>														
15	1,7	29,964	6,634	<u>1,469</u>															
16	1,8	36,598	<u>8,103</u>	=B17-B16															
17	1,9	<u>44,701</u>																	
18	x=	<u>1,540</u>																	
19	h=	0,10	=A4-A3																
20	t=	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4
21			10,4	97,76	821,18	6076,76	38891,3	2E+05	924057	3E+06	8E+06	1E+07	4E+06	-3E+06	4E+06	-1E+07	=C21*(D20+1-D2)		
22		2,718	6,261	6,501	4,106	1,266	1,945	-3,209	4,400	-3,429	1,475	-0,288	0,012	0,000	0,000	0,000	=C3*C21/ФАКТР(C2)		
23		<u>21,75899</u>	=СУММ(B22:P22)																
24																			
25	t=	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6
26			-3,600	9,36	-14,976	8,9856	3,59424	5,032	12,0766	41,061	180,67	975,6	6243,8	46204	388117	4E+06	=C26*(D25+D2-1)		
27		<u>44,701</u>	-29,1708	6,87492	-0,6639	0,0176	0,00018	-2E-05	-1,4E-05	-6E-06	5E-07	7E-06	1E-05	2E-05	2E-05	2E-05	=C26*C16/ФАКТР(C2)		
28		<u>21,75899</u>	=СУММ(B27:P27)																
29																			

В задании в соответствии с вариантом выполнить:

а) пользуясь формулами интерполяции Ньютона (1-ой и 2-ой) . вычислить e^x или $\sin(x)$ для заданных значений аргумента x в Excel;

б) полученные решения проверить интерполированием в MathCAD;

в) выполнить в MathCAD линейную регрессию (аппроксимацию). Для первых 10 вариантов найти значение e^x , для вторых 10 – $\sin(x)$. Значение Σ равно сумме двух последних цифр шифра зачетной книжки.

Таблица 7.1 - Значения аргументов интерполяционных многочленов

Σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0,507	0,512	0,523	0,527	0,533	0,541	0,547	0,553	0,558	0,563
Σ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
x	1,151	1,218	1,345	1,421	1,538	1,609	1,732	1,849	1,929	

Таблица 7.2 - Значения функции $y = e^x$

x	e^x	x	e^x	x	e^x
0,50	1,6487	0,54	1,7160	0,58	1,7860
0,51	1,6653	0,55	1,7333	0,59	1,8040
0,52	1,6820	0,56	1,7507	0,60	1,8221
0,53	1,6989	0,57	1,7683	-	-

Таблица 7.3 - Значения функций $y = \sin(x)$

x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$
1,1	0,89121	1,5	0,99749	1,9	0,94630
1,2	0,93204	1,6	0,99957	2,0	0,90930
1,3	0,96356	1,7	0,99166	-	-
1,4	0,98545	1,8	0,97385	-	-

Практическое занятие №8

Численные методы решения дифференциальных уравнений

$$R = 5 \text{ Ом}$$

$$C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$E = 100 \text{ В}$$

Подставим в уравнение $U'_C = E / (R \cdot C) - U_C / (R \cdot C)$ значения из задания, получим: $U'_C = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_C$

Найдем шаг Δt из условия что на графике будет отражено 20 точек и переходный процесс завершиться за $4 \cdot R \cdot C$, следовательно, $\Delta t = 4 \cdot R \cdot C / 20 = 5 \cdot 10^{-6}$.

Метод Эйлера решения дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$U_i = U_{i-1} + \Delta t \cdot U'_{i-1}$$

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t$$

Составим таблицу в Excel, при $t=0$ напряжение $U=0$, так как конденсатор заряжается.

U=	0	=B2+5*(10^-6)*B4
t=	0	=B3+5*(10^-6)
U' =	=4*(10^6)-4*(10^4)*B2	

Вычислим 20 значений:

№ шага	0	1	2	3	4	5	6	7
U=	0	20	36	48,8	59,04	67,232	73,7856	79,02848
t=	0	0,000005	0,00001	0,000015	0,00002	0,000025	0,00003	0,000035
U' =	4000000	3200000	2560000	2048000	1638400	1310720	1048576	838860,8

№ шага	8	9	10	11	12	13	14
U=	83,22278	86,57823	89,26258	91,41007	93,12805	94,50244	95,60195
t=	0,00004	0,000045	0,00005	0,000055	0,00006	0,000065	0,00007
U' =	671088,6	536870,9	429496,7	343597,4	274877,9	219902,3	175921,9

№ шага	15	16	17	18	19	20
U=	96,481563	97,1852502	97,7482	98,19856	98,55885	98,84708
t=	0,000075	0,00008	0,000085	0,00009	0,000095	0,0001
U' =	140737,49	112589,991	90071,99	72057,594	57646,08	

Вычислительный эксперимент:

Изменим, значение E в 5, 10 и 50 раз, получим три новых дифференциальных уравнения:

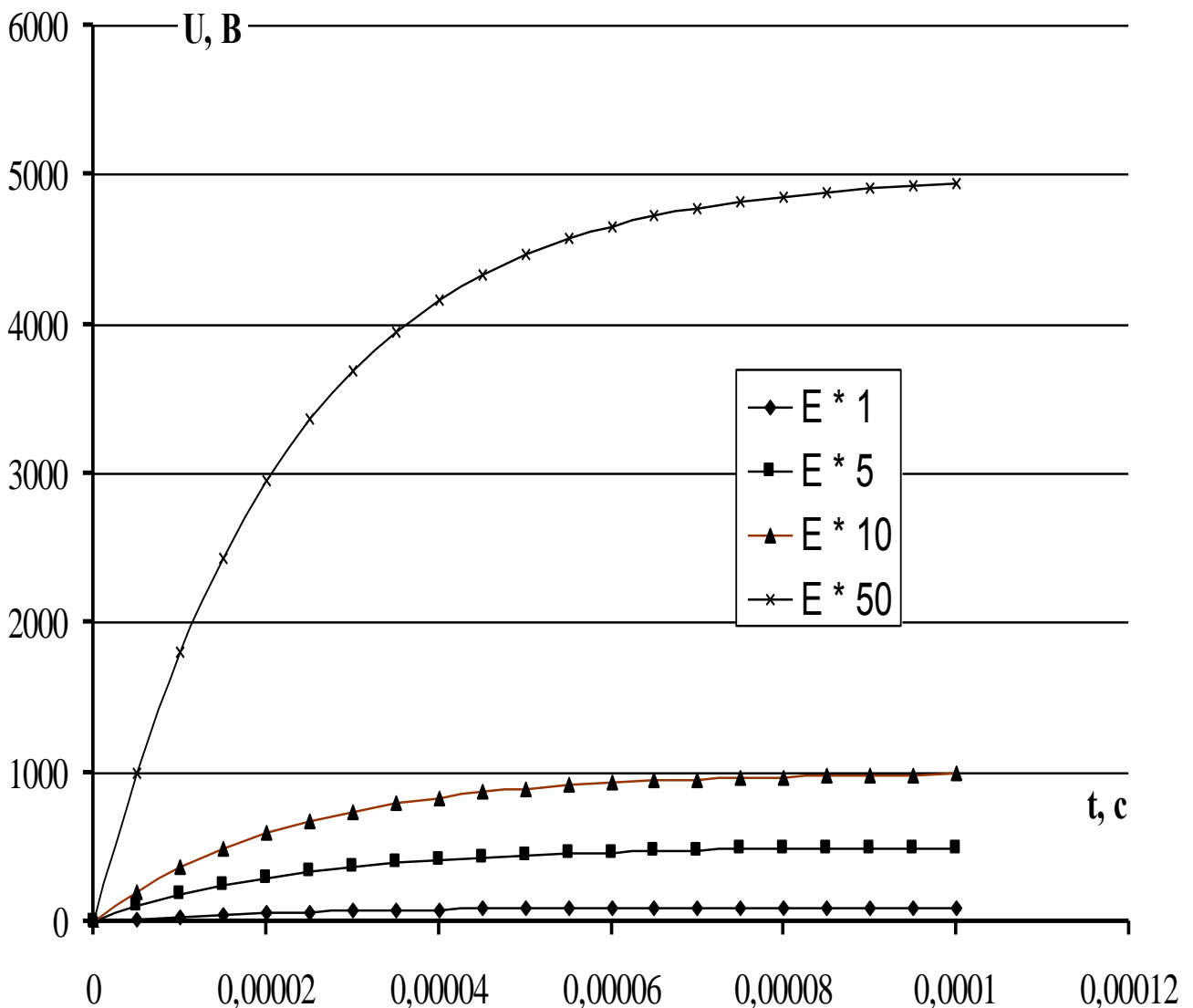
$$U'_C = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_C$$

$$U_{5C}' = 20 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{5C}$$

$$U_{10C}' = 40 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{10C}$$

$$U_{50C}' = 200 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{50C}$$

Аналогично предыдущему решению строятся таблицы для 20 значений для каждого из уравнений. По полученным таблицам строятся графики:



В задании в соответствии вариантом выполнить:

а) описать переходный процесс в электрической цепи в виде дифференциального уравнения;

б) решить полученное уравнение методом Эйлера в Excel, используя рекуррентное выражение;

в) исследовать динамическую модель при изменении одного из параметров в 2, 5 и 10 раз. Построить графики зависимостей.

При включении ключа «Я» конденсатор заряжается до $U_c = E$.

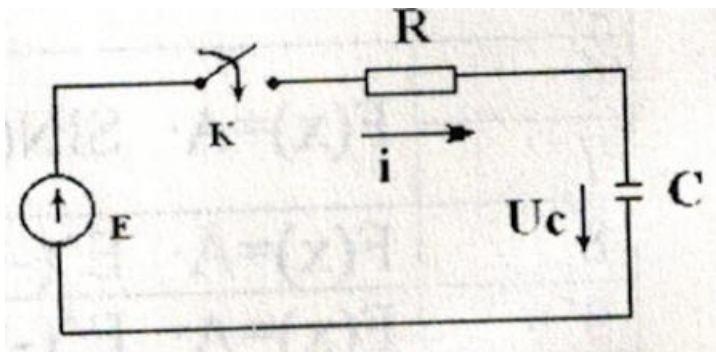
Дифференциальное уравнение заряда $RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ (*).

Моделируя уравнение (*) на ЭВМ, заменяя RC на τ , перепишем:

$$\tau \frac{dU_c}{dt} + U_c = E \text{ или } \frac{dU_c}{dt} = \frac{E}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$$

Примечание: считать, что переходный процесс завершен через $t = (3-4)\tau$, $\tau = RC$

Соответственно следует выбирать шаг интегрирования Δt для получения полной картины заряда конденсатора.



Из уравнения $RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ имеем $\tau \frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ или $\frac{dU_c}{dt} = \frac{E}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$.

Для $R = 100$ Ом и $C = 1$ мкФ, получим $\tau = 10^{-4}$ с.

При моделировании дифференциального уравнения следует правильно выбирать диапазон аргумента (интервал времени) и его шаг изменения.

Так как процесс заряда конденсатора определяется постоянной времени и завершается через 3-4 τ , то Δt - шаг изменения аргумента искомой функции $U_c = f(t)$ должен быть выбран из этих соображений.

Так, например, для $R = 100$ Ом и $C = 1$ мкФ $\tau = RC = 100 \cdot 10^{-6} = 10^{-4}$ с, откуда для получения 10 точек на графике при полном заряде конденсатора $\Delta t = 0.1 \cdot 3\tau = 3 \cdot 10^{-5}$ с.

Ниже приведен график заряда конденсатора при различном интервале моделирования ($t = 0-2$ - кривая 1 и $t = 0-100000$ - кривая 2).

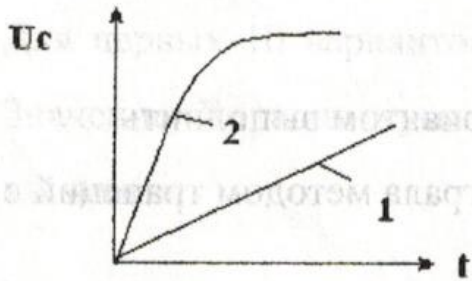


Таблица 3 - Значения параметров электрической цепи

№ варианта	R (Ом)	C (мкФ)	E (В)
1	2	3	4
*0	10	1	100
*2	5	0,5	50
3	100	1	100
*4	50	1	100
5	100	0,5	50
*6	10	10	100
7	5	5	100
*8	100	10	100
9	50	10	100
10	1	5	100
11	25	15	100
12	50	5	50
1	100	3	100
-	2	3	4
13	50	15	100
14	25	1	100
15	100	0,5	100
16	50	5	100
17	100	3	50
18	50	10	50

Список рекомендуемой литературы

1. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев, О.В. Зими́на, А.И. Кириллов [и др.]; под ред. проф. А.И. Кириллова. - [2-е изд., стер.]. - М.: Физматлит, 2003. - 400 с. - (Решебник). - ISBN 5-9221-0423-3
2. Методы решения специальных задач с использованием информационных технологий Электронный ресурс: Практикум / сост. А. С. Ермаков. - Москва: Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2014. - 133 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-0973-3
3. Порсев, Е. Г. Организация и планирование экспериментов : учебное пособие / Е.Г. Порсев ; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск: НГТУ, 2010. - 155 с. - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-7782-1461-30.
4. Ашихмин, В. Н. Введение в математическое моделирование Электронный ресурс : Учебное пособие / В. Н. Ашихмин, М. Б. Гитман, И. Э. Келлер. - Введение в математическое моделирование, 2019-04-20. - Москва: Логос, 2004. - 439 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 5-94010-272-7
5. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - Москва: Наука, 1971. - 254 с.: ил. - (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов). - <http://biblioclub.ru/>
6. Семенов, Б. А. (д-р техн. наук). Инженерный эксперимент в промышленной теплотехнике, теплоэнергетике и теплотехнологиях:

учеб. пособие для вузов / Б.А. Семенов. - 2-е изд., доп. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. - 393 с.: ил.; 21. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Гриф: Доп. УМО. - Библиогр.: с. 388-390. - ISBN 978-5-8114-1392-8

7. Яковлев, С. В. (СКФУ). Методы и алгоритмы решения задач системного анализа: учебное пособие: практикум / С. В. Яковлев; Сев.-Кав. федер.ун-т. - Ставрополь: СКФУ, 2014. - 85 с. - Неопубликованное издание