

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал)

Методические указания по выполнению практических работ
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»

Направление подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника
Профиль подготовки – Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов
Квалификация выпускника – бакалавр

Невинномысск 2021

Методические указания предназначены для выполнения практических работ по дисциплине «Теоретические основы электротехники» для студентов направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и соответствуют требованиям ФГОС ВО направления подготовки бакалавров.

Составитель: Б.А. Добнер

Оглавление

Введение.....	4
1. Методы преобразования пассивных электрических цепей	5
1.1. Последовательное включение резисторов.....	5
1.2. Параллельное соединение элементов.....	6
1.3. Преобразование элементов, соединенных по схемам звезды и треугольника.....	6
2. Методы расчета цепей постоянного тока	12
2.1 Метод эквивалентного преобразования схем.....	12
2.2 Метод непосредственного использования законов Кирхгофа	15
2.3 Метод контурных токов	17
2.4 Метод узловых потенциалов.....	21
2.5 Метод узлового напряжения (двух узлов).....	24
2.6 Метод наложения.....	26
2.7 Метод эквивалентного генератора	28
3. Методы расчета электрических цепей синусоидального тока	29
3.1 Расчет цепей по мгновенным значениям.....	29
3.2 Расчет цепей синусоидального тока символическим методом	37
4. Расчет электрических цепей трехфазного тока.....	43
4.1 Расчет цепей при соединении генератора и нагрузки по схеме звезда.....	44
4.2 Соединение генератора и нагрузки по схеме «треугольник».....	45
5. Расчет линейных электрических цепей при несинусоидальных напряжениях и токах.....	53
6. Четырехполюсники.....	59
7. Переходные процессы в линейных электрических цепях Общие положения и причины возникновения.....	62
7.1 Классический метод расчета переходных процессов.....	66
7.2 Операторный метод расчета переходных процессов	77
8. Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока.....	86
8.1 Последовательное соединение двух нелинейных резисторов.....	86
8.2 Параллельное соединение двух нелинейных резисторов	87
8.3 Смешанное соединение нелинейных резисторов	88
8.4 Аналитический метод расчета нелинейной цепи постоянного тока.....	88
9. Расчет магнитных цепей с постоянной намагничивающей силой.....	92
9.1 Расчет неразветвленных магнитных цепей	92
9.2 Расчет разветвленных магнитных цепей	96
9.2.1 Расчет разветвленной магнитной цепи с одной.....	96
9.2.2 Расчет разветвленной магнитной цепи методом двух узлов.....	96
10. Электрические цепи с распределенными параметрами	99
11. Примеры решения задач по теории поля.....	104
11.1 Электростатическое поле	104
11.2 Магнитное поле постоянного тока.....	119
Литература.....	125

Введение

Практические занятия играют существенную роль при изучении дисциплин «Теоретические основы электротехники». Они направлены на формирование у студентов навыков расчета электрических и магнитных цепей при различных режимах работы того или иного электротехнического устройства. Наряду с этим практические занятия позволяют значительно глубже усвоить теоретический материал дисциплины.

В них рассматриваются основы методов расчета и задачи по основным разделам рабочих программ дисциплин: «Теоретические основы электротехники». Даны примеры расчета таких цепей, приводятся задачи, используемые при проведении практических занятий по дисциплине.

Методическое пособие используется при проведении групповых практических занятий и для самостоятельной работы студентов.

1. Методы преобразования пассивных электрических цепей

В ряде случаев встречаются электрические цепи, которых отдельные группы приемников включены по той или иной схеме и цепь может быть достаточно легко рассчитана, если эту группу приемников заменить эквивалентной схемой, в которой эти приемники включены иначе. Для этой цели используют способы преобразования пассивных электрических цепей. Эти способы основаны на следующих соотношениях:

1.1. Последовательное включение резисторов

Соединение элементов называют последовательным, если в них протекает один и тот же ток (рис.1).

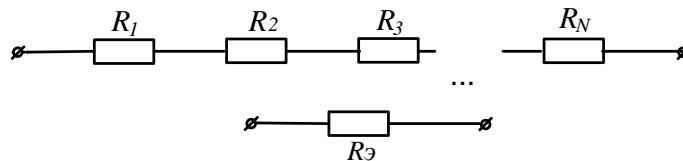


Рисунок 1

При последовательном соединении резисторов сопротивление эквивалентного приемника определяется как арифметическая сумма сопротивлений отдельных приемников:

$$R_{\text{э}} = \sum R_n . \quad (1)$$

1.2. Параллельное соединение элементов.

Соединение нескольких элементов называют параллельным, если напряжение на каждом из элементов имеет одно и то же значение (рис.2).

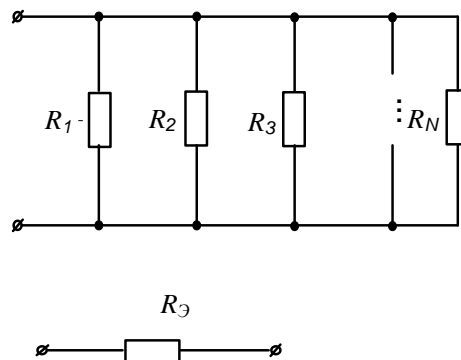


Рисунок 2

При параллельном соединении эквивалентное сопротивление находят по формуле:

$$1 / R_{\text{э}} = \sum 1/R_n . \quad (2)$$

1.3. Преобразование элементов, соединенных по схемам звезды и треугольника

В ряде случаев встречаются соединения групп элементов, для которых необходимо выполнить преобразование элементов, соединенных по схеме треугольника или по схеме трехлучевой звезды (рис.3).

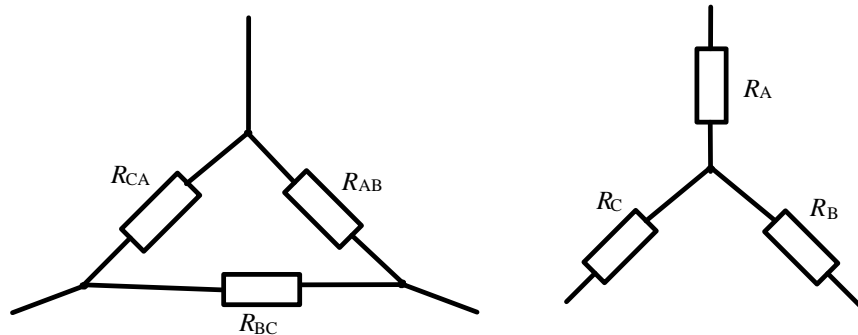


Рисунок 3

В этом случае свернуть схему удастся, применив преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную трехлучевую звезду или наоборот. При этом сопротивления эквивалентной звезды могут быть пересчитаны через сопротивления треугольника при помощи формул:

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \quad (3)$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}};$$

$$R_C = \frac{R_{BC} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

Возможна и обратная замена трехлучевой звезды эквивалентным треугольником:

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C}; \quad (4)$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A};$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C \cdot R_A}{R_B}.$$

Рассмотрим пример решения подобных задач.

В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 4, рассчитать эквивалентное сопротивление относительно зажимов ad, если $R_2=12\text{Ом}$; $R_3=9\text{Ом}$; $R_4=12\text{Ом}$; $R_5=19,5\text{Ом}$; $R_6=15\text{Ом}$.

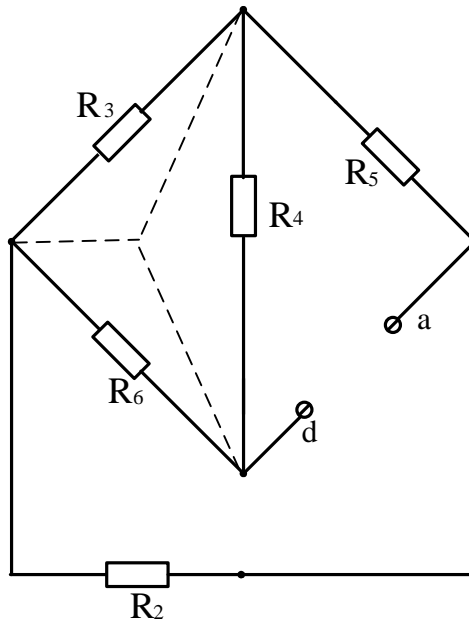


Рисунок 4

Решение

Преобразуем треугольник резисторов R_3, R_4, R_6 в эквивалентную звезду. После такого преобразования схема принимает вид (рис. 5)

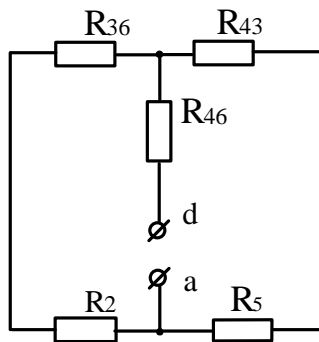


Рисунок 5

Дальнейшее решение задачи сводится к замене последовательно и параллельно включенных резисторов, эквивалентными:

$$R_{236} = R_2 + R_{36} = 12 + 3,75 = 15,75\text{Ом};$$

$$R_{435} = R_5 + R_{43} = 19,5 + 3 = 22,5\text{Ом};$$

Искомое входное сопротивление

$$R_{\text{ex}} = \frac{R_{236} \cdot R_{435}}{R_{236} + R_{435}} + R_{46} = \frac{15,75 \cdot 22,5}{38,25} + 5 = 14,3 \text{ Ом.}$$

Задачи

Задача 1. Определить эквивалентное сопротивление цепи (рис.6) между зажимами АВ, если $R_1=R_2=150\text{ Ом}$, $R_3=R_6=200\text{ Ом}$, $R_4=R_5=17,50\text{ Ом}$, $R_7=120\text{ Ом}$.

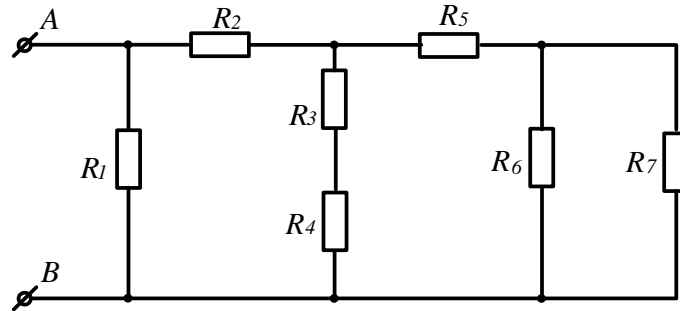


Рисунок 6

Задача 2. Определить эквивалентное сопротивление цепи (рис.7) между зажимами АВ, если $R_1=2,50\text{ Ом}$, $R_2=60\text{ Ом}$, $R_3=20\text{ Ом}$, $R_4=1,50\text{ Ом}$, $R_5=30\text{ Ом}$

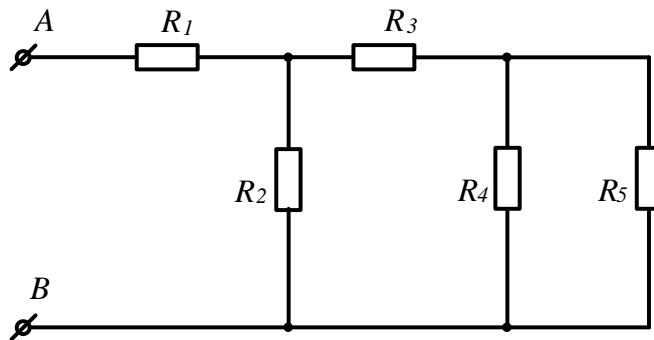


Рисунок 7

Задача 3. В схеме (рис.8) значения сопротивлений резисторов одинаковы и равны $R=100\text{ Ом}$. Определить в общем виде значения сопротивлений между зажимами АВ, АС, АД, СD, АF.

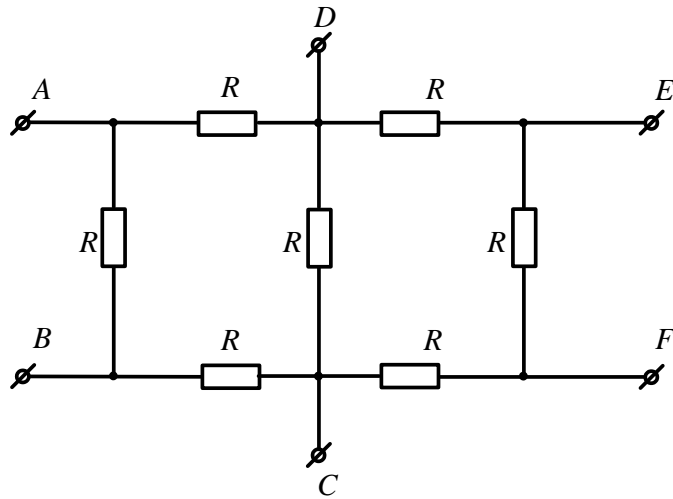


Рисунок 8

Задача 4. Определить эквивалентное сопротивление цепи (рис.9) между зажимами АВ, если $R_1=R_5=30\text{Ом}$, $R_2=2,8\text{Ом}$, $R_3=1\text{Ом}$, $R_4=6,2\text{Ом}$, $R_6=2\text{Ом}$.

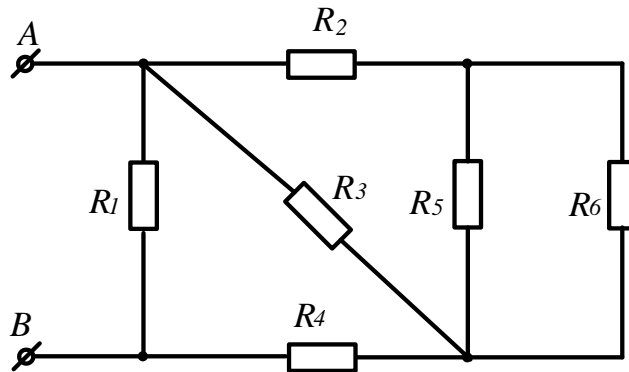


Рисунок 9

Задача 5. Определить эквивалентное сопротивление цепи (рис.10) и ток на входе, если $U=114\text{В}$; $R_1=R_7=300\text{Ом}$; $R_2=R_3=100\text{Ом}$; $R_4=R_8=260\text{Ом}$; $R_5=110\text{Ом}$; $R_6=100\text{Ом}$

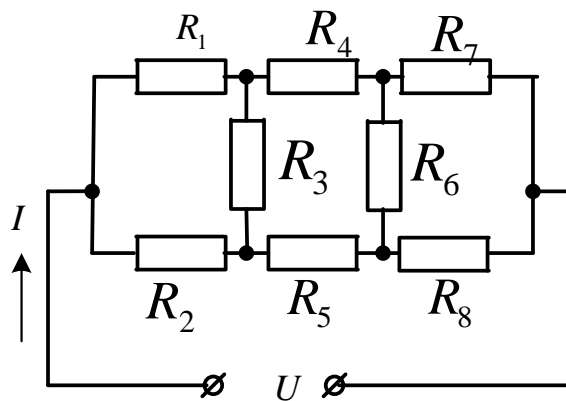


Рисунок 10

Задача 6. Определить эквивалентное сопротивление схемы (рис.11), если $R_2=180\text{Ом}$; $R_3=60\text{Ом}$; $R_4' = 100\text{Ом}$; $R_4'' = 3.5\text{Ом}$; $R_5=22.5\text{Ом}$; $R_6' = 150\text{Ом}$; $R_6'' = 600\text{Ом}$

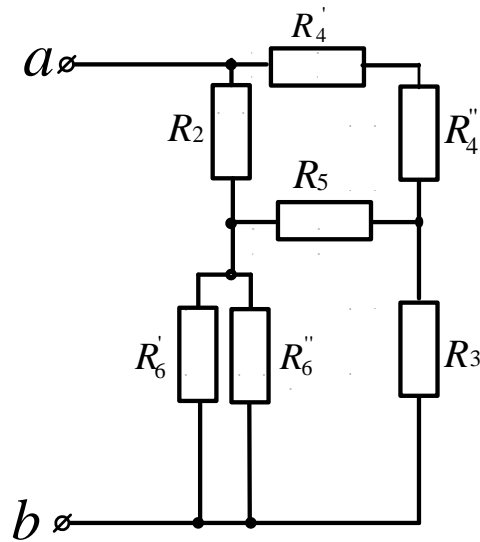


Рисунок 11

Задача 7. Определить эквивалентное сопротивление схемы (рис.12) относительно зажимов ab, если $R_1=60\text{Ом}$; $R_2=120\text{Ом}$; $R_3=80\text{Ом}$; $R_4=80\text{Ом}$; $R_5=120\text{Ом}$.

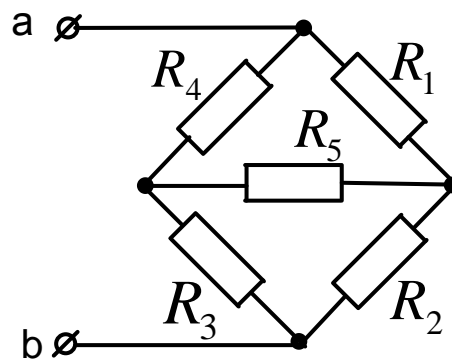


Рисунок 12

Задача 8. Определить эквивалентное сопротивление схемы (рис.13) относительно зажимов ab, если $R_1=80\text{Ом}$; $R_2=24\text{Ом}$; $R_3=60\text{Ом}$; $R_4=20\text{Ом}$; $R_5=40\text{Ом}$; $R_6=100\text{Ом}$.

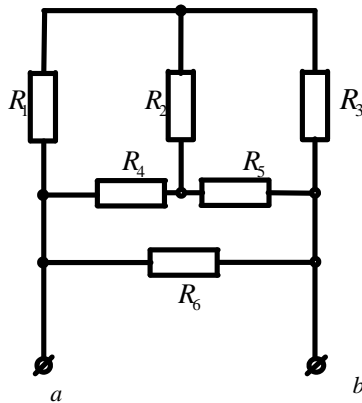


Рисунок 13

Задача 9. Определить эквивалентное сопротивление схемы (рис.14) относительно зажимов ab, если $R_2=18\text{Ом}$; $R_3=20\text{Ом}$; $R_4=12\text{Ом}$; $R_5=10\text{Ом}$ $R_6=8\text{Ом}$.

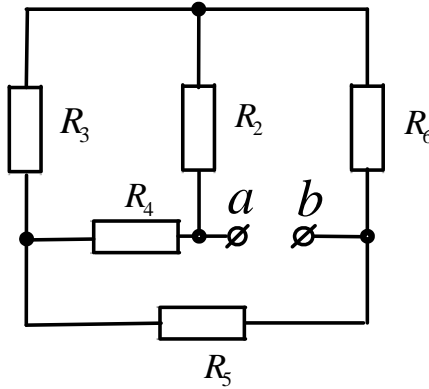


Рисунок 142

Задача 10. Определить эквивалентное сопротивление схемы (рис.15) относительно зажимов ab, если $R_2=26\text{Ом}$; $R_3=14\text{Ом}$; $R_4=10\text{Ом}$; $R_5=16\text{Ом}$ $R_6=20\text{Ом}$. $R_7=R_8=10\text{Ом}$.

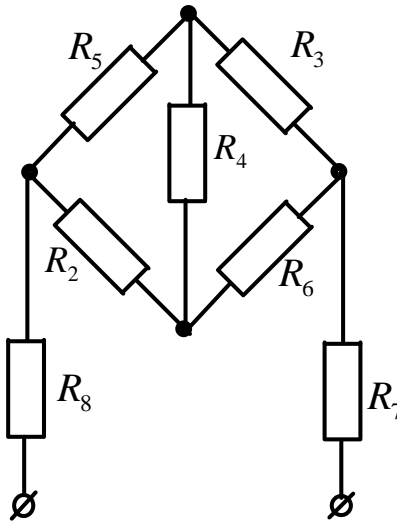


Рисунок 15

Задача 11. Определить эквивалентное сопротивление схемы (рис.16) относительно зажимов ab, если $R_2=120\text{Ом}$; $R_3=150\text{Ом}$; $R_4^{\prime}=10\text{Ом}$; $R_4^{\prime\prime}=70\text{Ом}$; $R_5=225\text{Ом}$; $R_6^{\prime}=12\text{Ом}$. $R_6^{\prime\prime}=48\text{Ом}$.

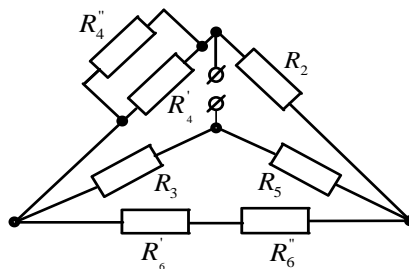


Рисунок 16

2. Методы расчета цепей постоянного тока

Прежде чем приступить к решению задач этого раздела, необходимо изучить методы расчета цепей постоянного тока по учебнику или конспекту.

2.1 Метод эквивалентного преобразования схем

В ряде случаев расчет сложной электрической цепи упрощается, если в ее схеме замещения заменить группу резистивных элементов другой эквивалентной группой, в которой эти элементы соединены иначе. Взаимная эквивалентность заключается в том, что после замены режим работы остальной части цепи не изменится.

Метод может быть успешно применен для расчета таких цепей, в которых имеются резисторы, включенные между собой последовательно, параллельно или по смешанной схеме, а так же по схеме звезда или треугольник.

Рассмотрим пример решения подобных задач.

В схеме электрической цепи, изображенной на рисунке 17, сопротивления резисторов $R_1=50\text{Ом}$, $R_2=R_3=15\text{Ом}$, $R_4=R_5=40\text{Ом}$. Напряжение на входных зажимах $U=120\text{В}$. Рассчитать токи ветвей и напряжения на участках.

Решение

Эквивалентное сопротивление параллельно включенных резисторов R_4 и R_5

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{40 \cdot 40}{80} = 20\text{Ом}$$

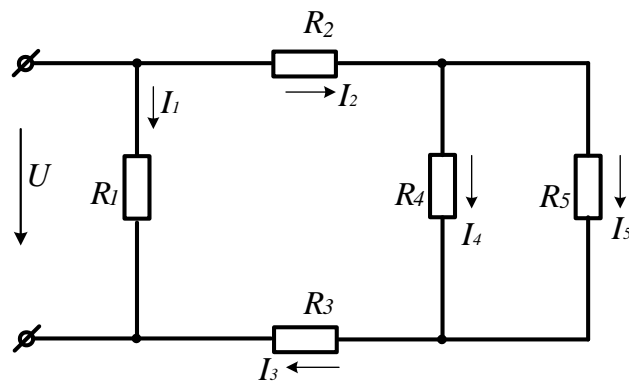


Рисунок 17

После этого преобразования схема принимает вид (рис.18)

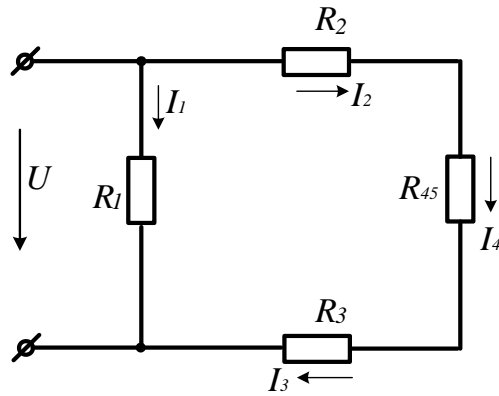


Рисунок 18

Резисторы R_2, R_3, R_4, R_5 включены последовательно. Заменяем их эквивалентным резистором R .

$$R_{2345} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 15 + 15 + 20 = 50 \text{ Ом}$$

После этого преобразования схема представляет собой два параллельно включенных резистора. Для расчета токов I_1 и $I_2 = I_3$ воспользуемся законом Ома:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{120}{50} = 2,4 \text{ А}; \quad I_2 = I_3 = \frac{U}{R_{2345}} = \frac{120}{50} = 2,4 \text{ А}.$$

Для расчета токов I_4 и I_5 найдем напряжение на параллельном соединении резисторов R_4 и R_5 . $U_{45} = I_2 \cdot R_4 = 2,4 \cdot 20 = 48 \text{ В}$. Токи I_4 и I_5 найдем по закону Ома: $I_4 = U_{45} / R_4 = 48 / 40 = 1,2 \text{ А}; \quad I_5 = U_{45} / R_5 = 48 / 40 = 1,2 \text{ А}$.

Для расчета тока в неразветвленной части схемы воспользуемся первым законом Кирхгофа: $I = I_1 + I_2 = 2,4 + 2,4 = 4,8 \text{ А}$.

Задачи

Задача 12. К источнику постоянного тока с ЭДС $E=125\text{В}$ подключены последовательно три резистора с сопротивлениями $R_1=100\text{Ом}$; $R_2=30\text{Ом}$; $R_3=120\text{Ом}$. Определить ток в цепи, напряжения и мощность, выделяемую на каждом резисторе.

Задача 13. Напряжение на зажимах источника ЭДС, нагруженного сопротивлением $R=25\text{Ом}$, $U=4,5\text{В}$. Напряжение на зажимах того же источника без нагрузки $U_{\text{хх}}=4,77\text{В}$. Определить внутреннее сопротивление источника.

Задача 14. Определить токи ветвей (рис. 19), если напряжение на входе цепи $U_{\text{AB}}=12\text{В}$, $R_1=2,5\text{Ом}$, $R_2=6\text{Ом}$, $R_3=2\text{Ом}$, $R_4=1,5\text{Ом}$, $R_5=3\text{Ом}$

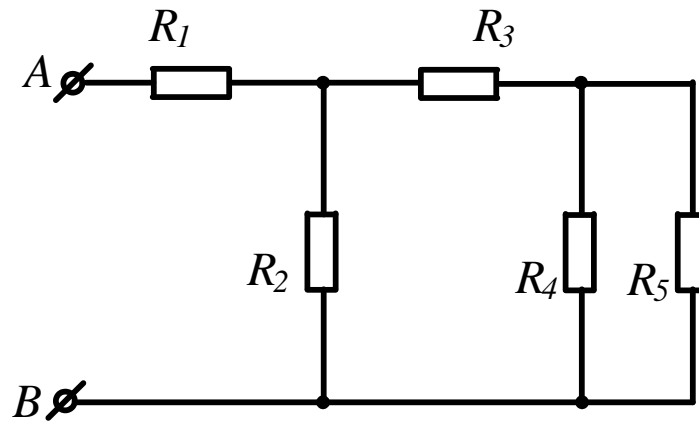


Рисунок 19

Задача 15. Определить токи в ветвях схемы (рис. 20), если $U_{AB}=9\text{В}$, $R_1=R_5=30\text{Ом}$, $R_2=2,8\text{Ом}$, $R_3=1\text{Ом}$, $R_4=6,2\text{Ом}$, $R_6=2\text{Ом}$.

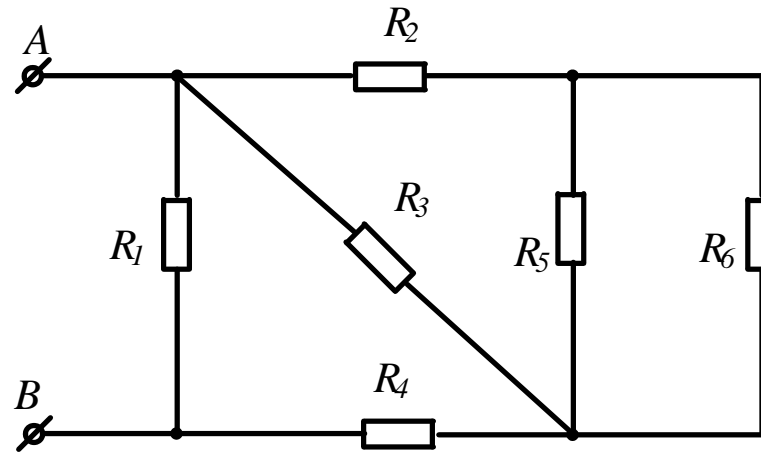


Рисунок 20

Задача 16. Определить эквивалентное сопротивление цепи, напряжение на входе и токи в ветвях (рис. 21), если $I_4=0,05\text{А}$, $R_1=30\text{Ом}$, $R_2=90\text{Ом}$, $R_3=R_6=100\text{Ом}$, $R_4=R_5=160\text{Ом}$, $R_7=50\text{Ом}$.

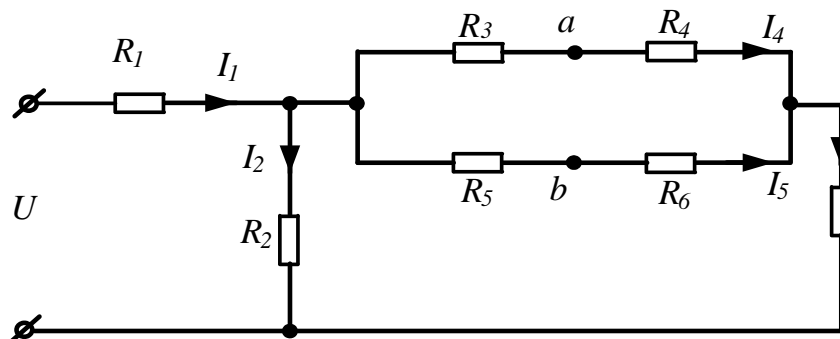


Рисунок 21

Задача 17. Определить показания вольтметра (рис. 22), если $R_1=4\text{Ом}$, $R_2=2\text{Ом}$, $R_3=4\text{Ом}$, $R_5=2\text{Ом}$, $U=20\text{В}$. ($R_V=\infty$).

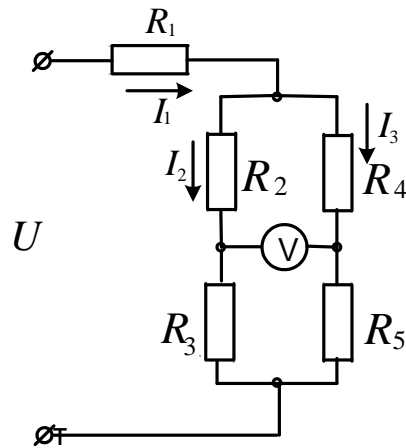


Рисунок 22

2. 2 Метод непосредственного использования законов Кирхгофа

Законы Кирхгофа

Немецкий физик Г.Р. Кирхгоф в 1845 году установил законы равновесия в электрических цепях. Уравнения, составленные согласно этим законам, называются уравнениями Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа формулируется двояко:

- 1) алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю;
- 2) сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов

Согласно первой формулировке

$$\sum_{K=1}^n I_K = 0. \quad (5)$$

При записи уравнений по этому закону токи, направленные к узлу и от узла, берутся с разными знаками.

Второй закон Кирхгофа также можно сформулировать двояко:

- 1) алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС вдоль того же контура

$$\sum_{K=1}^n I_K R_K = \sum_{K=1}^n E_K. \quad (6)$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа произвольно выбирают направление обхода контура и все падения напряжений и ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода, берут со знаком «+», остальные со знаком «-».

При расчете электрических цепей этим методом составляют уравнения по законам Кирхгофа по числу искомых токов и, решая полученную систему, находят искомые токи. Например, для схемы, показанной на рисунке 23, уравнения Кирхгофа имеют вид: I_3''

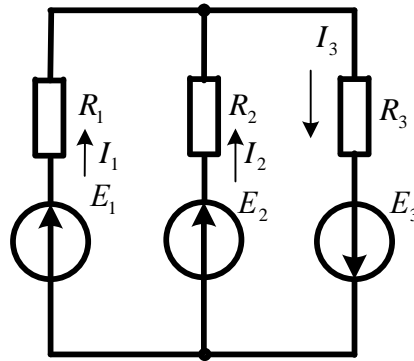


Рисунок 23

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2$$

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 + E_3$$

Решение этой системы $I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ дает искомые токи.

Задачи

Задача 18. Для схемы, представленной на рисунке 24 записать систему уравнений по законам Кирхгофа и рассчитать токи. $R_1=16\text{Ом}$; $R_2=24\text{Ом}$; $R_3=40\text{Ом}$; $E_1=120\text{В}$; $E_2=80\text{В}$.

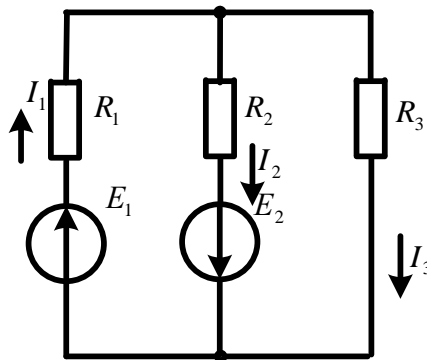


Рисунок 24

Задача 19. Для схемы, представленной на рисунке 25, выбрать положительные направления токов в ветвях и записать систему уравнений по законам Кирхгофа. Рассчитать токи, решив систему уравнений Кирхгофа. $R_1=16\text{Ом}$; $R_2=24\text{Ом}$; $R_3=40\text{Ом}$; $R_4=32\text{Ом}$; $R_5=42\text{Ом}$; $R_6=60\text{Ом}$; $E_3=120\text{В}$; $E_4=80\text{В}$.

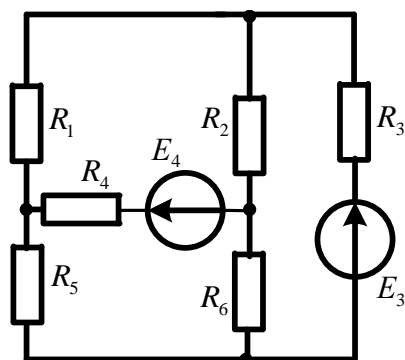


Рисунок 25

Задача 20. Для схемы, представленной на рисунке 26 заменить источники тока источниками ЭДС, упростить схему, заменив последовательно и параллельно включенные резисторы эквивалентными. Выбрать положительные направления токов в ветвях и записать систему уравнений по законам Кирхгофа. Рассчитать токи, решив эту систему. $R_1=165\text{Ом}$; $R_2=90\text{Ом}$; $R_3=67,5\text{Ом}$; $R_4'=25\text{Ом}$; $R_4''=200\text{Ом}$; $R_5=120\text{Ом}$; $R_6'=100\text{Ом}$; $R_6''=30\text{Ом}$; $E_1=54\text{В}$; $E_2=21\text{В}$; $J_1=0,1\text{А}$; $J_2=0$.

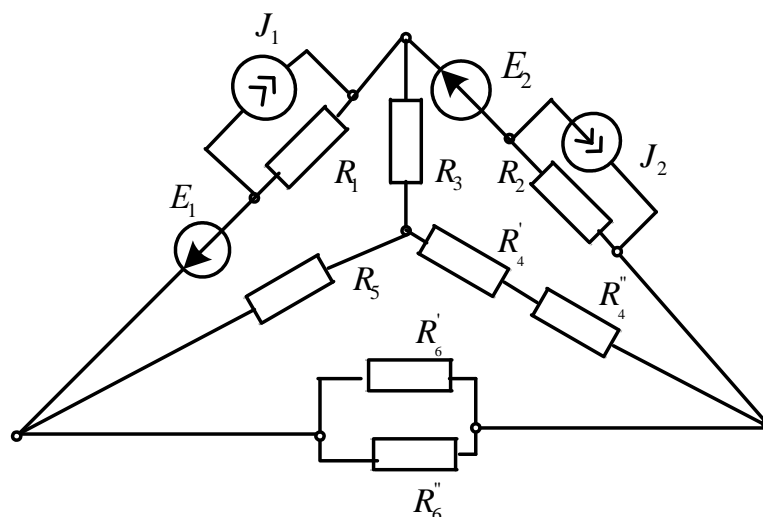


Рисунок 26

2.3 Метод контурных токов

При расчете цепи этим методом полагают, что в каждом независимом контуре электрической цепи течет свой контурный ток. Записывают уравнения по второму закону Кирхгофа для контурных токов и, решая эти уравнения, находят контурные токи. Затем через контурные токи определяют действительные токи ветвей.

Если в цепи имеется больше двух контуров, например три, то система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}; [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}; [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

В этих уравнениях R_{ii} – суммарное сопротивление i -го контура; R_{ij} – взятое со знаком «-» сопротивление смежной ветви между i -м и j -м контурами (знак - обусловлен единообразным выбором направлений контурных токов); I_{ii} – контурный ток i -го контура; E_{ii} – суммарная ЭДС i -го контура, равная алгебраической сумме ЭДС этого контура.

Решение системы уравнений дает искомые контурные токи. Действительные токи ветвей вычисляются через контурные.

Рассмотрим пример: по заданным параметрам цепи и ЭДС источников рассчитать токи ветвей цепи, представленной на рисунке 27 методом контурных токов. $R_1=2\text{Ом}$; $R_2=3\text{Ом}$; $R_3=5\text{Ом}$; $R_4=3\text{Ом}$; $R_5=1\text{Ом}$; $E_1=5\text{В}$; $E_4=3\text{В}$; $E_5=8\text{В}$.

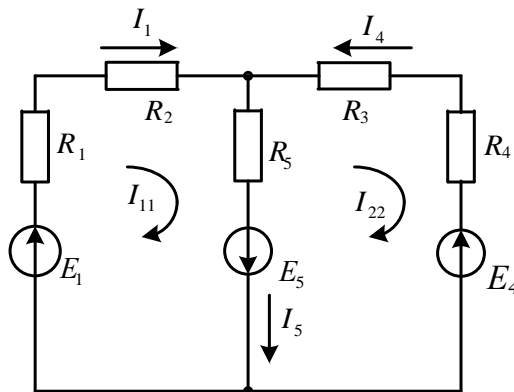


Рисунок 27

Находим: $R_{11}=R_1+R_2+R_5=2+3+1=6\text{Ом}$; $R_{22}=R_5+R_3+R_4=1+5+3=9\text{Ом}$; $R_{12}=R_{21}=-R_5=-1\text{Ом}$; $E_{11}=E_1+E_5=5+8=13\text{В}$; $E_{22}=-E_5-E_4=-8-3=-11\text{В}$. Подставив полученные данные в систему (5), находим решение: $I_{11}=2\text{А}$; $I_{22}=-1\text{А}$. Рассчитываем действительные токи ветвей: $I_1=I_{11}=2\text{А}$; $I_4=-I_{22}=1\text{А}$; $I_5=I_{11}-I_{22}=2+1=3\text{А}$.

Задачи

Задача 21. В цепи (рис.28) ЭДС источников питания равны $E_1=120\text{В}$, $E_2=114\text{В}$, а сопротивления ветвей – $R_1=0,1\text{Ом}$ $R_2=0,1\text{Ом}$ $R_3=1,5\text{Ом}$ $R_4=0,5\text{Ом}$ $R_5=2,0\text{Ом}$ $R_6=1,0\text{Ом}$. Определить

токи в ветвях цепи методом непосредственного применения законов Кирхгофа и методом контурных токов. Составить баланс мощностей.

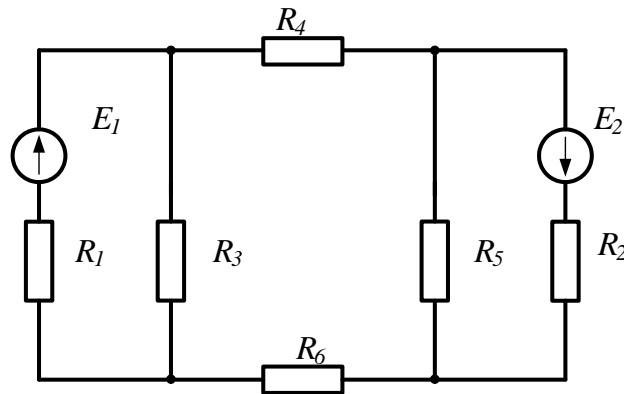


Рисунок 28

Задача 22. В цепи (рис. 29) сопротивления $R_1=2\text{Ом}$, $R_2=3\text{Ом}$, $R_3=4\text{Ом}$, $R_4=5\text{Ом}$, $R_5=8\text{Ом}$ и напряжение на зажимах цепи $U=80\text{В}$. Определить токи в ветвях и в неразветвленной части цепи. Задачу решить методом контурных токов.

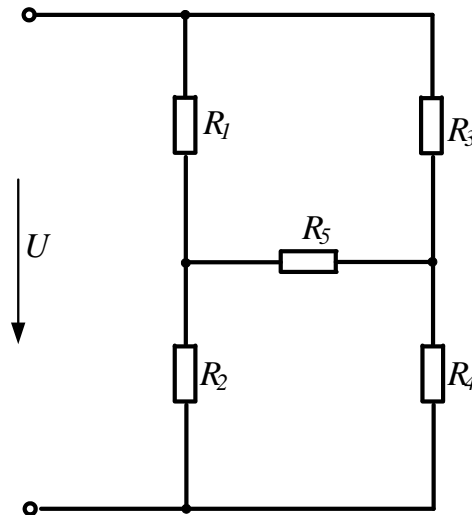


Рисунок 29

Задача 23. В цепи (рис.30) ЭДС источников питания равны $E_1=120\text{В}$, $E_2=200\text{В}$, $E_3=100\text{В}$, а сопротивления ветвей соответственно $R_1=1\text{Ом}$, $R_2=2\text{Ом}$, $R_3=4\text{Ом}$, $R_4=5\text{Ом}$. Рассчитать токи в ветвях цепи методом контурных токов, определить режим работы каждого из источников. Составить баланс мощностей.

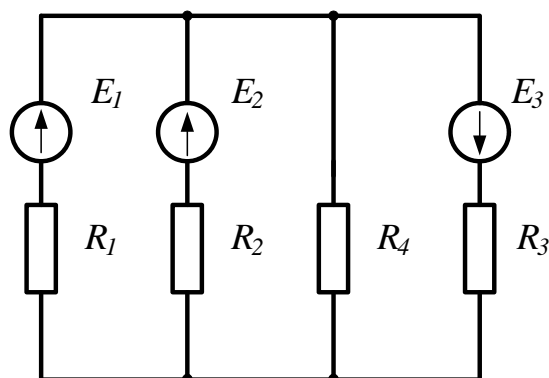


Рисунок 30

Задача 24. В электрической цепи, изображенной на рисунке 31, $E_1=10\text{В}$; $E_2=6\text{В}$; $E_6=4\text{В}$; $R_1=5\text{Ом}$; $R_2=4\text{Ом}$; $R_3=2\text{Ом}$; $R_4=1\text{Ом}$; $R_5=4\text{Ом}$; $R_6=2\text{Ом}$. Рассчитать токи ветвей методом контурных токов и проверить баланс мощностей.

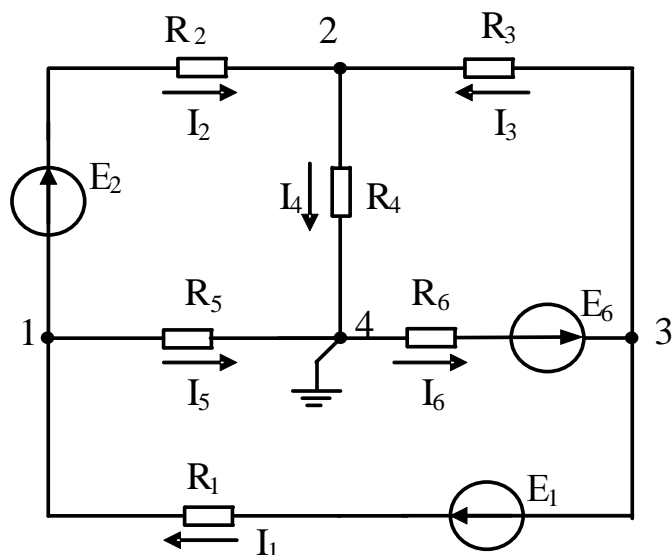


Рисунок 31

Задача 25. В электрической цепи (рис.25) рассчитать токи методом контурных токов. Сравнить полученные результаты с токами, найденными из уравнений Кирхгофа. Составить баланс мощностей. Заземлив одну из точек схемы рассчитать и построить потенциальную диаграмму контура, включающего обе ЭДС.

Задача 26. В электрической цепи (рис.26) рассчитать токи методом контурных токов. Сравнить полученные результаты с токами, найденными из уравнений Кирхгофа. Составить баланс мощностей. Заземлив одну из точек схемы рассчитать и построить потенциальную диаграмму контура, включающего обе ЭДС.

2.4 Метод узловых потенциалов

Ток любой ветви может быть найден из обобщенного закона Ома по известным потенциалам крайних точек этой ветви. Но крайние точки ветви являются узлами. Следовательно, при известных потенциалах узлов, токи ветвей могут быть легко найдены. Так как один из узлов схемы может быть заземлен и его потенциал принят равным нулю, то при наличии в схеме n узлов ей соответствует система из $(n-1)$ уравнений:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \dots + \varphi_{n-1} G_{1,n-1} &= J_{11}; \\
 \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \dots + \varphi_{n-1} G_{2,n-1} &= J_{22}; \\
 \dots\dots\dots & \\
 \dots\dots\dots & \\
 \varphi_1 G_{n-1,1} + \varphi_2 G_{n-1,2} + \dots + \varphi_{n-1} G_{n-1,n-1} &= J_{n-1,n-1}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В общем случае G_{kk} – сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле k ; G_{km} – сумма проводимостей ветвей, непосредственно соединяющих узлы k и m , взятая со знаком минус. Если между какими-либо двумя узлами ветвь отсутствует, то соответствующая проводимость равна нулю. В правой части системы стоят узловые токи. В их формировании участвуют те ветви, подходящие к этому узлу, которые содержат источники ЭДС и (или) тока. Если ЭДС E_p p -ветви направлена к k -узлу, то ее вклад в формирование узлового тока J_{kk} равен $E_p g_p$, а если эта ЭДС направлена от k -узла, то ее вклад равен $-E_p g_p$. Если к k -узлу подтекает ток от источника тока, то он должен быть введен в J_{kk} со знаком плюс, если этот ток источника тока утекает от узла, то он должен входить в J_{kk} со знаком минус. После решения системы (6) относительно потенциалов определяют токи в ветвях по закону Ома для ветви, содержащей ЭДС (обобщенный закон Ома).

Система уравнений (6) может быть представлена в матричной форме записи:

$$\begin{aligned}
 [G][\varphi] &= [J_{kk}]. \tag{9} \\
 [G] &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1,n-1} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n-1,1} & G_{n-1,2} & \dots & G_{n-1,n-1} \end{bmatrix}; \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$[J_{kk}] = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ \cdot \\ J_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Ее решение:

$$[\varphi] = [G]^{-1}[J_{kk}]. \quad (10)$$

По найденным потенциалам узлов находят токи ветвей, используя обобщенный закон Ома:

$$I_k = \frac{U_{ab} \pm E_k}{R_k}, \quad (11)$$

где $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ – разность потенциалов между узлами а и b; E_k – ЭДС k -ветви.

Рассмотрим пример. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 32, $R_1=6\text{Ом}$; $R_2=12\text{Ом}$; $R_3=9\text{Ом}$; $R_4=12\text{Ом}$; $R_5=19.5\text{Ом}$; $R_6=15\text{Ом}$; $E_2=45\text{В}$; $E_3=22.5\text{В}$. Рассчитать токи методом узловых потенциалов.

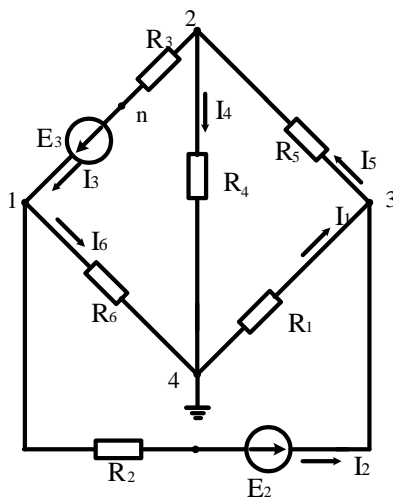


Рисунок 32

Решение

Заземлим узел 4

($\varphi_4=0$).

Решение имеет вид

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{vmatrix},$$

$$G_{11} = 1/R_2 + 1/R_6 + 1/R_3 = 1/12 + 1/9 + 1/15 = (0.083 + 0.111 + 0.067) = 0.261 \text{ См};$$

$$G_{22} = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5 = 0.111 + 0.051 + 0.083 = 0.245 \text{ См};$$

$$G_{33} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_5 = 0.187 + 0.083 + 0.051 = 0.321 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -1/R_3 = -0.111 \text{ См};$$

$$G_{13} = G_{31} = -1/R_2 = -0.083 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = -1/R_5 = -0.051 \text{ См};$$

$$I_{11} = E_3/R_3 - E_{29}/R_2 = 22,5/9 - 45/3 = 2,5 - 3,75 = -1,25 \text{ А};$$

$$I_{22} = -E_3/R_3 = -22,5/9 = -2,5 \text{ А};$$

$$I_{33} = E_{29}/R_2 = 45/12 = 3,75 \text{ А}.$$

После подстановки и решения получаем $\varphi_1 = -7.33 \text{ В}$; $\varphi_2 = -11.88 \text{ В}$; $\varphi_3 = 7.9 \text{ В}$.

Воспользуемся обобщенным законом Ома и найдем токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{R_1} = \frac{0 - 7.9}{6} = -1.37 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_3) + E_{29}}{R_2} = \frac{-7.33 - 7.9 + 45}{12} = 2.48 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) + E_3}{R_3} = \frac{-11.88 + 7.33 + 22.5}{9} = 1.99 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} = \frac{-11.88}{12} = -0.99 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_5} = \frac{7.9 + 11.88}{19.5} = 1.01 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_6} = \frac{-7.33}{15} = -0.48 \text{ А}.$$

Задачи

Задача 27. По Заданным потенциалам узлов, ЭДС источников и сопротивлений резисторов (рис.33) рассчитать токи ветвей и подводящих проводов. $E_1 = 10 \text{ В}$; $E_2 = 15 \text{ В}$; $\varphi_1 = 15 \text{ В}$; $\varphi_2 = -45 \text{ В}$; $\varphi_3 = 68 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 12 \text{ Ом}$.

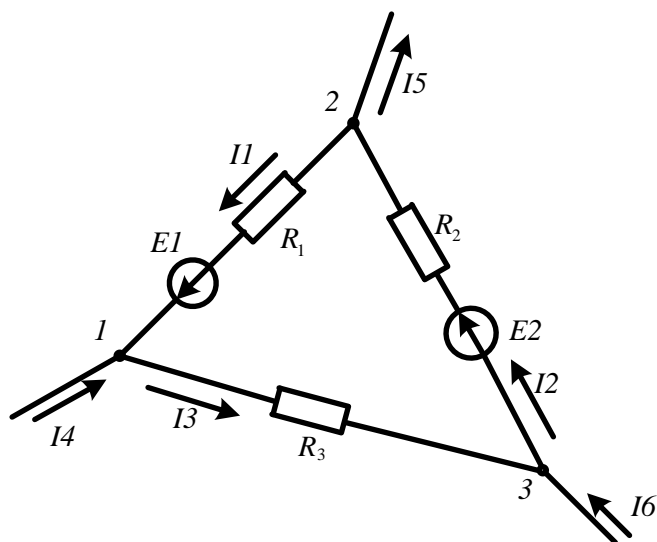


Рисунок 33

Задача 28. В цепи, схема которой показана на рисунке 34, ЭДС источников питания равны $E_1=120\text{В}$, $E_2=114\text{В}$, а сопротивление ветвей – $R_1=0,1\text{Ом}$ $R_2=0,1\text{Ом}$ $R_3=1,5\text{Ом}$ $R_4=0,5\text{Ом}$ $R_5=2,0\text{Ом}$ $R_6=1,0\text{Ом}$. Рассчитать токи ветвей методом узловых потенциалов и проверить баланс мощностей.

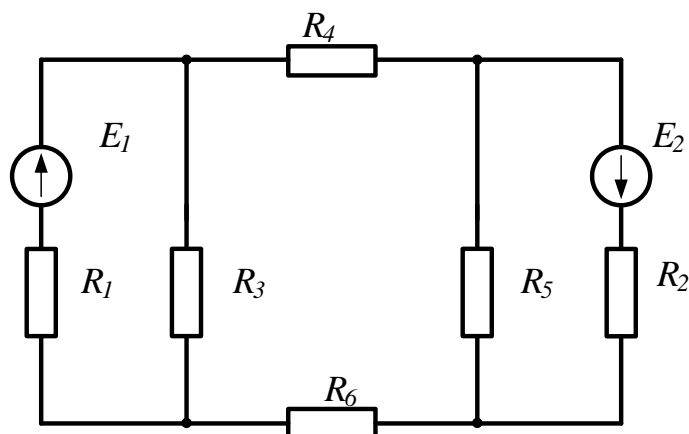


Рисунок 34

Задача 29. Решить задачу 24 методом узловых потенциалов и сравнить с результатами, полученными методом контурных токов.

2.5 Метод узлового напряжения (двух узлов).

Часто встречаются схемы, содержащие всего два узла. Наиболее рациональным методом расчета таких схем является метод узлового напряжения (*метод двух узлов*). Суть метода состоит в том, что за искомое принимают напряжение между двумя узлами схемы:

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k}{\sum g_k}. \quad (12)$$

После определения этого напряжения ток любой ветви может быть определен из обобщенного закона Ома.

В качестве примера обратимся к электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 35. Схема имеет следующие параметры: $R_1=2\text{Ом}$; $R_2=3\text{Ом}$; $R_3=5\text{Ом}$; $R_4=3\text{Ом}$; $R_5=1\text{Ом}$; $E_1=5\text{В}$; $E_4=3\text{В}$; $E_5=8\text{В}$

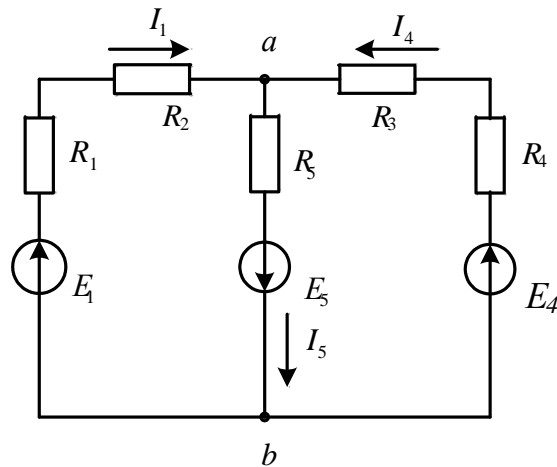


Рисунок 35

Решение

Рассчитаем узловое напряжение

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 - E_5 g_5 + E_4 g_4}{g_1 + g_4 + g_5} = \frac{5 \cdot 0.2 - 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0.125}{0.2 + 1.0 + 0.125} = \frac{1 - 8 + 0.375}{1.325} = 5\text{В}$$

Используем обобщенный закон Ома для расчета токов ветвей

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1 + R_2} = \frac{5 - 5}{5} = 2\text{А};$$

$$I_4 = \frac{E_4 - U_{ab}}{R_3 + R_4} = \frac{3 - 5}{8} = 1\text{А};$$

$$I_5 = \frac{E_5 + U_{ab}}{R_5} = \frac{8 - 5}{1} = 3\text{А}.$$

Задачи

Задача 30. В цепи (рис.36) ЭДС источников равны $E_1=160\text{В}$, $E_2=220\text{В}$, $E_3=80\text{В}$, а сопротивления ветвей соответственно $R_1=2\text{Ом}$, $R_2=4\text{Ом}$, $R_3=1\text{Ом}$, $R_4=6\text{Ом}$. Определить токи в ветвях цепи и режим работы каждого из источников. Составить баланс мощностей. Задачу решить методом узлового напряжения.

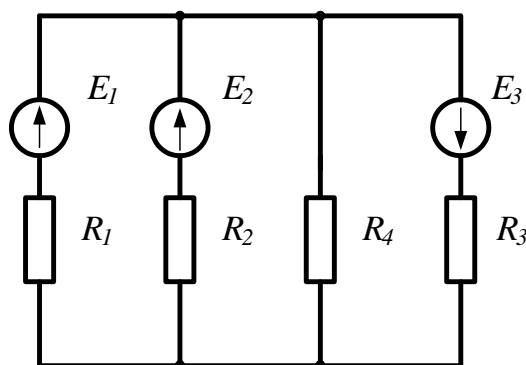


Рисунок 36

Задача 31. В схеме, представленной на рисунке 37, $E_1=16\text{В}$; $E_3=24\text{В}$; $R_1=4\text{Ом}$; $R_2=2\text{Ом}$; $R_3=8\text{Ом}$; $R_4=8\text{Ом}$.

Рассчитать токи методом узлового напряжения.

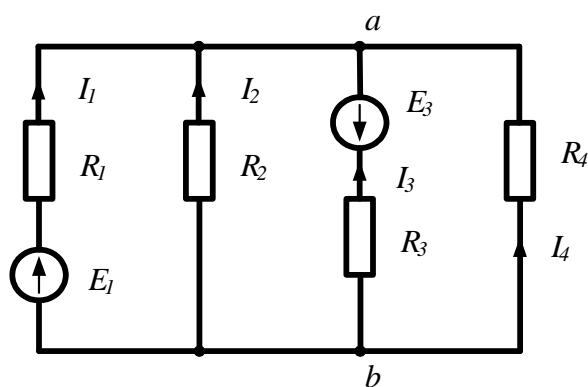


Рисунок 37

2.6 Метод наложения

Принцип наложения справедлив только в линейных электрических цепях. Он формулируется следующим образом:

Ток в k -й ветви равен алгебраической сумме частичных токов, вызываемых каждой из ЭДС схемы в отдельности.

Принцип наложения положен в основу метода расчета линейных электрических цепей, получившего название *метода наложения*.

При расчете цепей данным методом поступают следующим образом: поочередно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из ЭДС, мысленно замыкая накоротко остальные, но оставляя в схеме их внутренние сопротивления. Находят токи в ветвях путем алгебраического сложения частичных токов.

Применение этого метода расчета рассмотрим на примере электрической цепи (рис.38а). В этой схеме $R_1=10\text{Ом}$; $R_2=5\text{Ом}$; $R_3=8\text{Ом}$; $E_1=20\text{В}$; $E_3=60\text{В}$.

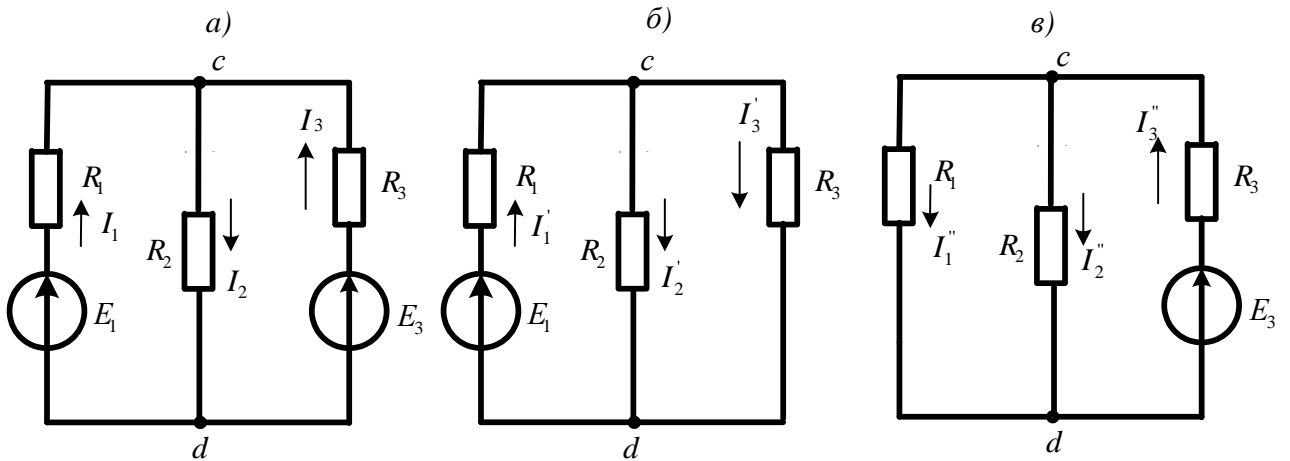


Рисунок 38

Решение

Сначала оставим в схеме ЭДС E_1 , а E_3 мысленно замкнем накоротко (рис. 38б). Рассчитаем частичные токи в схеме от действия только ЭДС E_1 :

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{20}{10 + 40/15} = 1,53 \text{ A}; \quad U_{cd} = I_1' \cdot \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1,53 \cdot \frac{5 \cdot 8}{13} = 4,69 \text{ В};$$

$$I_2' = \frac{U_{cd}}{R_2} = \frac{4,69}{5} = 0,93 \text{ A}; \quad I_3' = \frac{U_{cd}}{R_3} = \frac{4,69}{8} = 0,58 \text{ A}.$$

Теперь оставим в схеме ЭДС E_3 , а E_1 замкнем накоротко (рис 38в) и вновь найдем частичные токи:

$$I_3'' = \frac{E_3}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{60}{8 + 50/15} = 5,29 \text{ A}; \quad U_{cd} = I_3'' \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 5,29 \cdot 3,3 = 17,4 \text{ В};$$

$$I_1'' = \frac{U_{cd}}{R_1} = \frac{17,4}{10} = 1,74 \text{ A}; \quad I_2'' = \frac{U_{cd}}{R_2} = \frac{17,4}{5} = 3,49 \text{ A}.$$

Действительные токи ветвей находим как алгебраическую сумму частичных токов в данной ветви:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 1,53 - 1,74 = -0,21 \text{ A}; \quad I_2 = I_2' + I_2'' = 0,93 + 3,49 = 4,42 \text{ A};$$

$$I_3 = -I_3' + I_3'' = -0,58 + 5,29 = 4,7 \text{ A}$$

Задачи

Задача 32. Рассчитать токи в электрической цепи задачи 18, методом наложения. Проверить баланс мощностей.

Задача 33. Рассчитать токи в электрической цепи задачи 23 методом наложения. Сравнить результаты расчетов. Проверить баланс мощностей.

2.7 Метод эквивалентного генератора

Прежде чем изучить этот метод, введем понятие двухполюсника.

В любой электрической схеме можно мысленно выделить какую-либо одну ветвь, а всю остальную часть схемы, независимо от ее структуры, условно изобразить некоторым прямоугольником, так называемым двухполюсником, который двумя своими зажимами (полюсами) подключается к остальной схеме, как показано на рисунке.

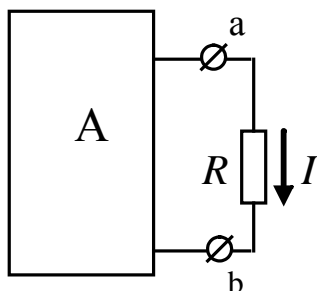


Рисунок 39

Если в двухполюснике имеются источники электрической энергии, он называется активным, и в прямоугольнике, изображающем двухполюсник ставится буква *A*. Если источники отсутствуют – двухполюсник считается пассивным. В этом случае в прямоугольнике проставляется буква *П* или прямоугольник оставляют пустым.

Метод эквивалентного генератора основан на теореме об активном двухполюснике и эквивалентном генераторе, которая формулируется следующим образом:

По отношению к выделенной ветви двухполюсник при расчете можно заменить эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на зажимах выделенной ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника.

Метод расчета тока в выделенной ветви, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором, принято называть **методом эквивалентного генератора**. Метод целесообразно использовать для расчета тока в какой – либо одной ветви электрической цепи.

Рекомендуется такая последовательность расчета тока этим методом: а) находим напряжение на разомкнутой ветви *ab*; б) определяем входное сопротивление R_{ex} всей схемы по отношению к зажимам *ab* при замкнутых источниках ЭДС и разомкнутых ветвях с источниками тока; в) рассчитываем ток по формуле $I = U_{ab_{xx}} / (R + R_{ex})$.

В качестве примера рассмотрим схему цепи, изображенную на рисунке 40а

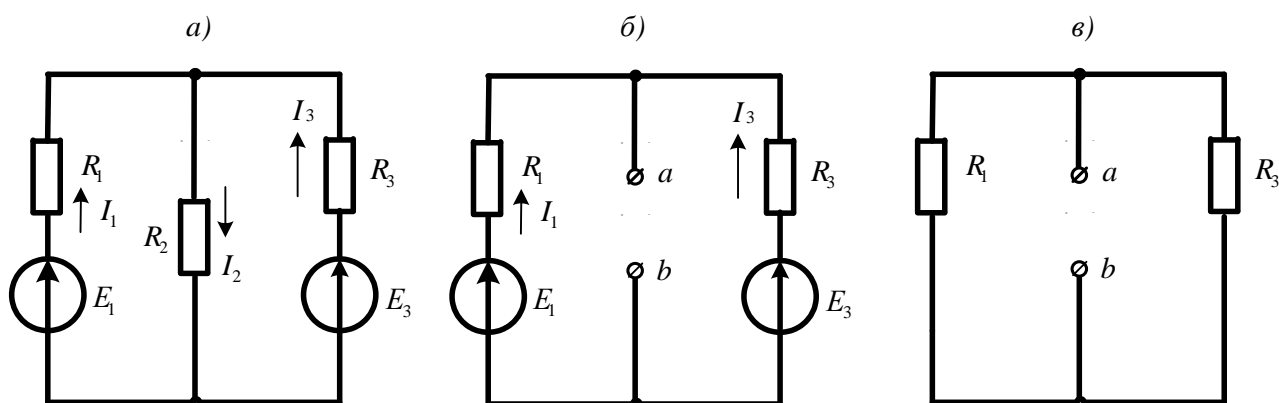


Рисунок 40

Пусть требуется рассчитать ток I_2 , если $R_1=20\text{Ом}$; $R_2=10\text{Ом}$; $R_3=40\text{Ом}$; $E_1=40\text{В}$ $E_3=80\text{В}$.

Решение

Выделим ветвь с искомым током и разомкнем ее (рис.40б). Используя метод узлового напряжения, найдем напряжение холостого хода на зажимах выделенной ветви.

$$U_{ab_{xx}} = \frac{E_1 g_1 + E_3 g_3}{g_1 + g_3} = \frac{40 \cdot 0,05 + 80 \cdot 0,025}{0,05 + 0,025} = \frac{4}{0,075} = 53,3\text{В}.$$

Теперь мысленно замкнем источники ЭДС накоротко и вычислим входное сопротивление двухполюсника относительно зажимов ab/

$$R_{вх_{ab}} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{20 \cdot 40}{60} = 13,3\text{Ом}.$$

$$\text{Вычисляем искомый ток: } I_2 = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{вв_{ab}} + R_2} = \frac{53,3}{13,3 + 10} = 2,29\text{А}.$$

Задачи

Задача 34. В цепи (задача 18) рассчитать ток I_3 методом эквивалентного генератора и сравнить с ранее полученным значением.

Задача 35. В цепи (задача 24) рассчитать ток I_1 методом эквивалентного генератора.

3. Методы расчета электрических цепей синусоидального тока

3.1 Расчет цепей по мгновенным значениям

При расчете цепей синусоидального тока используют различные формы представления синусоидальных величин. Эти формы в общем случае можно разделить на аналитические и графические. К аналитическим формам можно отнести представление синусоидальных вели-

чин их мгновенными значениями. Например, мгновенные значения синусоидального тока и напряжения можно записать как $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$; $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ где $I_m; U_m$ – амплитуды, ψ_i, ψ_u – начальные фазы; ω – угловая частота. Любые линейные комбинации (т.е. сложение или вычитание) нескольких гармонических колебаний с одной и той же частотой ω дают результирующее колебание той же частоты. Дифференцирование и интегрирование гармонических колебаний также приводит к гармоническим колебаниям той же частоты, но сдвинутым по фазе на 90° , т.е. находящимся в квадратуре с исходным колебанием.

При расчете цепей по мгновенным значениям используют приведение произвольной цепи к одной из канонических схем. В качестве канонических схем обычно используют последовательное или параллельное соединение активных и реактивных сопротивлений или проводимостей. При этом для последовательной канонической схемы пользуются последовательным соединением активного и реактивного сопротивлений r и x , а для параллельной канонической схемы – параллельным включением активной и реактивной проводимостей g и b . Такие соединения элементов приведены на рисунке 41.

Если к входу последовательной канонической схемы подключен источник напряжения $e(t)$, то ток цепи определится по закону Ома:

$$i(t) = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi), \quad (13)$$

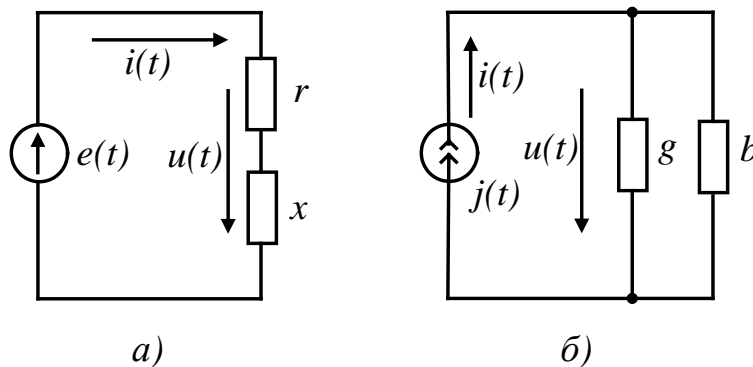


Рисунок 41

где $\varphi = \arctg(x/r)$ – фазовый сдвиг между напряжением и током, $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ – полное сопротивление цепи.

При подключении к входу параллельной канонической схемы источника тока $j(t)$ напряжение на элементах схемы определится из выражения:

$$u(t) = \frac{I_m}{y} \sin(\omega t + \psi_i + \varphi), \quad (14)$$

где $\varphi = \arctg(b/g)$ – сдвиг фаз между током источника и напряжением на входе схемы;

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$ – полная проводимость цепи.

Переход от последовательной канонической схемы к параллельной выполняется при помощи уравнений:

$$g = r/z^2; b = x/z^2. \quad (15)$$

Аналогично выполняется переход от параллельной канонической схемы к последовательной:

$$r = g/y^2; x = b/y^2. \quad (16)$$

При выполнении этих условий обе схемы будут эквивалентными.

Рассмотрим примеры расчета цепи по мгновенным значениям.

Пример 1. Требуется определить напряжение на входе цепи, схема которой приведена на рисунке 42, если ток источника $i(t) = 0,1 \sin 500t$ (А). Параметры схемы имеют следующие значения: $b_c = 0,2$ См; $x_L = r = 10$ Ом.

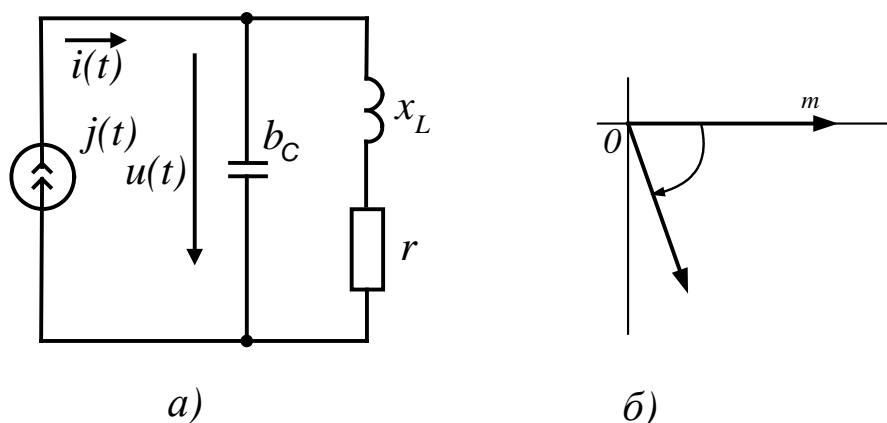


Рисунок 42

Решение. Вначале преобразуем последовательное соединение r и x_L в параллельное соединение g и b_L :

$$g = r/z^2 = r/(r^2 + x_L^2) = 10/200 = 0,5 \text{ См},$$

$$b_L = x_L/z^2 = x_L/(r^2 + x_L^2) = 10/200 = 0,5 \text{ См}.$$

Затем рассчитаем реактивную проводимость цепи $b = b_L - b_c =$

$$= 0,05 - 0,2 = -0,15 \text{ См} \text{ и определим ее полную проводимость } y = \sqrt{g^2 + b^2} = 0,05\sqrt{2} = 0,16$$

См.

Найдем амплитуду напряжения на входе цепи

$$U_m = I / y = 0,1 / 0,16 = 0,625 B$$

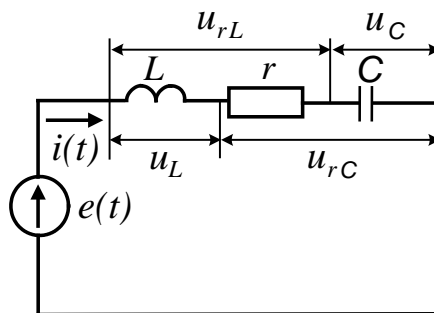
и определим сдвиг фаз между током и напряжением, $tg\varphi = b / g = -3$, откуда получаем $\varphi = -71^\circ 30'$.

Мгновенное значение напряжения на входе цепи определяется формулой:

$$u(t) = U_m \sin(500t + \psi_i + \varphi) = 0,625 \sin(500t - 71^\circ 30').$$

Пример 2. Для цепи, изображенной на рисунке 43, требуется определить значение тока $i(t)$, напряжений на элементах $u_r(t)$, $u_c(t)$, $u_L(t)$, $u_{rL}(t)$, $u_{rC}(t)$, а также активную мощность P , потребляемую цепью. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $e(t) = 20 \sin 100t$ В; $r = 4 \text{ Ом}$; $L = 70 \text{ мГн}$; $C = 2500 \text{ мкФ}$.

Рисунок 43



Решение

Определим реактивные сопротивления цепи:

$$x_L = \omega L = 100 \cdot 70 \cdot 10^{-3} = 7 \text{ Ом}$$

$$x_C = 1 / \omega C = 1 / 100 \cdot 2500 \cdot 10^{-6} = 4 \text{ Ом}$$

Вычислим полное сопротивление цепи:

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{4^2 + (7 - 4)^2}$$

Определим угол сдвига фаз между напряжением источника и током в цепи:

$$\varphi = \arctg(x_L - x_C) / r = \arctg(3 / 4) = 37^\circ.$$

Найдем амплитуду тока в цепи:

$$I_m = E_m / z = 20 / 5 = 4 \text{ А}.$$

Используя полученные значения, запишем мгновенное значение тока:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) = 4 \sin(100t - 37^\circ) \text{ А}.$$

Напряжение на сопротивлении определим по закону Ома:

$$u_r(t) = ri(t) = 16\sin(100t - 37^\circ)B.$$

Напряжение на индуктивности вычислим по формуле:

$$u_L(t) = Ldi(t)/dt = 70 \cdot 10^{-3}100 \cdot 4\cos(100t - 37^\circ) = 28\sin(100t + 53^\circ)B.$$

Напряжение на емкости определим по формуле:

$$u_c = \left[\int i(t)dt \right] / C = 4 \left[-\cos(100t - 37^\circ) \right] / 0,25 = 16\sin(100t - 127^\circ)B.$$

Напряжение на последовательном соединении резистора r и индуктивности L определяется током I_m и полным сопротивлением z_{rL} этого соединения. Амплитуда этого напряжения равна

$$Um_{rL} = I_m \sqrt{r^2 + x_L^2} = 4\sqrt{4^2 + 7^2} = 32B$$

а угол сдвига фаз

$$\varphi_{rL} = \arctg(x_L / r) = \arctg 1,75 = 60^\circ.$$

Мгновенное значение этого напряжения равно

$$u_{rL} = 32\sin(100t + 23^\circ)B.$$

Аналогично определяют напряжение на последовательном соединении резистора r и конденсатора C .

Амплитуда этого напряжения имеет значение

$$U_{mrC} = I_m \sqrt{r^2 + x_C^2} = 4 \cdot 5,66 = 22,64B,$$

а угол сдвига фаз равен

$$\varphi_{rC} = \arctg(-4/4) = -45^\circ.$$

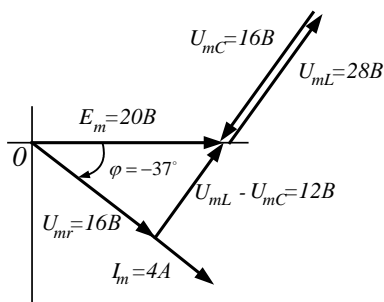
Мгновенное значение напряжения на этом соединении запишем в виде:

$$u_{rC}(t) = 22,64\sin(100t - 82^\circ)B.$$

Среднюю (активную) мощность, потребляемую цепью, можно рассчитать по формуле:

$$P = I_m^2 \frac{r}{2} = 4^2 \cdot \frac{4}{2} = 32Bт$$

Векторная диаграмма для этой схемы приведена на рисунке 44. При ее построении ис-



пользованы мгновенные значения напряжений и тока, полученные в расчете.

Рисунок 44

Задачи

Задача 36. $i_1 = 2 \sin \omega t$; $i_2 = 4 \sin(\omega t + 90^\circ)$; $i_3 = 3 \sin(\omega t + 30^\circ)$. Построить векторную диаграмму и определить i_4 . Рассчитать действующее значение суммарного тока.

Задача 37. Найти суммарный ток, если

$$i_1 = 4 \sin(\omega t + 30^\circ); i_2 = 4 \sin(\omega t - 45^\circ); i_3 = 2 \sin(\omega t - 30^\circ).$$

Вычислить действующее значение этого тока.

Задача 38. По цепи (рис. 45), состоящей из последовательно соединенных резистора сопротивлением $R=100\text{Ом}$ и конденсатора емкостью $C=31,8\text{мкФ}$ протекает синусоидальный ток с амплитудой $I_m=1,41\text{А}$, $f=50\text{Гц}$. Определить мгновенные значения приложенного к цепи напряжения, напряжений на резисторе и конденсаторе.

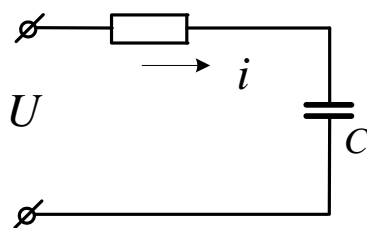


Рисунок 45

Задача 39. По катушке, индуктивность которой $L=12\text{мГн}$ и активное сопротивление $R=9\text{Ом}$ течет ток $i = 2 \sin 1000t$ (А) (рис.46). Чему равно мгновенное значение приложенного к цепи напряжения?

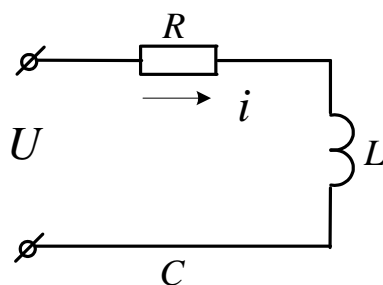


Рисунок 46

Задача 40. При включении индуктивной катушки в цепь постоянного тока амперметр показал 2,5А, а вольтметр – 30В.

Затем ту же катушку включили в цепь переменного тока $f=5\text{кГц}$. При этом вольтметр показал 120В, а амперметр – 6А.

Рассчитать индуктивность и активное сопротивление катушки. Чему равна активная и реактивная мощность, рассеиваемая в цепи?

Задача 41. Резистор сопротивлением $R=100\text{Ом}$ и конденсатор $C=2\text{мкФ}$ соединены последовательно. Напряжение на зажимах конденсатора $u_C = 10 \sin 5000t$. Чему равны мгновенные значения напряжения на зажимах резистора, общего напряжения. Рассчитать активную мощность цепи.

Задача 42. По катушке с индуктивностью $L=0,01\text{Гн}$ течет синусоидальный ток $i = 2,6 \sin 1000t(\text{А})$. Рассчитать ЭДС самоиндукции и действующее значение напряжения на катушке.

Задача 43. К электрической цепи (рис.47), имеющей параметры: $R=3\text{Ом}$; $L=8\text{мГн}$; $C=15\text{мкФ}$ подключено напряжение $U=20\text{В}$ ($f=500\text{Гц}$).

Найти ток, напряжения на элементах, активную и реактивную мощности. Построить векторную диаграмму.

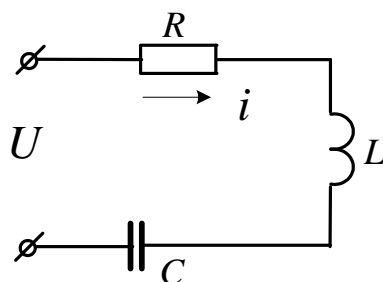


Рисунок 47

Задача 44. В цепь синусоидального тока частотой $f=50\text{Гц}$ (рис.48) включены две параллельные ветви. Параметры элементов: $R_1=4\text{Ом}$, $R_2=5\text{Ом}$, $L=0,096\text{Гн}$, $C=630\text{мкФ}$, напряжение на конденсаторе $U_C=30\text{В}$. Найти токи в ветвях и в неразветвленной части цепи. Определить сдвиги фаз всей цепи и в обеих ветвях. Построить векторную диаграмму токов.

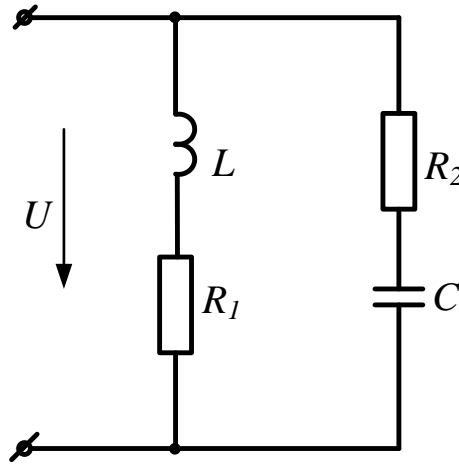


Рисунок 48

Задача 45. Для схемы, изображенной на рисунке 49, требуется рассчитать показания приборов, если $i = 5 \sin(314t - 10^\circ) \text{А}$; $r_1 = 4\text{Ом}$; $r_2 = x_C = 2\text{Ом}$; $x_L = 10\text{Ом}$. Рассчитать действующие значения найденных величин. Построить векторную диаграмму цепи, рассчитать активную, реактивную и полную мощности.

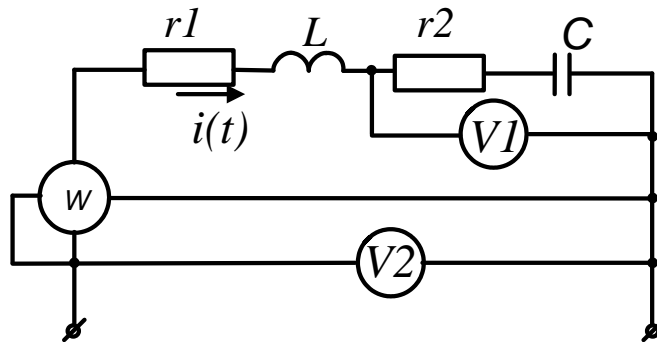


Рисунок 49

Задача 46. В цепи, изображенной на рисунке 50, мгновенное значение тока $i=2\sin(450t+10^\circ)$. Параметры цепи имеют следующие значения: $r=25\text{Ом}$; $L=60\text{мГн}$; $C=40\text{мкФ}$. Записать мгновенные значения напряжений на элементах и на входе цепи. Определить: полное сопротивление цепи, показания приборов, активную, реактивную и полную мощность, ток в цепи при резонансе напряжений, изменив L .

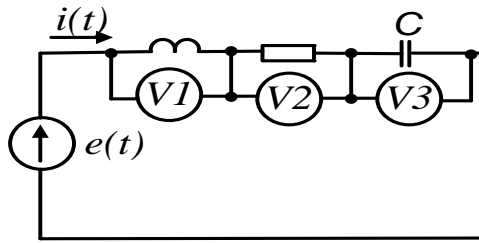


Рисунок 50

3.2 Расчет цепей синусоидального тока символическим методом

В основе символического метода лежит преобразование Фурье-Эйлера

$$e^{j\alpha} = \text{Cos}\alpha + j\text{Sin}\alpha \quad (17)$$

Комплексное число $e^{j\alpha}$ на комплексной плоскости изобразится вектором, модуль которого равен 1, а угол с вещественной осью $-\alpha$.

Если вместо функции $e^{j\alpha}$ взять функцию $I_m e^{j\alpha}$, то

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \text{Cos}\alpha + jI_m \text{Sin}\alpha.$$

На комплексной плоскости эта функция, так же как и функция $e^{j\alpha}$, изобразится вектором под углом α к оси +1, но модуль вектора будет в I_m раз больше.

Угол α может быть любым. Положим его равным $(\omega t + \psi)$. Тогда

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \text{Cos}(\omega t + \psi) + jI_m \text{Sin}(\omega t + \psi). \quad (18)$$

Функция $I_m \text{Sin}(\omega t + \psi)$ есть коэффициент при мнимой части (Im) выражения $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$.

Синусоидально изменяющийся ток

$$i = I_m \text{Sin}(\omega t + \psi) = \text{Im} I_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (19)$$

Таким образом, синусоидально изменяющийся ток i можно представить как $\text{Im} I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ или, что то же самое, как проекцию вращающегося вектора $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ на ось «+j».

С целью единообразия принято на комплексной плоскости изображать векторы синусоидально изменяющихся величин для момента времени $\omega t = 0$. При этом вектор

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m, \quad (20)$$

где \dot{I}_m – комплексная величина, модуль которой равен I_m ; ψ – угол, под которым вектор \dot{I}_m проведен к оси +1 на комплексной плоскости, равный начальной фазе.

Величину \dot{I}_m называют *комплексной амплитудой* тока i . Комплексная амплитуда изображает ток i на комплексной плоскости для момента времени $\omega t = 0$. Точка, поставленная над током I или напряжением U , означает, что эта величина во времени изменяется по синусоидальному закону. По аналогии вводят комплекс действующего значения

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}; \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}.$$

Комплексные величины, изображающие синусоидальные напряжения и токи на комплексной плоскости называют символическими изображениями. Найдем производную и интеграл от символического изображения тока. Пусть $i = I_m \sin \omega t$. Тогда $\dot{I} = I e^{j\omega t}$.

Производная

$$\frac{d}{dt} [I e^{j\omega t}] = j\omega I e^{j\omega t} = j\omega \dot{I} \quad (21)$$

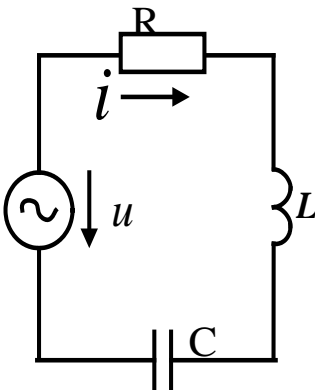
Интеграл

$$\int I e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \int I e^{j\omega t} d(j\omega t) = \frac{1}{j\omega} I e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \dot{I} \quad (22)$$

Закон Ома в комплексной форме

Рассмотрим цепь с последовательным соединением резистора, индуктивной катушки и конденсатора (рис.51).

Для этой схемы уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид:



откуда

РисунОК 51

Пе-
репишем

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u \quad (23)$$

это уравнение в комплексной форме с учетом (10.6) и (10.7):

$$\begin{aligned} \dot{I}R + j\omega L \dot{I} + (1/j\omega C) \dot{I} &= \\ = \dot{I}R + j\omega L \dot{I} - (j/\omega C) \dot{I} &= \dot{U}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L - j/\omega C} = \dot{I}Z, \quad (25)$$

где

$$Z = R + j\omega L - j/\omega C = R + j(x_L - x_C) - \quad (26)$$

комплексное сопротивление цепи.

Формулу (25) называют законом Ома в комплексной форме записи.

Уравнение (23) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Следовательно, нахождение тока, как функции времени сводится к решению этого дифференциального уравнения.

Уравнение (24) является линейным алгебраическим уравнением с комплексными коэффициентами. Таким образом, символический метод позволяет перейти от решения дифференциальных уравнений к решению уравнений алгебраических, но с комплексными коэффициентами. В результате такого решения находится символическое изображение искомой величины (тока или напряжения), после чего осуществляют переход к мгновенным значениям.

При расчете цепей по комплексным значениям можно пользоваться уравнениями Кирхгофа, уравнениями контурных токов и узловых потенциалов в комплексной форме записи. С помощью комплексных значений напряжения и тока можно определить комплексную мощность $\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$, где $\dot{I}^* = Ie^{-j\psi_i}$ – сопряженный комплекс тока,

$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ – комплексное значение напряжения. Модуль комплексной мощности равен

полной мощности цепи $S = \left| \dot{S} \right| = UI$.

Задачи

Задача 47. Перевести заданные комплексные числа в показательную форму записи:

12+j18=	-40+j12=
-36-j14=	18-j28=
-j29=	j160=
12-j84=	-j158=
-136-j420=	48+j120=
J168=	-162-j248=
4+j78=	-6+j98=
160-6=	14-j148=
-160+j12=	-4-j69=
12+j ² 10=	j ² 180=

$$1200 - j2600 =$$

$$-2500 + j6100 =$$

$$-3120 - j2140 =$$

$$148 + j2100 =$$

Задача 48. Перевести заданные комплексные числа в алгебраическую форму записи:

$$230e^{j127} =$$

$$1270e^{-j140} =$$

$$148e^{j90} =$$

$$3620e^{j110} =$$

$$1300e^{j180} =$$

$$526e^{j270} =$$

$$622e^{-j90} =$$

$$430e^{j360} =$$

$$28e^{j0} =$$

$$49e^{-j115} =$$

$$820e^{-j192} =$$

$$18e^{j198} =$$

$$14e^{j135} =$$

$$141e^{j225} =$$

$$18e^{j180} =$$

$$1200e^{j45} =$$

Задача 49. Вычислить

$$48e^{j16} + 12e^{-j43} = (3 + j6) \cdot 18e^{j45} = \frac{14 + j18}{26e^{j30}} = \frac{1270e^{-j140}}{-6 + j8} =$$

$$(4 - j6) + 14ej45 = (6 - j8) \cdot 6e^{-j60} = \frac{-10 + j5}{40 + j18} = \frac{18 + j14}{5e^{j90}} =$$

$$(-6 + j8) + (2 - j4) = (18 + j16) \cdot (-8 - j6) =$$

$$14 - j22 + 18e^{-45j} = (-16 - j46) \cdot 2e^{-j135} = \frac{8 - j10}{-6 + j12} = \frac{430e^{j290}}{10e^{j140}} =$$

$$(-8 - j6) + 14e^{-j110} = (-11 + j26) \cdot 18e^{j110} =$$

$$(6 - j15) + 12e^{j90} = (12 + j18) \cdot 6e^{-j90} = \frac{13 + j24}{18e^{j180}} = \frac{-6 - j12}{4 + j2} =$$

$$(11 + j18) + 10e^{-j135} = (-14 + j36) \cdot (12 - j45) =$$

$$(-14 - j16) + (2 - j4) = (17 + j32) \cdot 4e^{j150} = \frac{14 - j34}{-6 - j8} = \frac{180e^{j170}}{4 + j4} =$$

$$(-10 - j10) + 18e^{j30} = (-13 + j22) \cdot 6e^{j190} =$$

$$(-15 + j16) + 14e^{-j170} = (28 - j14) \cdot 6e^{j90} =$$

Задача 50. Комплекс действующего значения напряжения на входе цепи

$$\dot{U} = 220e^{-j30} \text{ В. Ток цепи } \dot{I} = 20e^{j20} \text{ А.}$$

Рассчитать комплексное сопротивление цепи и его составляющие, а так же комплексную мощность цепи. Какой характер имеет нагрузка?

Задача 51 Действующее значение напряжения на входе цепи, схема которой представлена на рисунке 52, $U=100\text{В}$ ($\psi_u = 20^\circ$). Параметры цепи имеют следующие значения: $R_1=10\text{Ом}$; $R_2=13\text{Ом}$; $x_C=-4\text{Ом}$. Рассчитать показания приборов, реактивную мощность, расходуемую в цепи.

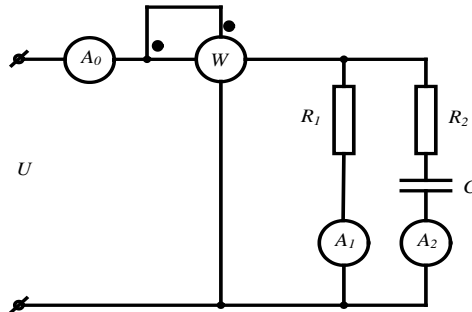
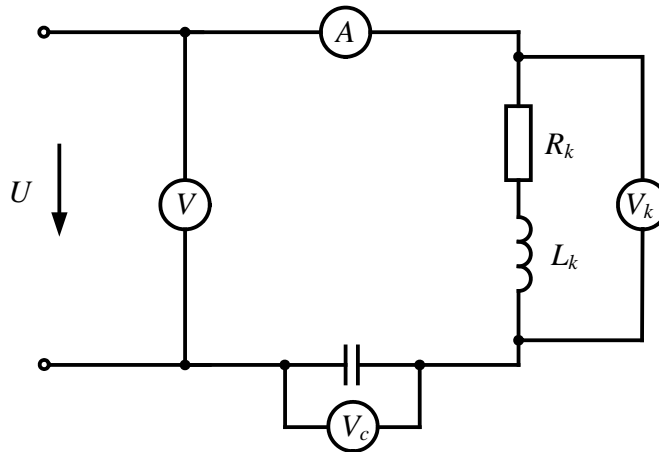


Рисунок 52

Задача 52. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 53, действует напряжение на входе $\dot{U} = 120e^{j24^\circ}$ с частотой $f=50\text{Гц}$. Цепь имеет следующие параметры: $R_k=4\text{Ом}$; $L_k=12,7\text{мГн}$; $C=398\text{мкФ}$. Рассчитать показания приборов. На какой частоте в цепи возникнет резонанс напряжений?

Рисунок 53



Задача 53. К зажимам цепи (рис. 54) подведено синусоидальное напряжение, действующее значение которого $U=100\text{В}$. Сопротивления $R_1=2\text{Ом}$, $R_2=4\text{Ом}$, $x_2=10\text{Ом}$, $x_3=4\text{Ом}$. Рассчитать токи ветвей, активную и реактивную мощности, построить векторную диаграмму.

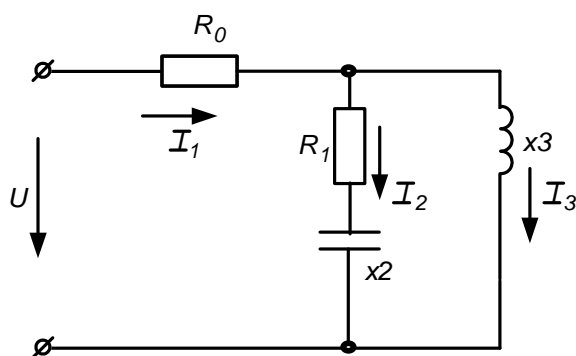


Рисунок 54

Задача 54. К зажимам цепи (рис. 55) подведено синусоидальное напряжение, действующее значение которого $\dot{U} = 200e^{-j20} B$. Сопротивления $R_1=7\text{Ом}$, $R_2=12\text{Ом}$, $R_3=10\text{Ом}$ $x_{L1}=4\text{Ом}$, $x_{L2}=8\text{Ом}$; $x_C=6\text{Ом}$. Рассчитать токи ветвей методом эквивалентного преобразования пассивных схем и методом контурных токов, проверить баланс активной и реактивной мощности, построить векторную диаграмму.

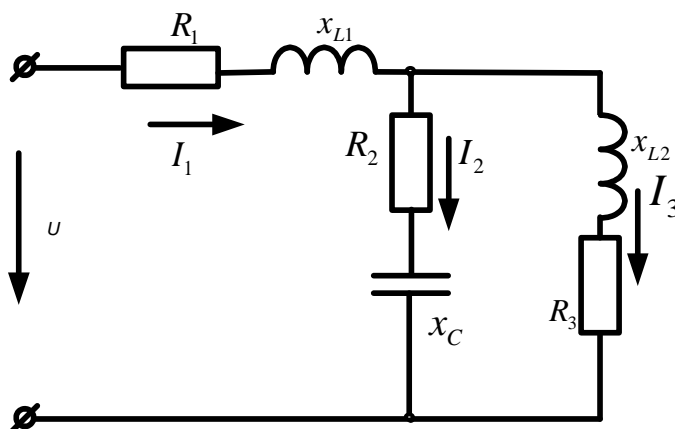


Рисунок 55

Задача 55. В схеме (рис.56) $R_1=10\text{Ом}$; $R_2=10\text{Ом}$; $C=159\text{мкФ}$; $L=31,8\text{мГн}$; $E=100\text{В}$; $f=50\text{Гц}$. Рассчитать токи используя метод преобразования пассивных схем, а так же методом контурных токов. Сравнить полученные результаты. Проверить баланс активной и реактивной мощности. Построить векторную диаграмму токов и напряжений

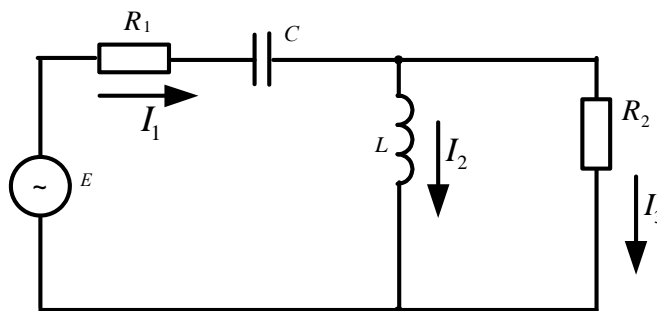


Рисунок 56

Задача 56. К зажимам цепи (рис. 57) подведено синусоидальное напряжение, действующее значение которого $U=100\text{В}$. Сопротивления $R_0=1\text{Ом}$, $R_1=3\text{Ом}$, $R_2=1\text{Ом}$, $Z_k=4\text{Ом}$. Частота $f=50\text{Гц}$. Определить емкость C конденсатора, при которой в цепи наступит режим резонанса токов, значения токов I_1, I_2, I_3 при наступлении резонанса. Построить векторную диаграмму напряжений и показать на ней векторы токов для режима резонанса.

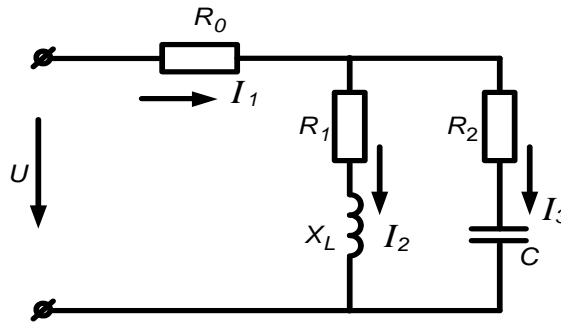


Рисунок 57

4. Расчет электрических цепей трехфазного тока

Трехфазные цепи являются частным случаем многофазных систем.

Многофазными системами называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга и генерируемые одним источником электрической энергии.

Каждую из цепей, объединяющую источник энергии, линию электропередачи и приемник, принято называть **фазой** многофазной системы.

Наиболее простой и экономичной оказалась симметричная трехфазная система, которая реализует все основные преимущества многофазных систем как перед другими многофазными, так и в отношении однофазных цепей синусоидального тока.

При вращении ротора трехфазного генератора в его статорных обмотках индуцируются синусоидальные ЭДС, равные по величине и сдвинутые по фазе на угол $2\pi/3 = 120^\circ$ (рис.58).

Если за начало отсчета принять момент времени, когда ЭДС фазы A равна нулю ($e_A = 0$), можно записать:

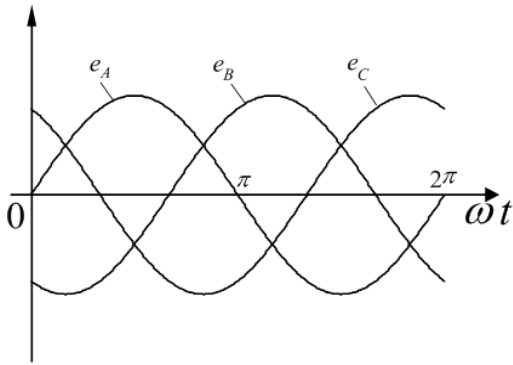
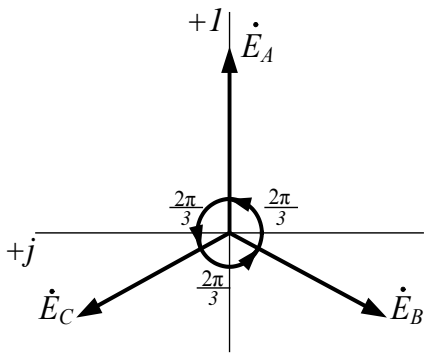


Рисунок 58

$$\begin{aligned}
 e_A &= E_m \sin \omega t; \\
 e_B &= E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) = E_m \sin (\omega t - 120^\circ); \\
 e_C &= E_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) = E_m \sin (\omega t - 240^\circ).
 \end{aligned} \tag{27}$$

В символической форме эта система ЭДС запишется следующим образом:



$$\begin{aligned}
 \dot{E}_A &= E_\phi; \\
 \dot{E}_B &= E_\phi e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E_\phi \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \\
 \dot{E}_C &= E_\phi e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E_\phi \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{28}$$

4.1 Расчет цепей при соединении генератора и нагрузки по схеме звезда.

Рисунок 59

При соединении генератора в звезду:

- а) линейные напряжения по модулю в $\sqrt{3}$ больше фазовых напряжений генератора;

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_\phi; \tag{28}$$

- б) линейный ток генератора равен его фазовому току

$$I_{\text{л}} = I_\phi. \tag{29}$$

При соединении нагрузки в звезду:

- а) линейный ток равен фазовому

$$I_{\text{л}} = I_\phi; \tag{30}$$

- б) линейные напряжения связаны с фазовыми соотношениями:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{л}} &= \dot{U}_{\text{AB}} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \\
 \dot{U}_{\text{BC}} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C; \\
 \dot{U}_{\text{CA}} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A.
 \end{aligned} \tag{31}$$

В симметричной трехфазной системе $\dot{U}_A = \dot{U}_B = \dot{U}_C$. Тогда

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \quad (32)$$

Если нагрузочные сопротивления одинаковы по величине и характеру, то такая нагрузка называется *симметричной*

При симметричной нагрузке

$$\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_C = \dot{E}_\delta / Z_\delta. \quad (33)$$

Так как $Z_A = Z_B = Z_C$, то ток нейтрального провода

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 \quad (34)$$

и нейтральный провод можно изъять без изменения режима работы цепи.

4.2 Соединение генератора и нагрузки по схеме «треугольник»

Чтобы соединить фазы трехфазного генератора (или трансформатора) в треугольник, нужно конец каждой фазы подключить к началу следующей.

При соединении по схеме «треугольник – треугольник» фазовые напряжения генератора и приемника одновременно являются линейными, т.е.

$$U_\phi = U_L. \quad (35)$$

Линейные и фазовые токи отличаются. Для получения соотношений между ними следует единообразно выбрать их направления:

- а) для линейных токов от генератора к нагрузке;
- б) для фазовых – по часовой стрелке.

Тогда из первого закона Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из этих соотношений видно, что при симметричной нагрузке $\sum \dot{I}_\phi = 0$, т.е.

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (37)$$

При симметричной нагрузке линейный ток по модулю в $\sqrt{3}$ больше фазового.

Расчет трехфазных цепей

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока и поэтому их расчет производят теми же методами, что и расчет цепей однофазного синусоидального тока.

- а) Соединение «звезда – звезда» с нулевым проводом.

Если нулевой провод обладает весьма малым сопротивлением ($Z_N \approx 0$), то потенциал точки N' практически равен потенциалу точки N . При этом в схеме образуются три обособленных контура, через которые протекают токи $\dot{I}_A = \dot{E}_A / Z_A; \dot{I}_B = \dot{E}_B / Z_B; \dot{I}_C = \dot{E}_C / Z_C$. Если нагрузка равномерна, то, как было сказано выше, ток нулевого провода равен нулю. При неравномерной нагрузке ток I_N в общем случае не равен нулю.

б) При наличии в нулевом проводе некоторого сопротивления между нейтральными точками генератора и нагрузки возникает узловое напряжение $\dot{U}_{NN'} = \dot{I}_N Z_N$, что вызывает смещение нейтральной точки N' относительно точки N .

В соответствии с методом узлового напряжения

$$\dot{U}_{NN'} = \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_{NN'}}. \quad (38)$$

Из этого выражения видно, что $\dot{U}_{NN'}$ будет изменяться при изменении нагрузки в любой из фаз.

Фазовые напряжения и токи соответственно равны:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_A &= \dot{U}_A - \dot{U}_{NN'} \\ \dot{U}'_B &= \dot{U}_B - \dot{U}_{NN'} \\ \dot{U}'_C &= \dot{U}_C - \dot{U}_{NN'} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\dot{I}_A = \dot{U}'_A Y_A; \dot{I}_B = \dot{U}'_B Y_B; \dot{I}_C = \dot{U}'_C Y_C. \quad (40)$$

Вместе с $U_{NN'}$ изменяются все фазовые напряжения и токи.

в) При наличии индуктивных связей между фазами приемника должны быть учтены ЭДС взаимной индукции.

$$\dot{U}_A = (R + j\omega L)\dot{I}_A + j\omega M(\dot{I}_B + \dot{I}_C).$$

Если же система фазовых напряжений симметрична, то $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, откуда $\dot{I}_B + \dot{I}_C = -\dot{I}_A$ и $\dot{U}_A = (R + j\omega L)\dot{I}_A + j\omega M(-\dot{I}_A) = [R + j\omega(L - M)]\dot{I}_A$, т.е. в этом случае цепь эквивалентна цепи без индуктивных связей, но с индуктивностью приемника равной $(L - M)$.

г) При соединении нагрузки в треугольник и наличии сопротивлений в линейных про-

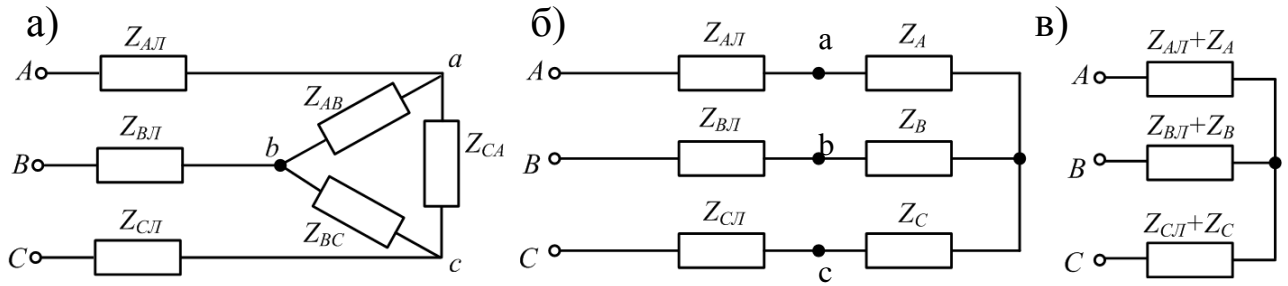


Рисунок 60

водах (рис.60,а) можно применить метод преобразования цепи, например, треугольник сопротивлений нагрузки, преобразовать в эквивалентную звезду (рис.60,б).

Объединяя в каждой фазе сопротивления линии и приемника, приводят схему к эквивалентной звезде (рис.48,в), после определения токов которой, возвращаются к исходной схеме, находя сначала фазовые напряжения на звезде нагрузки, а затем токи в исходном треугольнике.

Под активной мощностью трехфазной системы понимают сумму активных мощностей фаз нагрузки и нейтрального провода:

$$P = P_A + P_B + P_C + P_N \quad (41)$$

Реактивная мощность – это сумма реактивных мощностей фаз нагрузки и нейтрального провода:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_N \quad (42)$$

Полная мощность трехфазной системы

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (43)$$

Если нагрузка симметрична, то $P_N = Q_N = 0$;

$$P_A = P_B = P_C = U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi_\phi \quad Q_A = Q_B = Q_C = U_\phi \cdot I_a \cdot \sin \varphi$$

$$Q_A = Q_B = Q_C = U_\phi \cdot I_\phi \cdot \sin \varphi_\phi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P &= 3U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi_\phi; \\ Q &= 3U_\phi \cdot I_\phi \cdot \sin \varphi_\phi; \\ S &= 3U_\phi \cdot I_\phi. \end{aligned} \quad (44)$$

При симметричной нагрузке независимо от способа ее соединения

$$3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3}U_{\phi}\sqrt{3}I_{\phi} = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \text{ откуда}$$

$$P = \sqrt{3}U_{л} \cdot I_{л} \cdot \cos\varphi_{\phi};$$

$$Q = \sqrt{3}U_{л} \cdot I_{л} \cdot \sin\varphi_{\phi}; \quad (45)$$

$$S = \sqrt{3}U_{л} \cdot I_{л}.$$

Рассмотрим пример расчета симметричной трехфазной цепи.

На рисунке 61 приведена схема трехфазной цепи, в которой имеется трехфазный генератор и симметричная нагрузка. Действующее значение ЭДС фазы генератора E_A , период T и параметры схемы заданы. Начальную фазу E_A принять нулевой. Требуется: рассчитать токи, и построить векторную диаграмму токов, подсчитать активную мощность трехфазной системы.

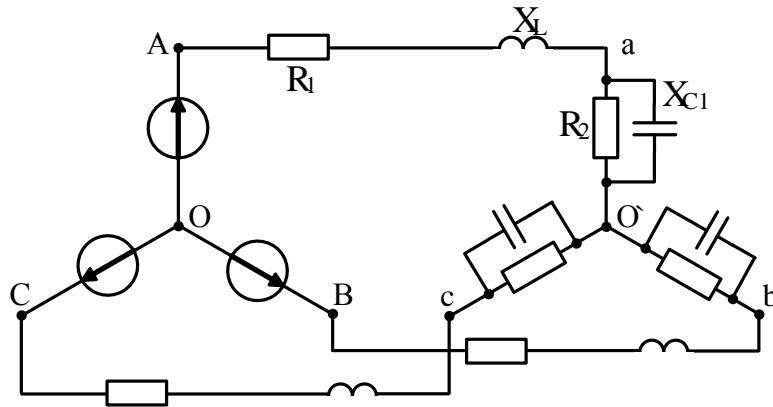


Рисунок 61

$$E_A = 100\text{В}; T = 0.015\text{с}; L = 22.32\text{мГн}; C = 279\text{мкФ}; R_1 = 4.33\text{Ом}; R_2 = 8.66\text{Ом}.$$

Решение

Находим угловую частоту и реактивные сопротивления схемы.

$$\omega = 2\pi/T = 6.28/0.015 = 418.7\text{с}^{-1}.$$

$$x_L = \omega L = 418.7 \cdot 22.32 \cdot 10^{-3} = 9.3\text{Ом};$$

$$x_C = 1/\omega C = 1/418.7 \cdot 279 \cdot 10^{-6} = 8.6\text{Ом}.$$

Вычисляем комплексное сопротивление фазы

$$z_{\phi} = \frac{R_2 \cdot (-jx_{C1})}{R_2 - jx_{C1}} = \frac{8.66 \cdot 8.6e^{-j90}}{8.66 - j8.6} = \frac{74.48e^{-j90}}{12.2e^{-j44.8}} = 6.1e^{-j45.2} = (4.3 - j4.3)\text{Ом}.$$

Находим полное сопротивление фазы с учетом сопротивления линейного провода

$$\begin{aligned} Z'_\phi &= Z_\phi + Z_\lambda = 4.3 - j4.3 + R_1 + jx_L = 4.3 - j4.3 + 4.33 + j9.3 = \\ &= 8.63 + j5 = 10e^{j30^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Запишем систему фазных ЭДС

$$E_A = 100V; \quad E_B = 100e^{-j120^\circ} V; \quad E_C = 100e^{j120^\circ} V.$$

Находим фазные токи

$$\dot{I}_A = \dot{E}_A / Z'_\phi = 100 / 10e^{j30^\circ} = 10e^{-j30^\circ} A;$$

$$\dot{I}_B = \dot{E}_B / Z'_\phi = 100e^{-j120^\circ} / 10e^{j30^\circ} = 10e^{-j150^\circ} A;$$

$$\dot{I}_C = \dot{E}_C / Z'_\phi = 100e^{j120^\circ} / 10e^{j30^\circ} = 10e^{j90^\circ} A.$$

Рассчитываем комплексную мощность фазы А:

$$\tilde{S} = \dot{U}_A \cdot \dot{I}_A^* = 100 \cdot 10e^{j30^\circ} = 1000e^{j30^\circ} = 1000 \cdot \cos 30^\circ + j1000 \cdot \sin 30^\circ = 860 + j500 = P_A + jQ_A,$$

откуда $P = 3P_A = 2580 \text{ Вт}$.

Векторная диаграмма токов показана на рисунке 62

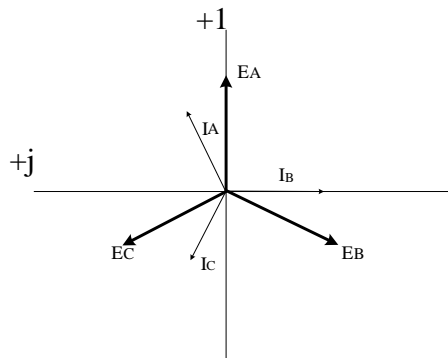


Рисунок 62

Задачи

Задача 57. В схеме (рис.63) $U_\lambda = 127 \text{ В}$ $R_A = R_B = R_C = 4 \text{ Ом}$. $x_A = x_B = x_C = 6 \text{ Ом}$. Определить фазные и линейные токи, активную и реактивную мощность каждой фазы и всей системы. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

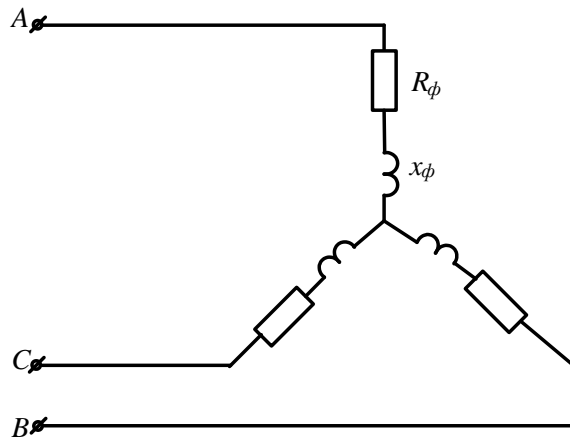


Рисунок 63

Задача 58. К трехфазному трансформатору (рис.64), обмотки которого соединены в звезду, подключены соединенные треугольником три одинаковые катушки. Фазные напряжения трансформатора $U_{\phi}=127\text{В}$. Сопротивление катушки $x_L=22\text{Ом}$. Определить токи в катушках и обмотках трансформатора.

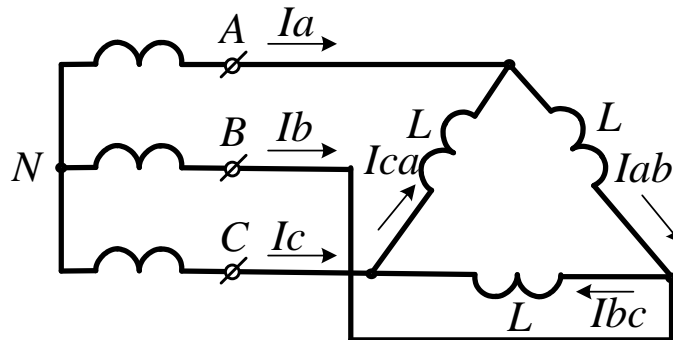


Рисунок 64

Задача 59. Три одинаковые группы ламп соединены в треугольник и получают питание от трехфазного трансформатора, обмотки которого соединены в звезду. Сопротивление каждой группы ламп 11Ом , фазное напряжение трансформатора $U_{\phi}=127\text{В}$. Определить токи в обмотках трансформатора и фазах приемника.

Задача 60. К трехфазному трансформатору подключены треугольником три одинаковые приемника, сопротивление каждого из которых равно $Z = 16 + j12$. Обмотки трансформатора соединены в звезду с фазным напряжением 127В . Найти фазные и линейные токи, активную и реактивную мощности фазы и всей системы, построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Задача 61. От трехфазной линии с линейным напряжением 380В получают питание три одинаковых приемника, соединенных в звезду. Сопротивление каждого приемника

$Z = 8 + j6$ (Ом). Рассчитать токи приемников, активную и реактивную мощность, построить векторную диаграмму.

Задача 62. В схеме (рис.65) $U_{\text{л}}=380\text{В}$; $R_A=4\text{Ом}$; $R_B=6\text{Ом}$; $R_C=8\text{Ом}$; $x_A=12\text{Ом}$; $x_B=6\text{Ом}$; $x_C=6\text{Ом}$. Рассчитать фазные и линейные токи, ток нулевого провода, построить векторную диаграмму токов.

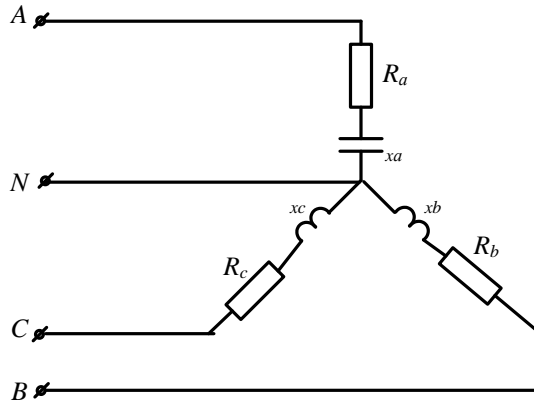


Рисунок 65

Задача 63. В схеме (рис.66) $U_{\text{л}}=380\text{В}$; $Z_A=6+j8(\text{Ом})$; $Z_B=24+j7(\text{Ом})$; $Z_C=20\text{Ом}$. Рассчитать фазные и линейные токи, ток нулевого провода, активную и реактивную мощность цепи, построить векторную диаграмму токов.

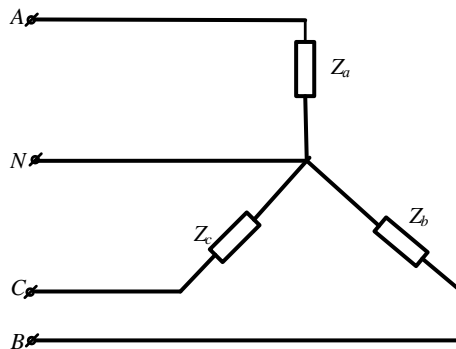


Рисунок 66

Задача 64. К трехфазной линии (рис. 67) с линейным напряжением $U_{\text{л}}=380\text{В}$ подключены три одинаковых приемника, соединенные по схеме « звезда» с нейтральным проводом. Активное и реактивное сопротивление каждого приемника равны $R_{\phi}=3\text{Ом}$, $x_{\phi}=4\text{Ом}$. Определить токи в фазах и нейтральном проводе, построить совмещенную векторную диаграмму напряжений и токов.

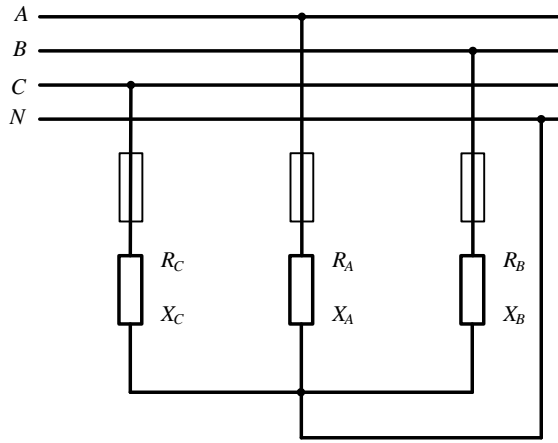


Рисунок 67

Задача 65. К трехфазной линии симметричным линейным напряжением $U_{\text{л}}=220\text{В}$ подключен треугольником приемник, сопротивление каждой фазы которого $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = 10 + j10(\text{Ом})$. Рассчитать фазные и линейные токи, а также активную мощность цепи. Построить векторную диаграмму.

Задача 66. К трехпроводной трехфазной линии (рис. 68) с линейным напряжением $U_{\text{л}}=380\text{В}$ подключен трехфазный приемник, соединенный треугольником: $R=100\text{Ом}$, $x_L=100\text{Ом}$, $x_C=100\text{Ом}$. Рассчитать токи в фазах и в линии, построить совмещенную векторную диаграмму напряжений и токов.

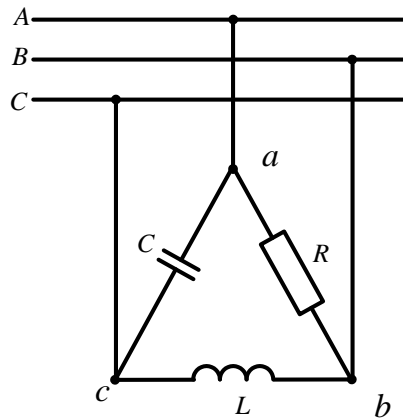


Рисунок 68

Задача 67. В схеме (рис.69) $U_{\text{л}}=400\text{В}$ $Z_{\text{л}}=3+j4(\text{Ом})$; $Z_{ab}=150\text{Ом}$; $Z_{bc}=200\text{Ом}$; $Z_{ca}=250\text{Ом}$. Определить токи в линии и фазах приемника, активную мощность цепи.

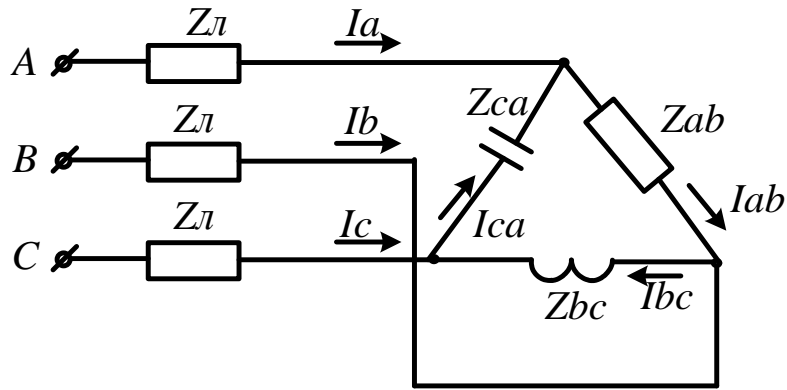


Рисунок 69

Задача 68. В схеме (рис.70) $U_{\text{л}}=120\text{В}$ $R_{\text{л}}=1(\text{Ом})$; $R=15\text{Ом}$; $x_{\text{L}}=5\text{Ом}$; Определить токи в линии и фазах приемника, активную мощность цепи.

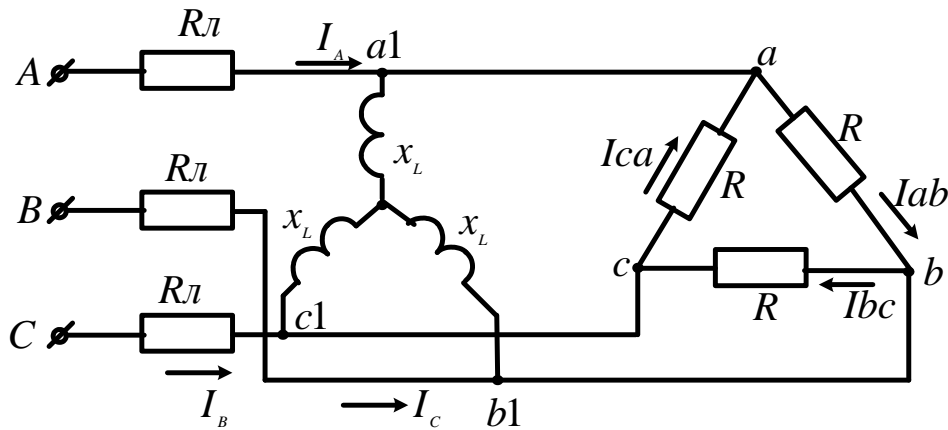


Рисунок 70

5. Расчет линейных электрических цепей при несинусоидальных напряжениях и токах

В электрических цепях с линейными элементами несинусоидальный ток возникает, если в ней действует несинусоидальное напряжение (ЭДС).

Несинусоидальный ток и напряжение на отдельных участках цепи появляются и при синусоидальном напряжении источника, когда в цепи имеются элементы с нелинейной вольтамперной характеристикой.

Аналитическое описание несинусоидальной периодической функции осуществляется с помощью теоремы Фурье, согласно которой любая периодическая функция $f(\omega t)$ может быть представлена в виде суммы ряда составляющих, из которых одна составляющая постоянная, а другие являются синусоидальными функциями с кратными частотами (гармонические составляющие или просто гармоники).

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \phi_k), \quad (46)$$

где A_0 – постоянная составляющая (нулевая гармоника);

A_1, A_2, A_3, A_k – амплитуды гармонических составляющих;

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_k$ – начальные фазы соответствующих гармоник.

Первая гармоническая составляющая имеет период, равный периоду несинусоидальной кривой $f(\omega t)$. Она называется первой или основной гармоникой.

Все другие гармонические составляющие имеют частоты, в целое число раз большие частоты первой гармоники. Эти гармоники называются высшими.

Выражение (32) можно преобразовать, применив известную из тригонометрии формулу синуса суммы двух углов.

$$f(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t. \quad (47)$$

Особенность такой записи состоит в том, что гармоники составляют ряд синусов и ряд косинусов с нулевыми начальными фазами.

Постоянная составляющая в тригонометрическом ряду отсутствует, если среднее за период значение функции равно нулю.

Действующее значение несинусоидального тока находят как

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}, \quad (48)$$

где I_0, I_1, \dots, I_k – действующие значения токов соответствующих гармоник.

Аналогичное выражение можно получить и для действующего значения несинусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2}. \quad (49)$$

Активная мощность в цепи несинусоидального тока равна сумме активных мощностей, соответствующих постоянной составляющей и отдельным гармоникам:

Пусть требуется найти ток в электрической цепи под воздействием несинусоидальной ЭДС

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{kn} \sin(k\omega t + \phi_k). \quad (50)$$

Если цепь линейна, то есть параметры R, L, C не зависят от токов и напряжений, то ток в цепи может быть найден методом наложения путем суммирования токов, создаваемых каждой из слагаемых ЭДС в отдельности:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \phi_k - \varphi_k), \quad (51)$$

где $I_0 = \frac{E_0}{Z(0)}$; $I_{km} = \frac{E_{km}}{Z(k\omega)}$.

Под $Z(0)$ понимается сопротивление цепи постоянному току, т.е. при $\omega=0$, а под $Z(k\omega)$ – полное сопротивление цепи при частоте $k\omega$.

Угол

$$\varphi_k = \arccos \frac{r}{z(k\omega)}. \quad (52)$$

Под $Z(0)$ понимается сопротивление цепи по постоянному току, т.е. при $\omega=0$, а под $Z(k\omega)$ – полное сопротивление цепи при частоте $k\omega$.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, схема которой представлена на рисунке 71.

К цепи приложено напряжение: $u = [120 + 200 \sin \omega t + 50 \sin(3\omega t + 30)]$ В. Частота основной гармоники $f=50$ Гц. $R=30$ Ом; $R_1=18$ Ом; $L=60$ мГн. Написать выражения мгновенных значений тока i и напряжения u_{ab} . Определить действующие значения этих величин и активную мощность цепи.

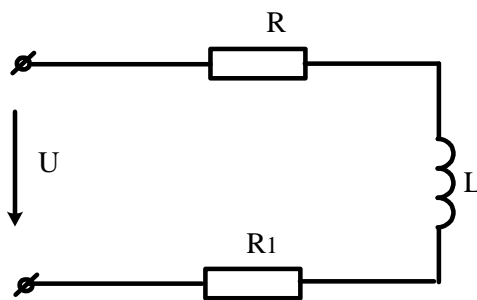


Рисунок 71

Решение

Вычислим постоянную составляющую тока и искомого напряжения

$$I(0) = \frac{U(0)}{R + R_1} = \frac{120}{30 + 18} = 2,5 \text{ A.}$$

$$U_{ab}(0) = I(0) \cdot R_1 = 2,5 \cdot 18 = 45 \text{ B.}$$

Проведем расчет для первой гармоники

$$\dot{i}_{m(1)} = \frac{\dot{U}_{m(1)}}{Z(\omega)} = \frac{200}{R_1 + R_2 + j\omega L} = 3,88 e^{-j21,2} \text{ A}$$

$$\dot{U}ab_{m(1)} = I_{m(1)} \cdot Z_{ab(1)} = I_{m(1)} \cdot (R_1 + j\omega L) = 3.88e^{-j21.2} \cdot 26.1e^{j46.2} = 101e^{j25} B.$$

Проведем расчет для третьей гармоники

$$\dot{I}_{m(3)} = \frac{\dot{U}_{m(3)}}{Z(3\omega)} = \frac{50e^{j30}}{R_1 + R_2 + j3\omega L} = 0.67e^{-j19.4} A$$

$$\dot{U}ab_{m(3)} = \dot{I}_{m(3)} \cdot Z_{ab(3\omega)} = \dot{I}_{m(3)} \cdot (R_1 + j3\omega L) = 40e^{j52.4} B.$$

Запишем мгновенные значения i и u_{ab} :

$$i = [2.5 + 3.88 \sin(\omega t - 21.2^\circ) + 0.67 \sin(3\omega t - 19.4^\circ)] A.$$

$$u_{ab} = [45 + 101 \sin(\omega t + 25^\circ) + 40 \sin(3\omega t + 52.4^\circ)] B.$$

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{2.5^2 + \frac{3.88^2}{2} + \frac{0.67^2}{2}} = 3.74 A.$$

Активная мощность, расходуемая в цепи

$$P = U_{(0)} I_{(0)} + U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_{(3)} I_{(3)} \cos \phi_3 = 120 \cdot 2.5 + \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3.88}{\sqrt{2}} \cos 21.2^\circ + \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0.67}{\sqrt{2}} \cos 19.4^\circ = 680 \text{ Вт}$$

Задачи

Задача 69. Мгновенное значение несинусоидального тока равно

$$i(t) = 2,86 + 3,62 \sin(\omega t - 24^\circ) + 1,37 \sin(3\omega t + 90^\circ). \quad \text{Вычислить действующее}$$

значение этого тока.

Задача 70. В электрической цепи, изображенной на рисунке 72 действует несинусоидальная ЭДС $e = 100 \sin \omega t + 100 \sin 2\omega t$ при $\omega = 1000 \text{ рад/с}$. Цепь имеет следующие параметры: $R = 100 \text{ Ом}$; $C = 10 \text{ мкФ}$. Рассчитать мгновенное значение тока. Чему равно действующее значение этого тока.

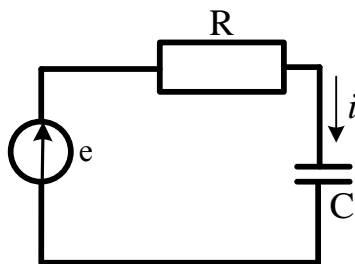


Рисунок 72

Задача 71. В цепи (рис.73) мгновенное значение тока в ветви R_1 , L равно $i_L = 20 + \sqrt{2} \cdot 10 \sin \omega t + \sqrt{2} \cdot 5 \sin 2\omega t$, активные сопротивления R_1 и R_2 одинаковы

($R_1=R_2=1\text{Ом}$). При основной угловой частоте $\square\square$ индуктивное сопротивление $x_L=1,5\text{ Ом}$, а емкостное $x_C=3\text{Ом}$. Найти выражения для мгновенных напряжений на зажимах цепи, тока в ветви R_2 , C и в неразветвленной части цепи. Определить активную мощность на зажимах цепи:

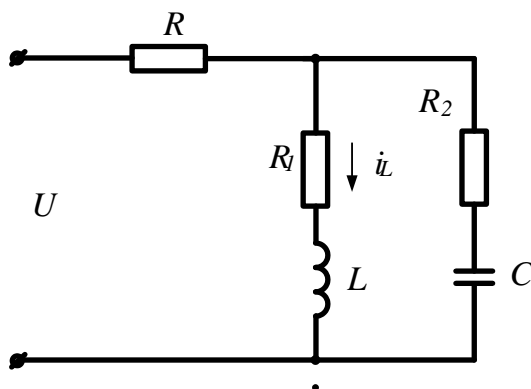


Рисунок 73

Задача 72. В электрической цепи, изображенной на рисунке 74 действует несинусоидальное напряжение $u = 30 + 60 \sin \omega t$. найти действующее значение тока и мощность, расходуемую в цепи, если $R = 3\text{Ом}$; $\omega_1 L = 4\text{Ом}$. Записать выражения для мгновенных значений тока и напряжения на индуктивности

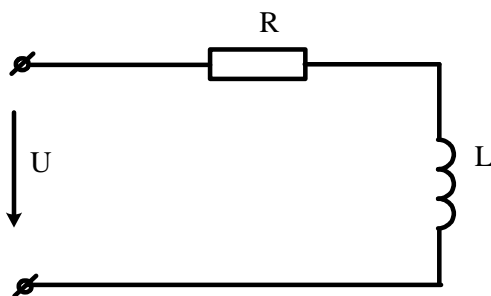


Рисунок 74

Задача 73. К зажимам цепи (рис. 75) подведено периодическое несинусоидальное напряжение $U = \sqrt{2} \cdot 100 \sin \omega t + \sqrt{2} \cdot 50 \sin 3\omega t + \sqrt{2} \cdot 5 \sin \omega t$, где основная частота $\square\square=314\text{ рад/с}$. Активное сопротивление и емкость в цепи соответственно равны $R=2\text{Ом}$ и $C=6,36\text{мкФ}$. Индуктивность L может быть варьируема в широком диапазоне. Определить: а) числовые значения L , соответствующие наступлению в цепи резонанса на частотах трех гармоник напряжения; б) действующие значения тока для этих трех гармоник. Построить кривые действующих токов всех трех гармоник и общего тока в функции L :

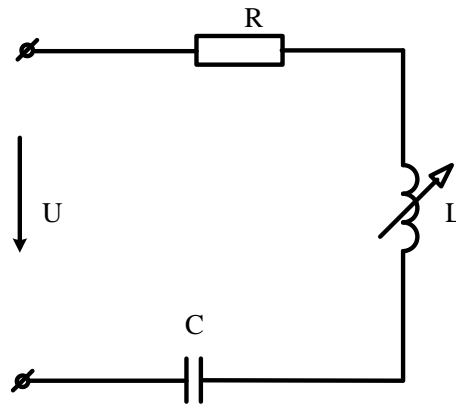


Рисунок 75

Задача 74. К зажимам цепи (рис. 76) приложено периодическое несинусоидальное напряжение $U = 6 + \sqrt{2} \cdot 100 \sin(\omega t - 15^\circ) + \sqrt{2} \cdot 25 \sin(3\omega t - 30^\circ)$. Активное сопротивление в неразветвленной части цепи равно $R=40\text{ Ом}$. При основной угловой частоте \square индуктивное сопротивление $x_L=1\text{ Ом}$, а емкостное $x_C=9\text{ Ом}$.

Найти выражения для мгновенных токов на всех участках цепи. Определить показания всех амперметров электромагнитной системы; активную мощность на зажимах цепи:

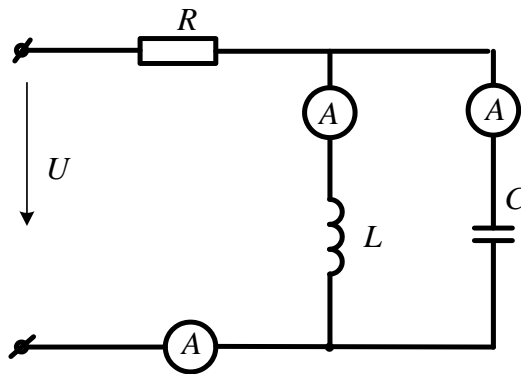


Рисунок 76

Задача 75. Параметры схемы, изображенной на рисунке 77 при основной частоте $\omega_1 L = 12\text{ Ом}$; $1/\omega_1 C = 30\text{ Ом}$ $R_1 = 6\text{ Ом}$ $R_2 = 5\text{ Ом}$; $R_3 = 20\text{ Ом}$. К цепи приложено напряжение $u = U_0 + U_{m(1)} \sin \omega_1 t + U_{m(3)} \sin(3\omega_1 t + \psi_3)$, где $U_0 = 30\text{ В}$; $U_{m1} = 100\text{ В}$; $U_{m3} = 40\text{ В}$; $\psi_3 = 20^\circ$. Записать мгновенное значение тока i_1 . Рассчитать действующее значение каждого тока и мощность, расходуемую в цепи.

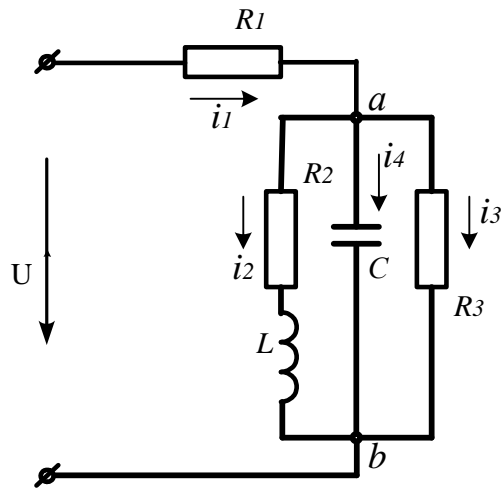


Рисунок 77

6. Четырехполюсники

Четырехполюсником называют электрическую цепь, имеющую два входных и два выходных зажима (трансформатор, линия электропередачи, усилитель и т.п.).

Графически четырехполюсник принято изображать в виде прямоугольника с выходящими из него концами (полюсами), как это показано на рисунке 78.

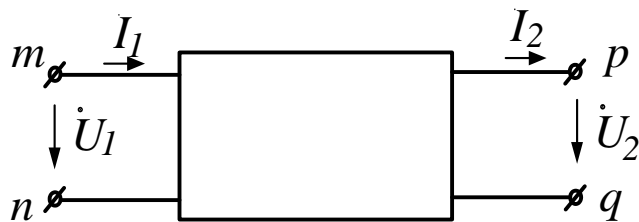


Рисунок 78

Если внутри четырехполюсника имеются источники электрической энергии, он является активным, и внутри прямоугольника ставят букву «А». Входные ток и напряжение – I_1, U_1 , выходные – I_2, U_2 .

Четырехполюсник является передаточным звеном между источником и нагрузкой. При этом предметом исследования являются токи и напряжения на выводах четырехполюсника, а не внутри него. Выводы mn , к которым подключают источник, называют входными, а выводы pq , к которым подключают нагрузку – выходными.

Любая сложная электрическая цепь может быть представлена как совокупность составных четырехполюсников, соединенных по определенной схеме.

Для любого пассивного четырехполюсника напряжение и ток на входе \dot{U}_1, \dot{I}_1 связаны с напряжением и током на выходе \dot{U}_2, \dot{I}_2 уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.\end{aligned}\quad (53)$$

В этих уравнениях комплексные коэффициенты А, В, С, D зависят от схемы внутренних соединений четырехполюсника, от значений сопротивлений схемы и от частоты. Для каждого четырехполюсника их можно определить расчетным или опытным путем.

Коэффициенты связаны соотношением:

$$AD - BC = 1 \quad (54)$$

В симметричном четырехполюснике $A=D$. С помощью уравнений четырехполюсника можно определить нагрузочный режим, т.е. найти \dot{I}_1 и \dot{U}_1 для заданных \dot{U}_2 и \dot{I}_2 .

Характеристическое сопротивление. Постоянная передачи.

Характеристическим сопротивлением Z_c называют отношение входного напряжения четырехполюсника к его входному току.

При питании со стороны входа (рис.78)

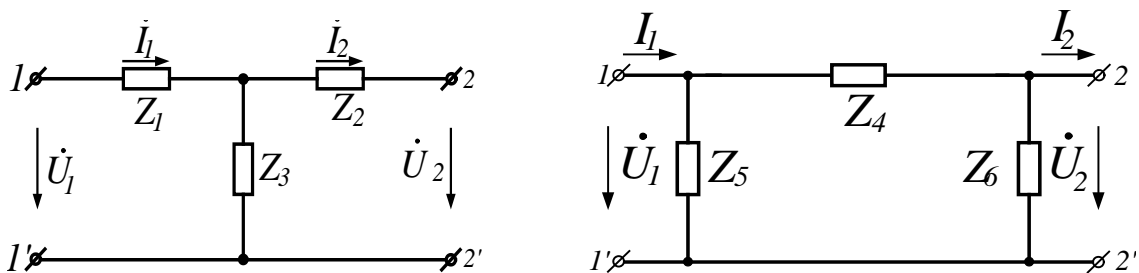
$$Z_{c1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2}. \quad (55)$$

При питании со стороны выходных зажимов

$$Z_{c2} = \frac{D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2}. \quad (56)$$

Комплексное число $(A + \sqrt{BC})$ полагают равным e^g , где g – *постоянная передачи* четырехполюсника

Любой пассивный четырехполюсник выполняет функцию передаточного звена между источником и нагрузкой. Эту же функцию могут выполнять простейшие электрические схемы – схемы замещения Т и П – образные (рис.79).



Для Т-образной схемы сопротивлений резисторов связаны с коэффициентами четырехполюсника соотношениями:

Рисунок 79

$$Z_3 = \frac{1}{C}; \quad Z_1 = \frac{A-1}{C}; \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}. \quad (57)$$

Для П-образной схемы эти соотношения имеют вид:

$$Z_4 = B; \quad Z_6 = \frac{B}{A-1}; \quad Z_5 = \frac{B}{D-1}. \quad (58)$$

Задачи

Задача 76. В схеме (рис.80) определить А-параметры четырехполюсника

- используя законы Кирхгофа;
- по данным режимов холостого хода и короткого замыкания.

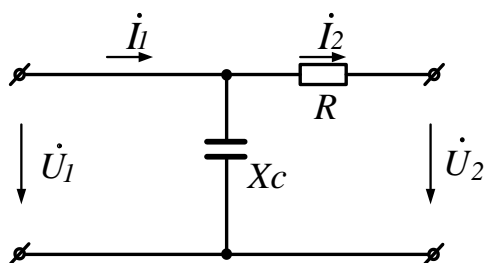


Рисунок 80

Задача 77. В схеме (рис. 81) $R_1=100\text{Ом}$; $R_2=200\text{Ом}$; $R_0=800\text{Ом}$. Определить:

- Коэффициенты Z и A форм.
- Сопротивление R_1 , при котором четырехполюсник будет симметричным.

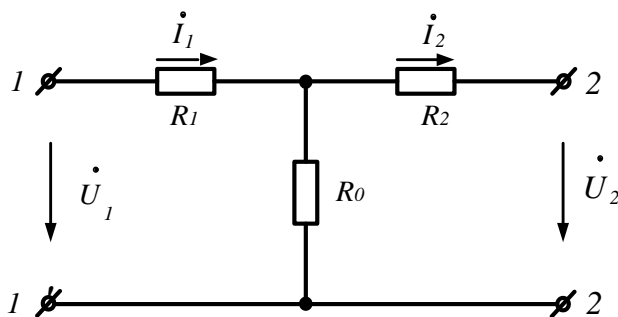


Рисунок 81

Задача 78. Четырехполюсник с неизвестной электрической схемой испытан при прямом и обратном включениях (рис 82).

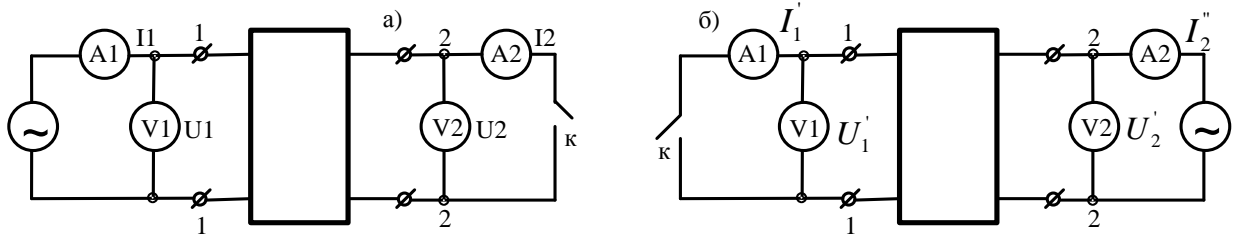


Рисунок 82

При прямом включении приборы показали:

$$U_{1x} = 9B; I_{1x} = 10mA; U_{2x} = 8B$$

$$U_{1k} = 2,93B; I_{1k} = 11,25mA; I_{2k} = 9mA$$

При обратном включении:

$$U_{2x}' = 8B; I_{2x}' = 8mA; U_{1x} = 6,4B$$

$$U_{2k}' = 5,85B; I_{2k}' = 20,2mA; I_{1k}' = 18mA$$

Определить коэффициенты четырехполосника в А-форме.

Задача 79. Для четырехполосника, рассмотренного в предыдущей задаче, составить П-образную Т-образную схемы замещения. Рассчитать параметры схем замещения.

7. Переходные процессы в линейных электрических цепях Общие положения и причины возникновения.

Процессы, происходящие в электрических цепях, можно разбить на стационарные или установившиеся и переходные. Под стационарными процессами работы электрической цепи понимают такие режимы, при которых напряжения и токи в цепи либо неизменны (цепи постоянного тока), либо изменяются по периодическому закону, но с неизменной амплитудой.

Любому установившемуся режиму соответствует вполне определенный запас электрической энергии, сосредоточенный в магнитных полях индуктивных катушек и электрических полях конденсаторов.

Любое изменение параметров цепи (включение, выключение, изменение сопротивления и т.п.) называется *коммутацией*.

В результате любой коммутации электрическая цепь переходит к новому установившемуся режиму, которому соответствует уже другой запас энергии.

Теоретически считается, что процесс коммутации совершается мгновенно, то есть на включение, выключение или переключение время не затрачивается. Тем не менее, переход цепи от одного установившегося режима к другому происходит не мгновенно, а в течение определенного времени.

Переходным называется процесс перехода электрической цепи от одного установившегося режима к другому, чем-то отличающемуся от предыдущего.

В процессе перехода цепи к новому установившемуся режиму происходит перераспределение энергии. Но энергия, запасенная в электрическом и магнитном поле, не может измениться мгновенно, так как в противном случае мощность цепи была бы бесконечной, что физически невозможно. Поэтому на переходный процесс затрачивается время.

О невозможности скачка тока в индуктивности и напряжения на конденсаторе.

Рассмотрим два основных положения, на которых базируется анализ и расчет переходных процессов:

1. Ток в индуктивности не может измениться скачком;

2. Напряжения на конденсаторе не может измениться скачком.

Под скачком напряжения или тока будем понимать мгновенное изменение этой величины.

Для доказательства первого положения обратимся к электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 83.

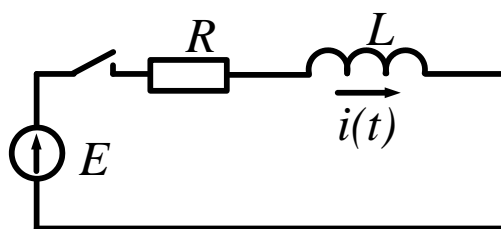


Рисунок 83

Уравнение цепи для мгновенных значений имеет вид

$$iR + L \frac{di}{dt} = E. \quad (59)$$

Ток и ЭДС могут принимать только конечные значения. Допустим, что ток может измениться скачком.

Тогда $di/dt = \infty$ и левая часть уравнения не равна его правой части, т. е. нарушается второй закон Кирхгофа.

Для доказательства второго утверждения обратимся к схеме электрической цепи, изображенной на рисунке 84.

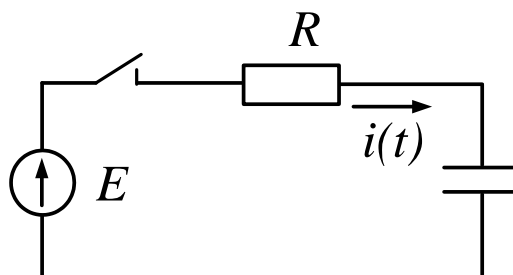


Рисунок 84

Для этой цепи $iR + u_c = E$. Так как $i_c = Cdu_c/dt$, то

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E \quad (60)$$

Если допустить возможность скачка напряжения u_c , то $du_c/dt = \infty$ и второй закон Кирхгофа не выполняется. При этом необходимо понимать, что напряжение на индуктивной катушке, как и ток через конденсатор могут изменяться мгновенно.

Законы коммутации

Из полученных выше выводов легко могут быть получены законы (правила) коммутации. Обычно при рассмотрении переходных процессов за начало отсчета принимают момент $t = 0$.

Тогда значения токов и напряжений непосредственно до коммутации обозначают $i(0_-); u(0_-)$, а эти же величины непосредственно после коммутации $i(0_+); u(0_+)$.

С учетом этих обозначений первый закон коммутации можно сформулировать следующим образом.

Ток через индуктивность непосредственно до коммутации равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \quad (61)$$

Аналогично можно сформулировать и второй закон коммутации.

Напряжение на конденсаторе непосредственно до коммутации равно напряжению на том же конденсаторе непосредственно после коммутации

$$u_c(0_-) = u_c(0_+). \quad (62)$$

Принужденные и свободные составляющие переходных токов и напряжений

Рассмотрим электрическую цепь, схема которой показана на рисунке 61. Цепь описывается уравнением, которое является линейным дифференциальным

$$iR + L \frac{di}{dt} = E, \quad (63)$$

уравнением первого порядка. Следовательно, определение тока как функции времени сводится к решению этого дифференциального уравнения.

Известно, что общий интеграл линейного дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Если действующая в цепи ЭДС постоянна ($E = \text{Const}$), то частным решением неоднородного уравнения будет E/R .

Однородное уравнение получаем из исходного, приравнивая нулю его правую часть:

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0. \quad (64)$$

Решением однородного уравнения является функция вида Ae^{pt} ,

где A и p – постоянные числа, не зависящие от t . A – постоянная интегрирования, p – показатель затухания. Для рассматриваемой цепи $A = E/R$, $p = -R/L$.

Тогда полным решением исходного уравнения будет

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (65)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения называют **принужденной** составляющей переходного тока или напряжения, а общее решение однородного дифференциального уравнения – **свободной** составляющей.

Так как принужденные составляющие являются установившимися в цепи после коммутации значениями, то они определяются в цепях постоянного тока любым из известных методов расчета цепи в установившемся режиме после коммутации, а в цепях синусоидального тока символическим методом.

В линейных электрических цепях свободные составляющие затухают по показательному закону e^{pt} . Из трех токов (полного, принужденного и свободного) основное значение имеет полный ток. Именно он является тем реальным током, который проходит по тому или иному участку цепи в переходном режиме. Для их нахождения необходимо записать систему уравнений по законам Кирхгофа, «освободить» уравнения от правой части, провести алгебраизацию этих уравнений, заменив производные и интегралы от свободных токов и решить систему относительно свободных составляющих.

Уравнение $\Delta = 0$, полученное из системы уравнений для свободных токов, называют **характеристическим** уравнением цепи. Единственным неизвестным в этом уравнении является показатель затухания p .

Характеристическое уравнение можно получить и другим путем. Для этого записывают выражение для входного сопротивления цепи в комплексной форме. Затем в полученном выражении $j\omega$ заменяют на p , а само выражение приравнивают нулю.

7.1 Классический метод расчета переходных процессов

Классическим называют метод, в котором решение дифференциального уравнения берут в виде суммы принужденного и свободного решений, а определение постоянных интегрирования производят путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений по известным корням характеристического уравнения и известным значениям свободной составляющей тока (напряжения) и ее производных, взятых при $t=0_+$.

Рассмотрим несколько примеров расчета переходных процессов классическим методом.

Задача. Определить токи в схеме (рис.85) при замыкании ключа в третьей ветви.

Параметры цепи имеют следующие значения: $E=50\text{В}$; $R_1=20\text{Ом}$; $R_2=30\text{Ом}$; $L=0,01\text{Гн}$:

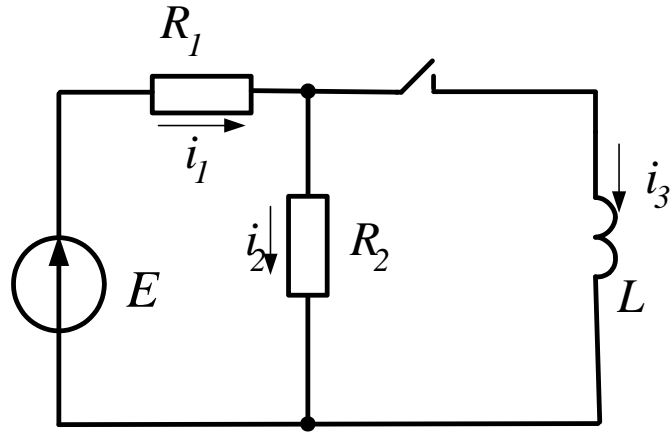


Рисунок 85

Решение

1. Анализируем режим в цепи до коммутации

$$i_3(0_-) = 0; \quad i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{50}{20 + 30} = 1 \text{ A}$$

2. Составим характеристическое уравнение и найдем его корень

$$Z_{\text{ВХ}} = R_1 + \frac{R_2 p L}{R_2 + p L} = \frac{R_1 R_2 + R_1 p L + R_2 p L}{R_2 + p L} = 0.$$

Характеристическое уравнение $R_1 R_2 + (R_1 + R_2) p L = 0$. Его корень равен

$$p = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} = -\frac{20 \cdot 30}{50 \cdot 0,01} = -1200 \text{ c}^{-1}$$

3. Запишем выражение для переходного тока третьей ветви

$$i_3(t) = i_{3\text{пр}} + A e^{pt}.$$

Принужденную составляющую переходного тока найдем из послекоммутационной схемы в установившемся режиме

$$i_{3\text{пр}} = \frac{E}{R_1} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ A}.$$

Тогда $i_3(t) = 2,5 + A e^{-1200t}$. Рассмотрим это выражение непосредственно после коммутации, при $t = 0_+$.

$i_3(0_+) = 2,5 + A$. Но на основании первого закона коммутации $i_3(0_+) = i_3(0_-) = 0$. Следовательно $0 = 2,5 + A$, откуда $A = -2,5$.

Тогда искомый переходный ток $i_3(t) = 2,5 - 2,5e^{-1200t}$.

Переходное напряжение на индуктивной катушке

$$u_L(t) = L \frac{di_3}{dt} = L(1200 \cdot 2,5)e^{-1200t} = 30e^{-1200t}.$$

Ток $i_2(t)$ найдем по закону Ома $i_2(t) = \frac{u_L(t)}{R_2} = \frac{30e^{-1200t}}{30} = e^{-1200t}$

На основании первого закона Кирхгофа

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = e^{-1200t} + 2,5 - 2,5e^{-1200t} = 2,5 - 1,5e^{-1200t}.$$

Для расчета и построения графиков полученных переходных токов и напряжений воспользуемся программой Mathcad.

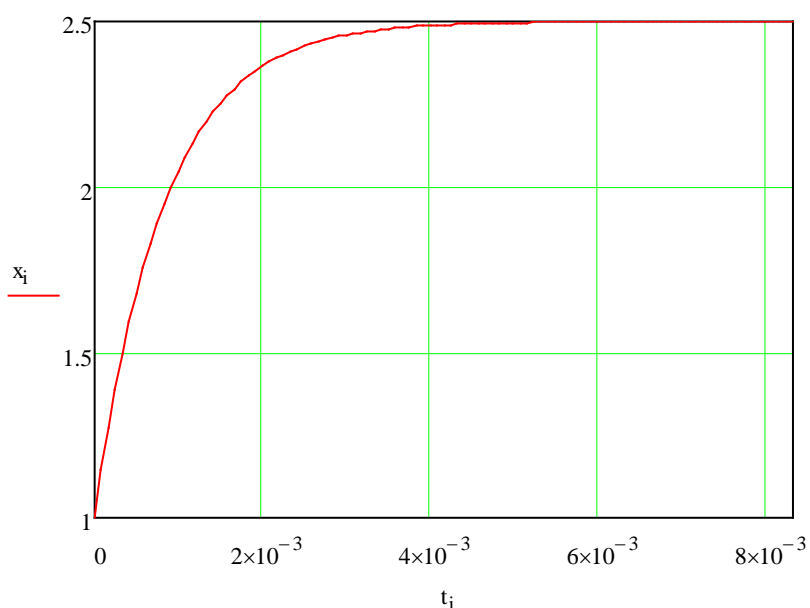


Рисунок 86 – График переходного тока $i_1(t)$

Ток в неразветвленной части цепи от докоммутационного значения нарастает по экспоненте до нового установившегося значения (рис.71).

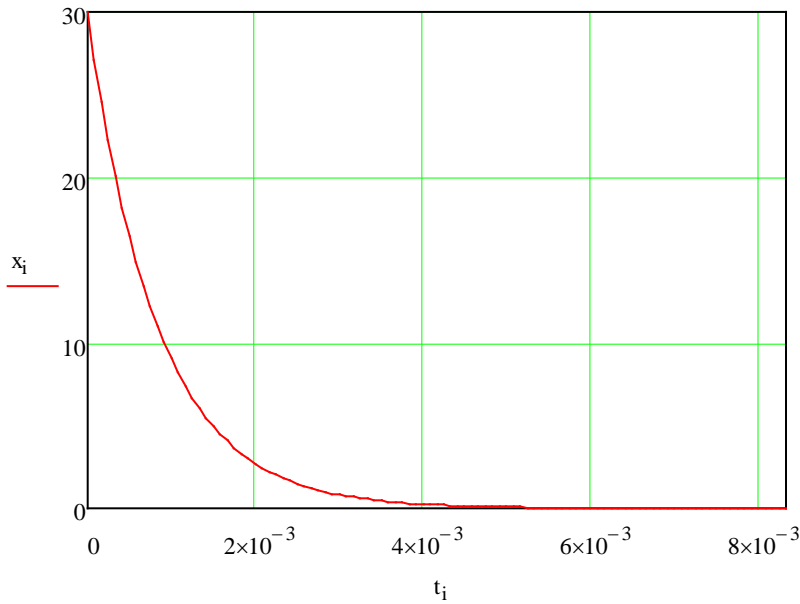


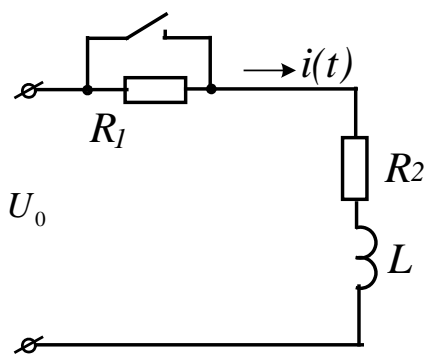
Рисунок 87 – График переходного напряжения на катушке

Напряжение на катушке после коммутации возникает скачком и затем, по мере нарастания тока, падает до нуля (рис 87).

Задача. В схеме, показанной на рисунке 88, при $t=0$ замыкается рубильник. Напряжение на входе цепи $U_0 = 50B$. Цепь имеет следующие параметры: $R_1 = 300\Omega$; $R_2 = 200\Omega$; $L = 50mA$; Найти закон изменения тока в цепи и напряжения на катушке после замыкания рубильника.

Решение

Проанализируем режим цепи до коммутации



$$i(0_-) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{50}{50} = 1A.$$

Используя выражение для входного сопротивления цепи, составим характеристическое уравнение

$$Z_{вх} = R_2 + j\omega L; \quad Z_{вх} = R_2 + pL = 0, \text{ откуда}$$

Рисунок 88

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{20}{0,05} = -400c^{-1}.$$

Выражение для переходного тока имеет вид $i(t) = i_{\text{пр}} + Ae^{pt}$. Принужденную составляющую находим из послекоммутационной схемы в установившемся режиме

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_0}{R_2} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ A.} \quad \text{Тогда } i(t) = 2,5 + Ae^{-400t}.$$

Рассмотрим это выражение непосредственно после коммутации. При $t = 0_+$

$$i(0_+) = 2,5 + A, \text{ но в соответствии с первым законом коммутации}$$

$$i(0_+) = i(0_-) = 1 \text{ A.} \quad \text{Таким образом, } 1 = 2,5 + A, \text{ откуда } A = -1,5.$$

Используя полученные данные, записываем выражение для переходного тока цепи:

$$i(t) = 2,5 - 1,5e^{-400t}.$$

Переходное напряжение на катушке найдем из выражения

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt}(2,5 - 1,5e^{-400t}) = 0,05 \cdot 400 \cdot 1,5e^{-400t} = 30e^{-400t} \text{ B.}$$

Графики переходного тока и напряжения на индуктивной катушке приведены на рисунках 89 и 90 соответственно.

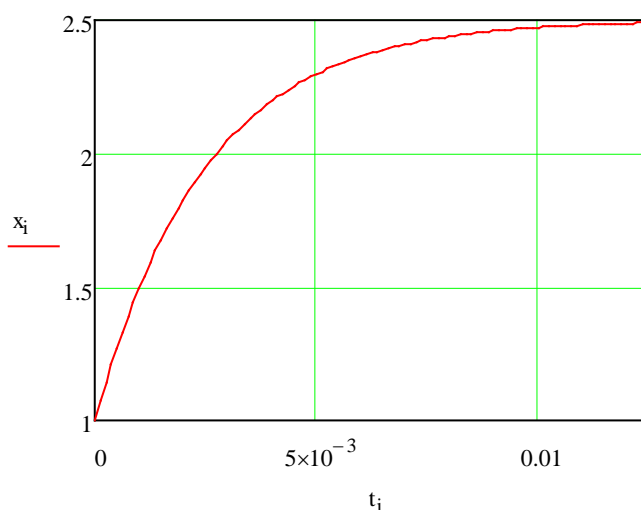


Рисунок 89 – График переходного тока цепи

Как видно из графика, ток в цепи после коммутации возрастает по экспоненте от начального до установившегося значения.

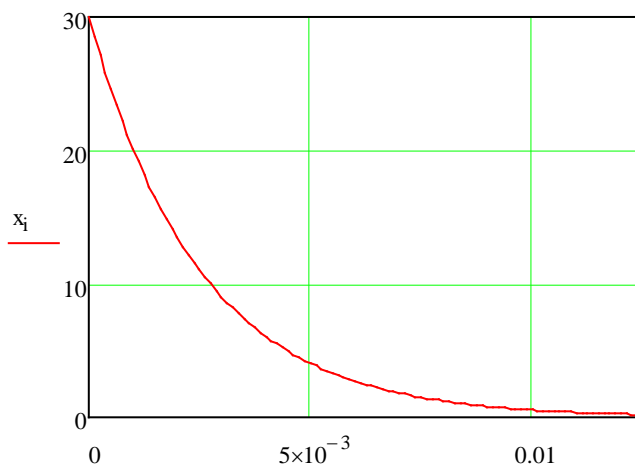


Рисунок 90 – График переходного напряжения на катушке

Напряжение на катушке после коммутации возникает скачком и затем по мере нарастания тока в цепи падает до нуля.

Задача. В цепи, изображенной на рисунке 91, при $t=0$ замыкается рубильник. В цепи действует постоянная ЭДС $E_0=240\text{В}$. Сопротивления резисторов и индуктивность катушки соответственно равны: $R_1 = 70\text{Ом}$; $R_2 = 500\text{Ом}$; $R_3 = 100\text{Ом}$; $L = 0,01\text{Г}$. Требуется найти закон изменения тока в неразветвленной части цепи после замыкания рубильника.

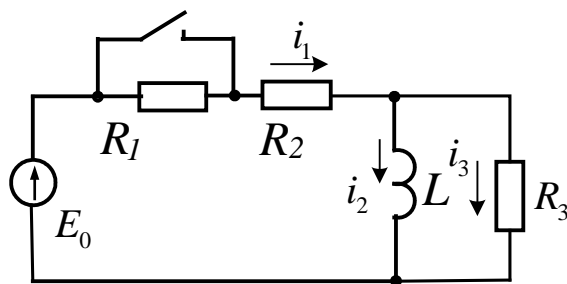


Рисунок 91

Решение

До коммутации в цепи был установившийся режим:

$$i_3(0_-) = 0; i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E_0}{R_1 + R_2} =$$

$$= \frac{240}{12} = 20\text{А.}$$

Характеристическое уравнение найдем, используя выражение для входного сопротивления цепи:

$$Z_{BX} = R_2 + \frac{R_3 Lp}{R_3 + Lp} = \frac{R_2 R_3 + (R_2 + R_3) Lp}{R_3 + Lp} = 0,$$

откуда характеристическое уравнение $R_2 R_3 + (R_2 + R_3) Lp = 0$,

$$50 + 15 \cdot 0,01 p = 0, \text{ а его корень } p = -\frac{50}{15} = -333,3 c^{-1}.$$

Запишем выражение для переходного тока в индуктивности

$$i_2(t) = i_{2np} + Ae^{pt}.$$

Принужденную составляющую этого тока найдем из установившегося после коммута-

ции режима: $i_{np} = \frac{E_0}{R_2} = \frac{240}{5} = 48 A.$

$$\text{Тогда } i_2(t) = 48 + Ae^{-333,3t}.$$

Рассмотрим это выражение непосредственно после коммутации. При

$$t = 0_+ \quad i_2(0_+) = 48 + A. \quad \text{Но согласно первому закону коммутации}$$

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 20 A. \quad \text{Следовательно } 20 = 48 + A, \text{ откуда постоянная интегрирования}$$

$$A = -28. \quad \text{Полный переходный ток через индуктивную катушку равен}$$

$$i_2(t) = 48 - 28e^{-333,3t}.$$

Переходное напряжение на индуктивной катушке

$$u_L(t) = L \frac{di_2}{dt} = 0,01 \cdot 28 \cdot 333,3 e^{-333,3t} = 93,3 e^{-333,3t}.$$

Переходный ток i_3 найдем по закону Ома:

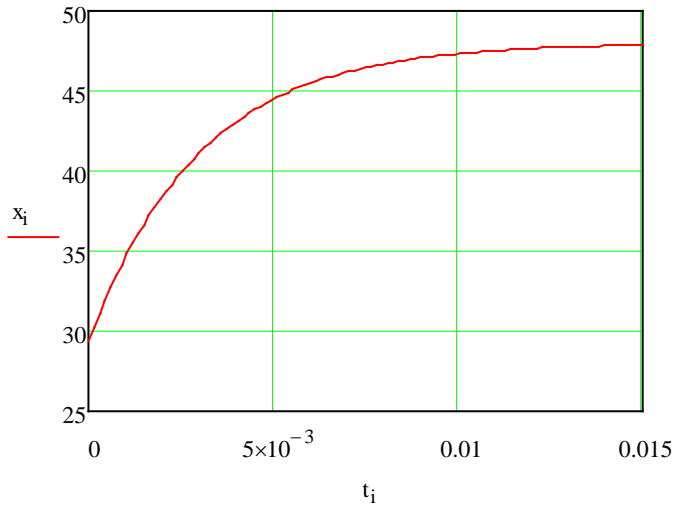
$$i_3(t) = u_L(t) / R_3 = 93,3 e^{-333,3t} / 10 = 9,33 e^{-333,3t} A.$$

На основании первого закона Кирхгофа имеем: $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t).$

После подстановки получаем

$$i_1(t) = 48 - 28e^{-333,3t} + 9,33e^{-333,3t} = 48 - 18,67e^{-333,3t} A.$$

На рисунке 92 показан график изменения этого тока во времени.

Рисунок 92 – График переходного тока $i_1(t)$ **Задачи**

Задача 80. В схеме (рис.93) $R=12\text{Ом}$; $L=0,06\text{Гн}$. Записать характеристическое уравнение и найти его корень. Вычислить принужденную составляющую переходного тока в цепи.

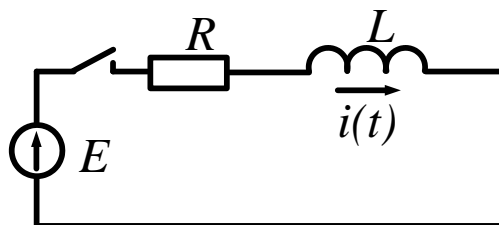


Рисунок 93

Задача 81. В схеме (Рис.94) $R=100\text{Ом}$; $C=123\text{мкФ}$. Записать характеристическое уравнение и найти его корень. Вычислить принужденную составляющую переходного напряжения на конденсаторе.

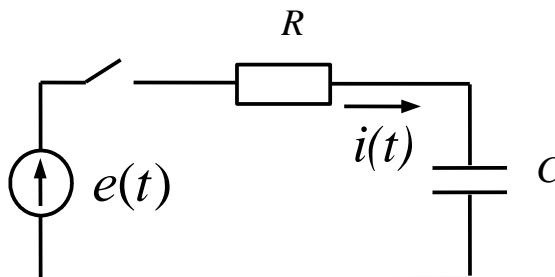


Рисунок 94

Задача 82. Параметры цепи (рис.95) имеют следующие значения: $E=50\text{В}$; $R_1=20\text{Ом}$; $R_2=30\text{Ом}$; $L=0,01\text{Гн}$. Записать характеристическое уравнение цепи и вычислить его корень.

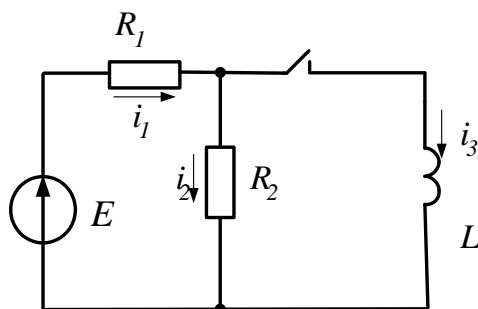


Рисунок 95

Задача 83. В схеме, показанной на рисунке 96, при $t=0$ замыкается рубильник. Напряжение на входе цепи $U_0 = 50\text{В}$. Цепь имеет следующие параметры: $R_1=30\text{Ом}$; $R_2=20\text{Ом}$; $L=50\text{мГн}$. Записать характеристическое уравнение цепи и вычислить его корень. Найти закон изменения тока в катушке.

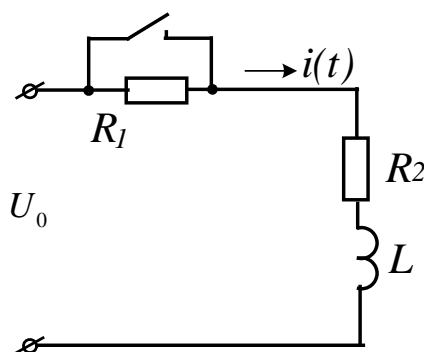


Рисунок 96

Задача 84. В цепи, изображенной на рисунке 97, при $t=0$ замыкается рубильник. В цепи действует постоянная ЭДС $E_0=240\text{В}$. Сопротивления резисторов и индуктивность катушки соответственно равны: $R_1=70\text{Ом}$; $R_2=50\text{Ом}$; $R_3=100\text{Ом}$; $L=0,01\text{Гн}$. Требуется найти закон изменения тока в неразветвленной части цепи после замыкания рубильника. Рассчитать и построить график изменения тока $i_1(t)$.

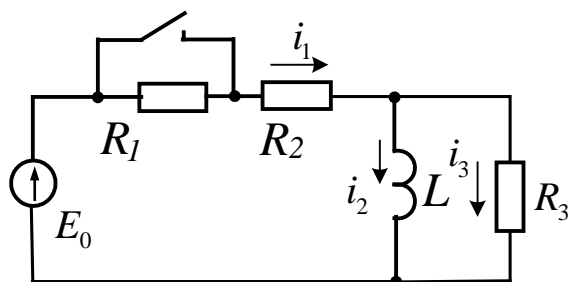


Рисунок 97

Задача 85. Для электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 98, найти законы изменения токов в ветвях и напряжение на конденсаторе после замыкания рубильника. Дано: $E=60\text{В}$; $R_1=20\text{Ом}$; $R_2=40\text{Ом}$; $C=15\text{мкФ}$.

Рассчитать и построить график изменения тока через конденсатор.

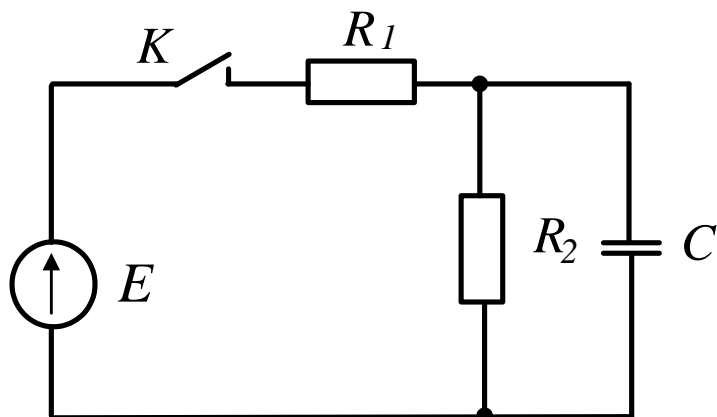


Рисунок 98

Задача 86. Для электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 99, рассчитать переходные токи ветвей и переходное напряжение на катушке индуктивности: $R_1=R_2=40\text{Ом}$; $R_3=20\text{Ом}$; $L=0.15\text{Гн}$.

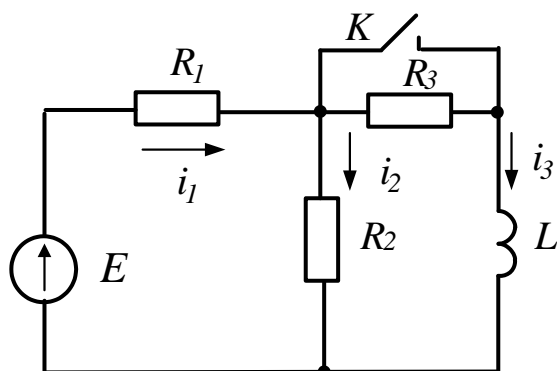


Рисунок 99

Задача 87. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 100 при $t=0$, размыкается ключ. Параметры цепи имеют следующие значения: $E=24\text{В}$; $R_1=6\text{Ом}$; $R_2=12\text{Ом}$; $R_3=6\text{Ом}$; $L=0,05\text{Гн}$. Определить ток i_2 после размыкания ключа

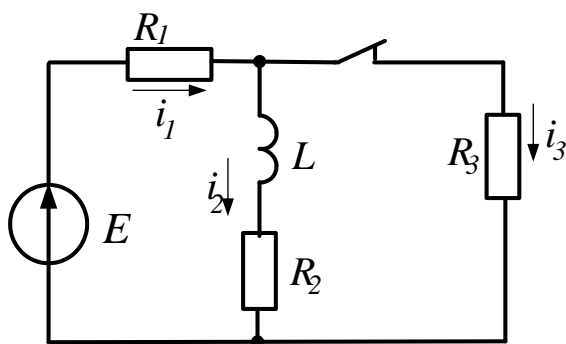


Рисунок 100

Задача 88. В цепи (рис. 101) отключается источник с ЭДС $E=120\text{В}$ и внутренним сопротивлением $R_1=10\text{Ом}$. Рассчитать и построить зависимости напряжения u_C на конденсаторе $C=20\text{мкФ}$ и тока i в резисторе $R=50\text{ Ом}$:

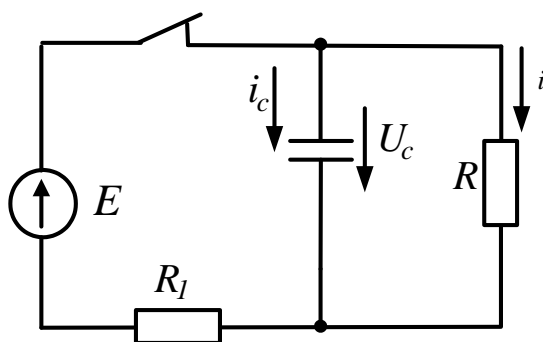


Рисунок 101

Задача 89. Предварительно заряженный до напряжения $U_C(0_-) = 40\text{В}$ конденсатор (рис. 102) емкостью $C=200\text{мкФ}$ подключается к цепи RL с параметрами: $R=20\text{Ом}$; $L=0,2\text{Гн}$. Рассчитать зависимости $U_C(t); i(t)$:

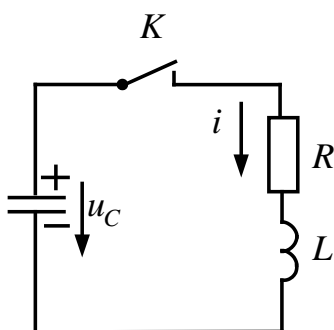


Рисунок 102

Задача 90. Для схемы, изображенной на рисунке 103, рассчитать классическим методом переходные токи ветвей и переходное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа К, параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E=40\text{В}$; $L=1\text{Гн}$; $C=3,33\text{мкФ}$; $R=40\text{Ом}$:

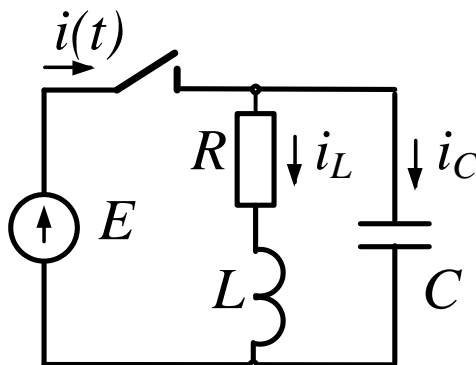


Рисунок 103

Задача 91. Для схемы, изображенной на рисунке 104, рассчитать переходные токи ветвей и переходное напряжение на конденсаторе. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E=100\text{В}$; $L=1\text{мГн}$; $C=10\text{мкФ}$; $R_1=2\text{Ом}$; $R_2=2\text{Ом}$.

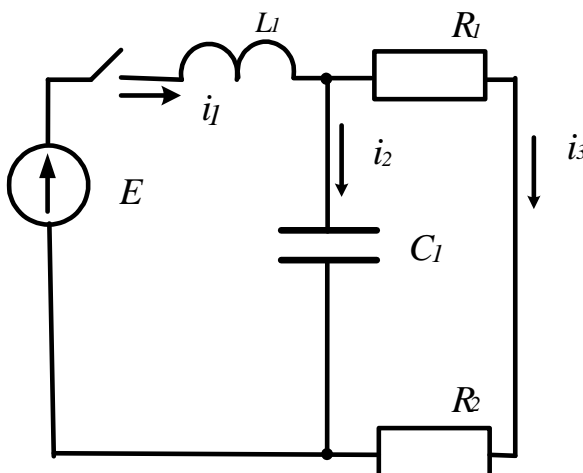


Рисунок 104

7.2 Операторный метод расчета переходных процессов

В основу операторного метода положено прямое интегральное преобразование Лапласа, с помощью которого функции времени $f(t)$ преобразуются в функции комплексного переменного p . Условимся под p понимать комплексное число $p = a + jb$.

Предположим, что нужно найти некоторую функцию (ток или напряжение) действительной переменной $f(t)$ решением дифференциального уравнения. Операторный метод решения этой задачи сводится к четырем последовательным этапам:

1. От искомой функции $f(t)$, именуемой в дальнейшем *оригиналом*, с помощью прямого преобразования Лапласа переходят к функции комплексного переменного p . Новую функцию обозначают $F(p)$ и называют *изображением функции $f(t)$* .

2. Дифференциальное уравнение для оригиналов, согласно правилам преобразования функций, их производных и интегралов преобразуются в операторные алгебраические уравнения для изображений.

3. Полученные операторные уравнения решают относительно $F(p)$.

4. От найденного изображения $F(p)$ с помощью обратного преобразования Лапласа переходят к оригиналу $f(t)$, который и является искомой функцией.

Таким образом, сложные математические операции решения дифференциальных уравнений заменяются решением простых алгебраических уравнений, записанных в операторной форме.

Особо отметим, что между изображением и оригиналом нет равенства, а есть только соответствие. Это важное положение подчеркивается условной записью, связывающей изображение с оригиналом: $f(t) \doteq F(p)$ или $F(p) \doteq f(t)$. Такая запись означает, что заданная функция $f(t)$ имеет своим изображением функцию $F(p)$ или изображение $F(p)$ имеет своим оригиналом функцию $f(t)$.

Закон Ома в операторной форме при нулевых начальных условиях

а) Закон Ома

Пусть цепь из последовательно соединенных резистора, индуктивной катушки и конденсатора, при нулевых начальных условиях, при $t=0$ включается на напряжение u . Для такой цепи справедливо уравнение

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u.$$

Применим к левой и правой частям этого уравнения преобразование Лапласа, т.е.

умножим каждое слагаемое левой и правой частей уравнения на e^{-pt} и проинтегрируем его в пределах от нуля до бесконечности. В результате получим соответствующее уравнение, но уже в операторной форме:

$$RI(p) + LpI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = U(p),$$

или

$$(R + Lp + \frac{1}{Cp})I(p) = U(p).$$

Это равенство можно записать в форме закона Ома

$$I(p) = \frac{U(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}. \quad (66)$$

Закон Ома в операторной форме при нулевых начальных условиях имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

Составляющие $RI(p)$, $LpI(p)$, $\frac{1}{Cp}I(p)$ представляют в операторной форме соответ-

ствующие падения напряжения на отдельных элементах последовательной цепи, а величина $Z(p)$ – полное операторное сопротивление цепи.

Наряду с операторным сопротивлением цепи $Z(p)$ применяется операторная проводимость $Y(p)$.

$Z(p)$ и $Y(p)$ связаны соотношением

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}.$$

Проводимость последовательной цепи, содержащей R , L и C , соответственно равна

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}.$$

Для цепи из параллельно соединенных R , L и C полная проводимость в операторной форме

$$Y(p) = \frac{1}{R} + \frac{1}{pL} + pC.$$

Применение операторного метода при ненулевых начальных условиях

При ненулевых начальных условиях, в момент коммутации начальные значения токов в ветвях, содержащих индуктивности и напряжения на конденсаторах, не равны нулю. Цепи до возникновения переходного процесса обладают определенным запасом энергии, сосредоточенной в электрических и магнитных полях.

Естественно, ненулевые значения токов в индуктивных катушках $i_L(0_-) \neq 0$ и напряжений на конденсаторах $U_C(0_-) \neq 0$ должны быть учтены при составлении операторных уравнений.

Пусть цепь из последовательно соединенных R , L и C , в которой действует ЭДС e , находится в установившемся режиме. В цепи протекает ток i , а конденсатор заряжен до напряжения u_c . По заданным параметрам цепи и известной ЭДС e , ток и напряжение на конденсаторе легко вычисляются известными методами. Будем считать, что они определены.

Предположим далее, что в некоторый момент времени ($t=0$) величина ЭДС источника изменилась, в результате чего в цепи возник переходный процесс при ненулевых начальных условиях.

Запишем уравнение цепи:

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt = e$$

или

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = e.$$

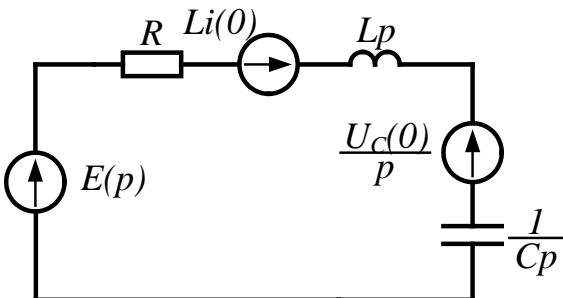
Это уравнение легко перевести в операторную форму, воспользовавшись полученными ранее соотношениями. В результате такого перевода получим:

$$RI(p) + L[pI(p) - i(0)] + \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{U_c(0)}{p} = E(p)$$

или

$$\left[R + Lp + \frac{1}{Cp} \right] I(p) = E(p) + Li(0) - \frac{U_c}{p}.$$

Определив изображение тока, получим закон Ома в операторной форме для цепи с ненулевыми начальными условиями:



$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - u_c(0)/p}{Z(p)} \quad (67)$$

Рисунок 105

Очевидно, что числитель этой дроби следует рассматривать как некоторую эквивалентную операторную ЭДС цепи. Он состоит не только из внешней ЭДС $E(p)$, но и еще двух дополнительных слагаемых $Li(0)$ и $-u_c(0)/p$, учитывающих ненулевые начальные условия цепи. Формуле (44) соответствует электрическая схема, представленная на рисунке 105.

Рассмотрим пример расчета цепи операторным методом. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 106, действует постоянная ЭДС и при нулевых начальных условиях замыкается ключ. Требуется рассчитать переходные токи цепи операторным методом.

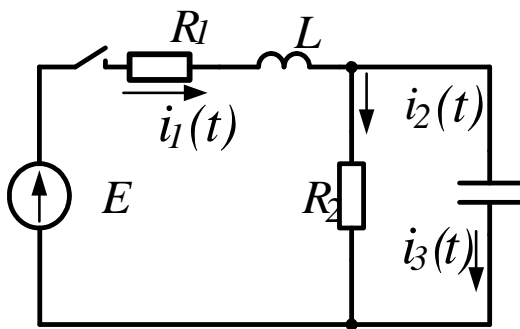


Рисунок 106

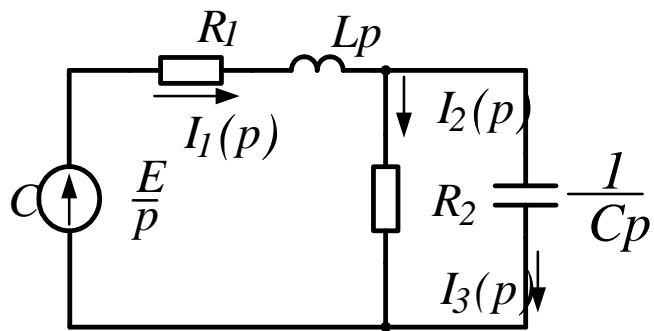


Рисунок 107

Так как в цепи нулевые начальные условия, то операторная схема после коммутации принимает вид (рис. 107).

Ток в неразветвленной части цепи найдем по закону Ома:

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_{\text{ex}}(p)},$$

где $E(p)$ – операторное изображение ЭДС цепи; $Z(p)$ – операторное сопротивление цепи.

$$Z_{\text{ex}}(p) = R_1 + Lp + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = R_1 + Lp + \frac{R_2}{R_2 Cp + 1} = \frac{R_2 LCp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2}{R_2 Cp + 1}.$$

Так как $E(t) = \frac{E}{p}$, то

$$I_1(p) = \frac{E(R_2 Cp + 1)}{[R_2 L Cp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2]p}$$

Токи в разветвленной части схемы

$$\begin{aligned} I_2(p) &= I_1(p) \cdot \frac{\frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \\ &= \frac{E}{p[R_2 L Cp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2]}; \\ I_3(p) &= I_1(p) \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \\ &= \frac{ER_2 C}{[R_2 L Cp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2]}. \end{aligned} \quad (68)$$

Таким образом, используя операторную схему, мы нашли операторные изображения искомых переходных токов. Теперь возникает обратная задача – найти по известному изображению соответствующий ему оригинал. Для решения обратной задачи можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа, таблицами соответствия, либо использовать теорему разложения.

Теорема разложения

В большинстве случаев изображение представляет собой рациональную дробь вида:

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}, \quad (69)$$

где a_n и b_m – вещественные числа, причем $n < m$, то есть дробь правильная.

После соответствующих преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{M(p)} &= \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{(p - p_1)} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot \frac{1}{(p - p_2)} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{(p - p_k)} = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \end{aligned} \quad (70)$$

Число слагаемых в формуле разложения равно числу корней уравнения $M(p) = 0$.

Рассмотрим пример. Пусть в электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 108, действует постоянная ЭДС, и при $t = 0$ замыкается ключ. Требуется рассчитать переходный ток в неразветвленной части цепи операторным методом. $R_1 = 2,5 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 5 \text{ Ом}$; $L = 10 \text{ мГн}$; $E = 10 \text{ В}$.

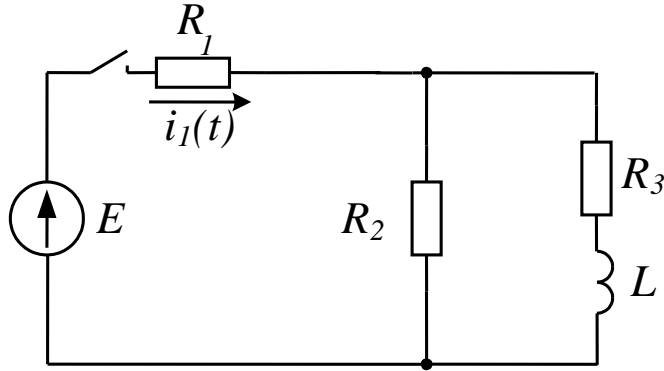


Рисунок 108

Ток в неразветвленной части схемы найдем по закону Ома:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{E(p)}{Z_{\text{эк}}(p)} = \frac{E(p)}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + Lp)}{R_2 + R_3 + Lp}} = \\ &= \frac{E(R_2 + R_3 + Lp)}{p(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_1Lp + R_2Lp)} = \\ &= \frac{10(10 + 10^{-2}p)}{p(50 + 75 \cdot 10^{-3}p)} = \frac{N(p)}{M(p)}. \end{aligned}$$

Для отыскания оригинала применим теорему разложения. Решая уравнение $M(p) = 0$, находим его корни:

$$p(50 + 75 \cdot 10^{-3}p) = 0, \text{ откуда}$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -50/75 \cdot 10^{-3} = -667 \text{ с}^{-1}$$

Находим производную $M'(p)$

$$M'(p) = 150 \cdot 10^{-3}p + 50.$$

Подставим значения корней в формулу разложения: при $p = p_1 = 0$ имеем:

$$N(p_1) = 100;$$

$$M'(p_1) = 50.$$

При $p = p_2 = -667 \text{ с}^{-1}$

$$N(p_2) = 33,3;$$

$$M'(p_2) = -50.$$

После подстановки получим:

$$i(t) = 2 - 0,67e^{-667t}$$

Рассмотрим еще один пример:

В электрической цепи (рис.109) при ненулевых начальных условиях размыкается рубильник. Найти закон изменения тока $i(t)$ после коммутации операторным методом.

Дано: $E = 100B$; $L = 1mГн$; $C = 10мкФ$; $R_1 = 20Ом$; $R_2 = 15Ом$; $R_3 = 5Ом$; $R_4 = 2Ом$

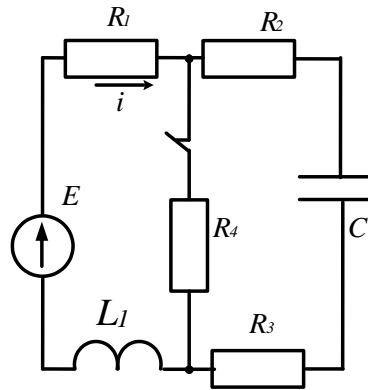


Рисунок 109

С учетом ненулевых начальных условий операторная схема имеет вид (рис.110).

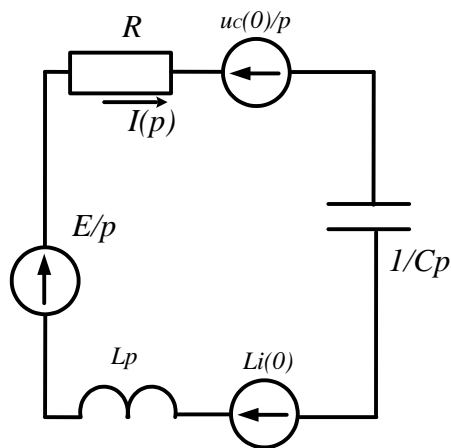


Рисунок 110

Найдем изображение искомого тока из операторной схемы по закону Ома:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} + Li(0) - \frac{U_c(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{(\frac{100}{p} + 4.5 \cdot 10^{-3} - \frac{9}{p})pC}{(p^2LC + pRC + 1)p} =$$

$$= \frac{(91 + 4.5 \cdot 10^{-3} p) \cdot 10^{-5}}{10^{-8} p^2 + 40 \cdot 10^{-5} p + 1}$$

Задачи

Задача 92. Решить задачу 82 операторным методом.

Задача 93. Решить задачу 84 операторным методом.

Задача 94. Для схемы, изображенной на рисунке 111, рассчитать операторным методом переходные токи ветвей и переходное напряжение на конденсаторе после размыкания ключа, параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E=100\text{В}$; $L=1\text{мГн}$; $C=10\text{мкФ}$; $R_1=20\text{Ом}$; $R_2=20\text{Ом}$.

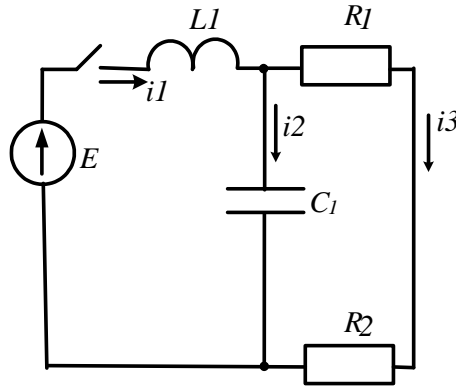


Рисунок 111

Задача 95. Для схемы, изображенной на рисунке 112, рассчитать операторным методом переходные токи ветвей и переходное напряжение на конденсаторе после размыкания ключа, параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E=300\text{В}$; $R_1=15\text{Ом}$; $R_2=20\text{Ом}$; $R_3=5\text{Ом}$; $R_4=20\text{Ом}$; $L=5\text{мГн}$; $C=4\text{мкФ}$.

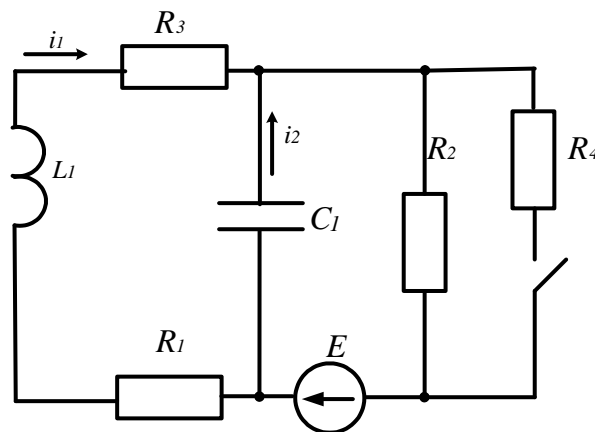


Рисунок 112

Задача 96. Для цепи, показанной на рисунке 113, рассчитать операторным методом переходные токи и напряжение на катушке. Цепь имеет параметры: $E=200\text{В}$; $L=1\text{мГн}$; $C=50\text{мкФ}$; $R_1=5\text{Ом}$; $R_2=10\text{Ом}$; $R_3=20\text{Ом}$; $R_4=5\text{Ом}$

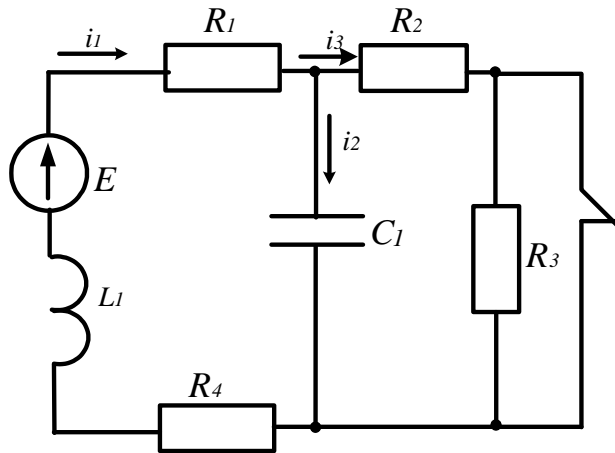


Рисунок 113

8. Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока

В нелинейных цепях постоянного тока используются нелинейные резисторы (НР). Зависимость напряжения на зажимах нелинейного элемента от тока в нем $u=f(i)$ называется вольтамперной характеристикой (ВАХ).

Так как в большинстве случаев вольтамперные характеристики нелинейных элементов задаются в виде графиков, то основным методом расчета нелинейных цепей является графический метод.

8.1 Последовательное соединение двух нелинейных резисторов

Цепь, содержащая два последовательно соединенных нелинейных резистора, показана на рисунке 99. Для расчета такой цепи заданные вольтамперные характеристики элементов $I(U_1)$ и $I(U_2)$ строятся в общей системе координат (рис. 100).

Рисунок 99

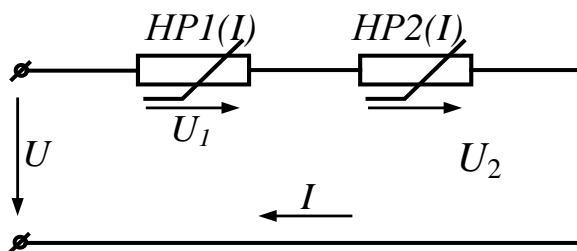
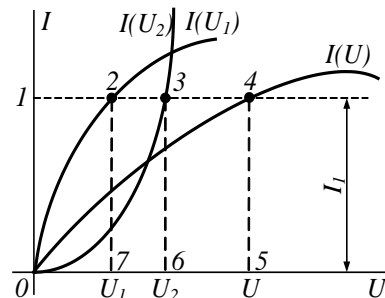


Рисунок 100



Далее строится вольтамперная характеристика $I(U)$ всей цепи, выражающая зависимость тока в цепи от общего напряжения.

Ток I обоих участков цепи один и тот же, а общее напряжение $U = U_1 + U_2$.

Для построения общей вольтамперной характеристики достаточно сложить абсциссы исходных кривых $I(U_1)$ и $I(U_2)$.

Проведем прямую, параллельную оси абсцисс и соответствующую току I_1 . Отрезки $1-2$ и $1-3$ в выбранном масштабе выражают напряжения на участках U_1, U_2 . Сложив эти отрезки, на той же прямой получим точку 4 общей вольтамперной характеристики.

Для других значений тока найден еще ряд точек, через которые проведена общая вольтамперная характеристика $I(U)$. Построение вольтамперных характеристик является подготовительным этапом для решения различных задач, относящихся к подобным цепям.

Требуется, например, определить ток в цепи и напряжения U_1 и U_2 на участках, если общее напряжение на входе цепи U известно. На оси абсцисс находим точку 5 , определяющую значение напряжения U (отрезок $0-5$ в масштабе напряжений выражает напряжение цепи). Через нее проводим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с общей вольтамперной характеристикой $I(U)$ в точке 4 . Из точки 4 проводим линию, параллельную оси абсцисс. Отрезок $5-4$ выражает ток в цепи, а отрезки $1-2$ и $1-3$ – напряжения на участках (соответственно U_1 и U_2). Аналогично можно найти ток I , напряжения U_1 и U , если задано напряжение U_2 .

В случае, если по заданному току требуется определить напряжения на участках и общее напряжение, на оси ординат откладываем отрезок $0-I$, выражающий ток в цепи (в масштабе тока), и находим точку 1 . Проводим линию, параллельную оси абсцисс, через точку 1 до пересечения со всеми характеристиками. Отрезки $1-2, 1-3, 1-4$ в масштабе напряжений выражают напряжения в цепи, соответственно U_1, U_2, U . При последовательном соединении нелинейного резистора с линейным, а также при соединении более двух элементов (линейных и нелинейных) задачи решаются аналогично.

8.2 Параллельное соединение двух нелинейных резисторов

Рисунок 101

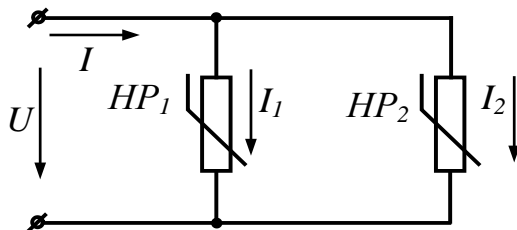
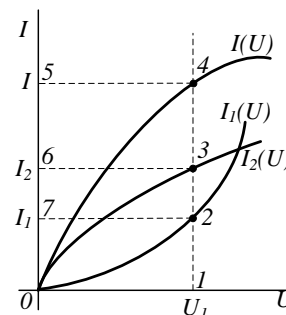


Рисунок 102



При параллельном соединении двух нелинейных резисторов (рис.101) к ним прило-

жено одно и то же напряжение U , а ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов в ветвях: $I = I_1 + I_2$.

Для построения общей вольтамперной характеристики $I(U)$ нужно для ряда значений U сложить ординаты вольтамперных характеристик элементов, как показано на рисунке 102. При напряжении U_1 (отрезок $0-1$) сумма отрезков $1-2$ (ток I_1) и $1-3$ (ток I_2) равна отрезку $1-4$ (ток I).

Предположим, что по заданному значению U_1 нужно определить токи в ветвях и общий ток I . На оси абсцисс откладываем отрезок $0-1$, выражающий напряжение U_1 , и через точку 1 проводим линию, параллельную оси ординат. Определяем точки $2, 3, 4$ пересечения прямой с вольтамперными характеристиками. Отрезки $1-2, 1-3, 1-4$ в масштабе токов выражают токи в цепи, соответственно I_1, I_2, I .

Условие задачи может быть и таким: по заданному току I_2 определить напряжение U и токи I_1 и I . Найдем по оси ординат точку 6 , расстояние до которой от начала координат выражает ток I_2 (в масштабе токов). Через точку 6 проведем прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с кривой $I_2(U)$ в точке 3 . Опустив перпендикуляр из точки 3 на ось абсцисс, найдем точку 1 . Отрезок $0-1$ в масштабе напряжения выражает напряжение цепи U .

Аналогично решаются задачи при параллельном соединении нелинейного резистора с линейным, а также при большем числе линейных и нелинейных сопротивлений.

8.3 Смешанное соединение нелинейных резисторов

При смешанном соединении (рис. 103) графический расчет цепи производится методом «свертывания» схемы: в соответствии со схемой соединения элементов складываются их вольтамперные характеристики:

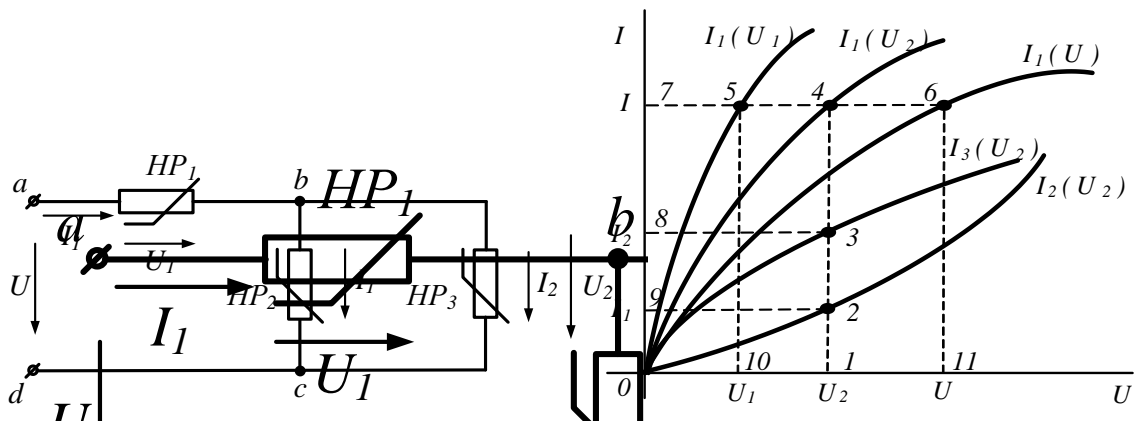


Рисунок 103

Рисунок 104

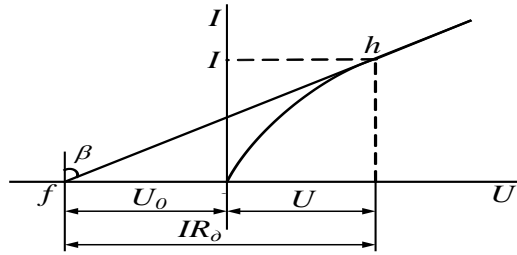


Рисунок 105

По заданным характеристикам $I_2(U_2)$, $I_3(U_3)$ параллельно соединенных элементов строится вольтамперная характеристика участка между точками bc .

Для примера на рисунке 104 при напряжении U_2 (отрезок $0-1$) определены токи I_2 (отрезок $1-2$) и I_3 (отрезок $1-3$), а затем ток $I_1 = I_2 + I_3$ (отрезок $1-4$).

Далее строим вольтамперную характеристику $I_1(U)$ всей цепи, учитывая, что участок цепи между точками bc включен последовательно с нелинейным резистором на участке ab . Для примера при токе I_1 (отрезок $0-7$) определены напряжения U_1 (отрезок $7-5$) и U_2 (отрезок $7-4$), а также общее напряжение $U = U_1 + U_2$ (отрезок $7-6$).

После построения вольтамперных характеристик порядок решения задачи зависит от ее условия.

Пусть задано напряжение U в цепи. Требуется определить токи в схеме и напряжения на участках.

Отложив на оси абсцисс отрезок $0-11$, выражающий напряжение U , проведем линию $11-6$ параллельно оси ординат до пересечения с кривой $I_1(U)$. Отрезком $11-6$ определяется ток I_1 в неразветвленной части цепи. Прямая, параллельная оси абсцисс, проведенная через точку 6 , пересекает кривые $I_1(U_1)$ и $I_1(U_2)$ в точках 5 и 4 . Отрезками $7-4$ и $7-5$ определяются напряжения U_2 на участках. Напряжение U_2 – общее для параллельно соединенных участков с токами I_2 и I_3 . Для определения этих токов через точку 4 проводится прямая, параллельная оси ординат, пересечение этой прямой с кривыми $I_2(U_2)$ и $I_3(U_3)$ в точках 2 и 3 дает отрезки $1-2$ и $1-3$, определяющие токи I_2 и I_3 .

8.4 Аналитический метод расчета нелинейной цепи постоянного тока

Допустим, что область работы нелинейного элемента не выходит за пределы участка вольтамперной характеристики, который с известным приближением можно считать линейным (рис. 105):

Если продолжить линейный участок до пересечения с осью напряжения, то он пересечет ее в точке f .

Отрезок of в принятом масштабе выражает постоянное напряжение U_0 . Нетрудно заметить, что в любой точке h линейного участка вольтамперной характеристики напряжение складывается из постоянного напряжения $-U_0$ и изменяющейся части, определяемой произведением тока и динамического сопротивления IR_∂ , т.е. прямая fh выражается уравнением

$$U = -U_0 + IR_\partial. \tag{71}$$

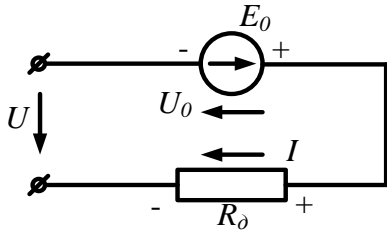


Рисунок 106

На основании уравнения (71) нелинейный элемент можно представить схемой последовательного соединения ЭДС $E_0 = U_0$ и динамического сопротивления R_∂ (рис.106). При этом $U = -E_0 + IR_\partial$.

Рассуждения, приведенные для кривой, изображенной на рисунке 105, можно повторить и для случая вогнутой кривой. В результате получим уравнение

$$U = E_0 + IR_\partial. \tag{72}$$

Уравнение (72) дает основание нелинейный элемент с вогнутой вольтамперной характеристикой заменить схемой, представленной на рисунке 107, в которой направления тока и ЭДС противоположны.

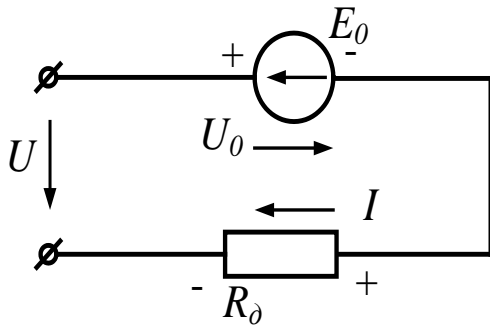


Рисунок 107

После замены нелинейных элементов эквивалентными схемами замещения с линейными элементами нелинейная цепь может быть рассчитана одним из методов, применяемых для расчета линейных электрических цепей постоянного тока.

Задачи

Задача 97. Задана вольтамперная характеристика нелинейного элемента, который соединен последовательно с линейным резистором $R=160\text{Ом}$. Определить величину тока, напряжение на нелинейном элементе и линейном резисторе при напряжении источника $U=20\text{В}$.

$U, \text{В}$	0	8	10	12	14	16	18	20
I, mA	0	1,0	3,0	9,0	20,0	48,0	120,0	330,0

Задача 98. Тот же нелинейный резистор соединен параллельно с линейным резистором, сопротивление которого $R=300\text{Ом}$. Определить токи в нелинейном и линейном резисторах, а также напряжение питания цепи, если ток в неразветвленной части цепи равен 180мА .

Задача 99. Вольтамперные характеристики нелинейных резисторов заданы таблицей. Схема представлена на рисунке 108. Напряжение на входе цепи $U=16\text{В}$. Сопротивление линейного резистора $R=2\text{Ом}$. Рассчитать графическим методом токи ветвей:

$U, \text{В}$	4	6	8	10	12	14	16
$I_1, \text{А}$	1	2	3	4	6	9	13
$I_2, \text{А}$	2,8	5	7	10,3	18	-	-

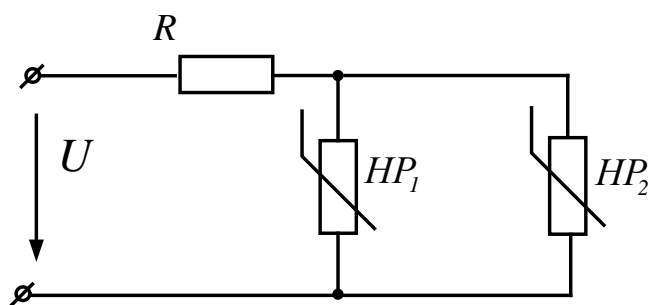


Рисунок 108

Задача 100. Вольтамперные характеристики нелинейных резисторов заданы таблицей.

Схема включения представлена на рисунке 109.

$U, \text{В}$	0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
$I_1, \text{А}$	0	0,2	0,4	0,68	0,86	0,96	1,0	1,0	1,0
$I_2, \text{А}$	0	1,12	1,4	1,8	2,14	2,44	2,720	-	-

Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $E_1=6,5\text{В}$; $E_3=5,4\text{В}$; $R_3=2,5\text{Ом}$. Рассчитать токи ветвей и напряжение U_{ab} методом линеаризации:

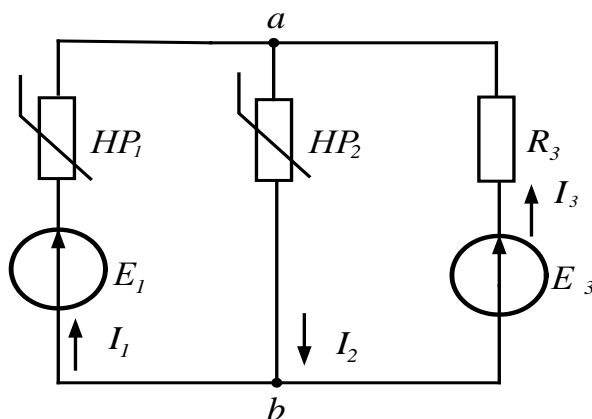


Рисунок 109

9. Расчет магнитных цепей с постоянной намагничивающей силой

При расчете магнитных цепей возможны два типа задач:

Прямая задача – определение магнитных потоков участков магнитной цепи по заданным намагничивающим силам.

Обратная задача – определение необходимых намагничивающих сил по заданному магнитному потоку одного из участков магнитной цепи.

9.1 Расчет неразветвленных магнитных цепей

Простейшей неразветвленной магнитной цепью является замкнутый (или с зазором) магнитопровод с одинаковым (или разным) поперечным сечением участков и одинаковой магнитной проницаемостью по длине (рис.110).

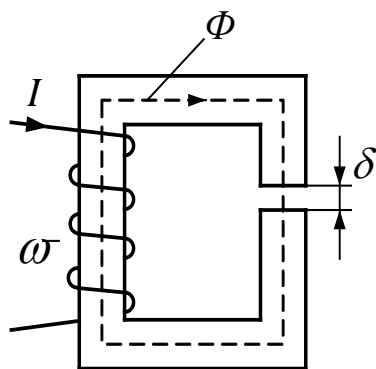


Рисунок 110

а) обратная задача

Заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания ферромагнитного материала и магнитный поток или индукция в каком-либо сечении. Требуется найти МДС, ток или число витков намагничивающей обмотки.

Расчет проводим в такой последовательности:

1. Разбиваем магнитную цепь на участки постоянного сечения и определяем длины l_k (м) и площади поперечного сечения S_k (м²) участков (длины участков берем по средней силовой линии).

2. Исходя из постоянства потока вдоль всей цепи, по заданному потоку и сечениям S_k находим магнитные индукции на каждом участке: $B_k = \Phi/S_k$

3. По кривой намагничивания определяем напряженности поля H_k для ферромагнитных участков магнитной цепи; напряженность поля в воздушном зазоре $H = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B$, где H – в А/м; B – в Тл.

4. Подсчитываем сумму падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k$ и на основании закона полного тока приравниваем эту сумму полному току $I\varpi$: $\sum H_k l_k = I\varpi$. По известному числу витков обмотки находим ток, либо по заданному току вычисляем число витков.

б) прямая задача

Заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания материала сердечника и полный ток (намагничивающая сила обмотки). Требуется рассчитать магнитный поток или индукцию на каком-либо участке цепи.

Задача решается методом последовательного приближения:

1. Задаемся значениями магнитной индукции B (в пределах кривой намагничивания) и для каждого из них находим напряженность поля в сердечнике (по кривой намагничивания) и в воздушном зазоре (по формуле).

2. Для каждого значения B_k рассчитываем $\sum H_k l_k$.

3. По полученным данным строим зависимость $\Phi = B \cdot S = f(\sum H_k l_k)$, из которой по заданной намагничивающей силе находим искомый магнитный поток Φ_k .

Задачи

Задача 101. Два П – образных сердечника разделены воздушным зазором длиной (рис.111) $\delta = 0,4\text{мм}$. Средняя длина магнитных линий в ферромагнетике $l = 8\text{см}$, сечение сердечника $S = 0,25\text{мм}^2$, относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 200$.

Рассчитать магнитное сопротивление рассматриваемой цепи. Как изменится магнитное сопротивление цепи при изменении воздушного зазора на $\pm 50\%$?

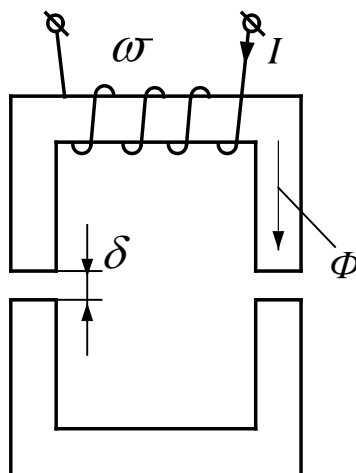


Рисунок 111

Задача 102. Периметр магнитопровода, показанного на рисунке 112, $\Pi = 0,7\text{м}$. Величина воздушного зазора $\delta = 3\text{мм}$, число витков обмотки $w = 300$.

При каком токе в обмотке индукция в зазоре $B = 0,6\text{Тл}$? (Для заданного $B - H = 3,9\text{А/м}$).

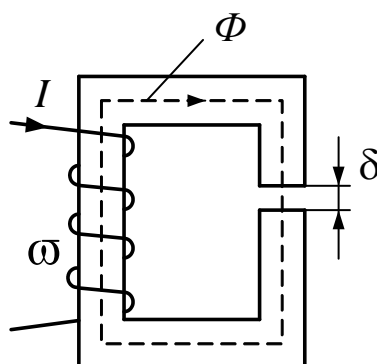


Рисунок 112

Задача 103. Задан магнитопровод с периметром 100см. Суммарный воздушный зазор $2\delta_g = 1\text{мм}$, сечение магнитопровода одинаково по всей длине магнитной цепи и равно 16см^2 . Кривая намагничивания материала задана таблицей.

Рассчитать намагничивающую силу обмотки, необходимую для создания в зазоре магнитной индукции $B=1,05\text{Тл}$.

$B, \text{Тл}$	0,4	0,8	1,2	1,4	1,5
$H, \text{А/м}$	50	100	550	1600	2400

Задача 104. Задана неразветвленная магнитная цепь с периметром 160см и воздушным зазором $\delta = 0,8\text{мм}$. Число витков намагничивающей обмотки $\omega = 50$ при токе в обмотке $I=60\text{А}$. Кривую намагничивания материала сердечника взять из задачи 96. Рассчитать магнитный поток.

Задача 105. П – образный магнитопровод прямоугольного поперечного сечения замкнут якорем, имеющим такое же сечение $S=0,25\text{см}^2$, но вдвое меньшую проницаемость (рис. 112). Средняя длина магнитных линий в магнитопроводе $l_1=4\text{см}$, в якоре $l_2=0,9\text{см}$, в каждом, разделяющим их воздушном зазоре $\delta=0,02\text{мм}$. Относительная магнитная проницаемость материала магнитопровода $\mu_{1r} = 500$.

Определить намагничивающую силу обмотки, при которой индукция в магнитной цепи $B=0,02\text{Тл}$. Вычислить магнитное сопротивление цепи:

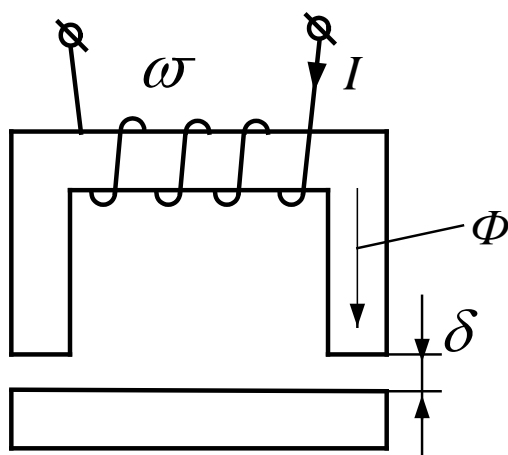


Рисунок 113

Задача 106. Магнитопровод, изображенный на рисунке 112, имеет периметр $\Pi=100\text{см}$. и суммарный воздушный зазор $\delta=1\text{мм}$. Кривая намагничивания задана таблицей

$B, \text{Тл}$	0,4	0,8	1,2	1,5
$H, \text{А/м}$	50	100	550	2400

Рассчитать намагничивающую силу обмотки (Iw), необходимую для создания в зазоре магнитной индукции $B=1,05\text{Тл}$.

Задача 107. Магнитопровод, изображенный на рисунке 114 имеет поперечное сечение $S=12\text{см}^2$, периметр $\Pi=1,2\text{м}$ и воздушный зазор $\delta=1\text{мм}$, число витков $w=80$. Ток в обмотке $I=40\text{А}$. Кривая намагничивания задана таблицей

$B, \text{Тл}$	0,4	0,8	1,2	1,5
$H, \text{А/м}$	50	100	550	2400

Рассчитать магнитный поток.

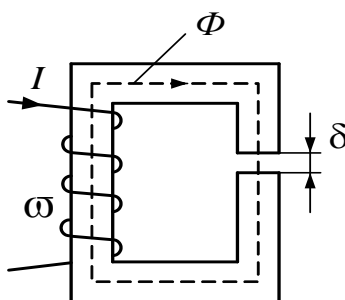


Рисунок 114

9.2 Расчет разветвленных магнитных цепей

9.2.1 Расчет разветвленной магнитной цепи с одной намагничивающей силой

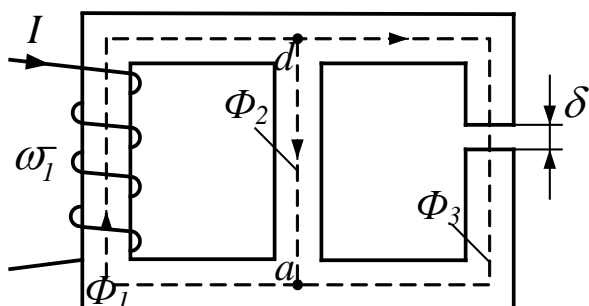


Рисунок 115

Расчет разветвленной магнитной цепи с одной намагничивающей силой аналогичен расчету цепи постоянного тока с нелинейными резисторами.

Пусть имеется разветвленная магнитная цепь (рис.115), для которой заданы геометрические размеры, кривая намагничивания и намагничивающая сила обмотки – $I_1 \omega_1$. Требуется рассчитать магнитные потоки отдельных участков Φ_1, Φ_2, Φ_3 .

Задача решается в следующей последовательности: Рассчитываются и строятся вебер-амперные характеристики $\Phi = f(\sum Hl)$ для первой, второй и третьей ветвей (рис.116);

1. Поскольку участки с потоками Φ_2 и Φ_3 включены параллельно, то суммированием ординат характеристик Φ_2 и Φ_3 строится вебер-амперная характеристика параллельного разветвления $\Phi_{2-3} = f(\sum Hl)$;

2. Участки цепи 1 и 2-3 включены последовательно, поэтому, суммируя абсциссы характеристик Φ_1 Φ_{2-3} , строим результирующую характеристику всей цепи.

3. По заданному значению намагничивающей силы $F = I_1 \omega_1$ находится поток в неразветвленной части магнитной цепи и затем потоки Φ_2 и Φ_3 .

Задача 108. Для магнитопровода, изображенного на рисунке 117, $l_1=40\text{см}$; $l_2=15\text{см}$; $l_3=40\text{см}$. Намагничивающая сила обмотки $F=Iw=200\text{А}$. Кривая намагничивания задана графически. Рассчитать магнитные потоки отдельных участков

Задачи

Задача 108. Для магнитопровода, изображенного на рисунке 117, $l_1=40\text{см}$; $l_2=15\text{см}$; $l_3=40\text{см}$. Намагничивающая сила обмотки $F=Iw=200\text{А}$. Кривая намагничивания задана графически. Рассчитать магнитные потоки отдельных участков

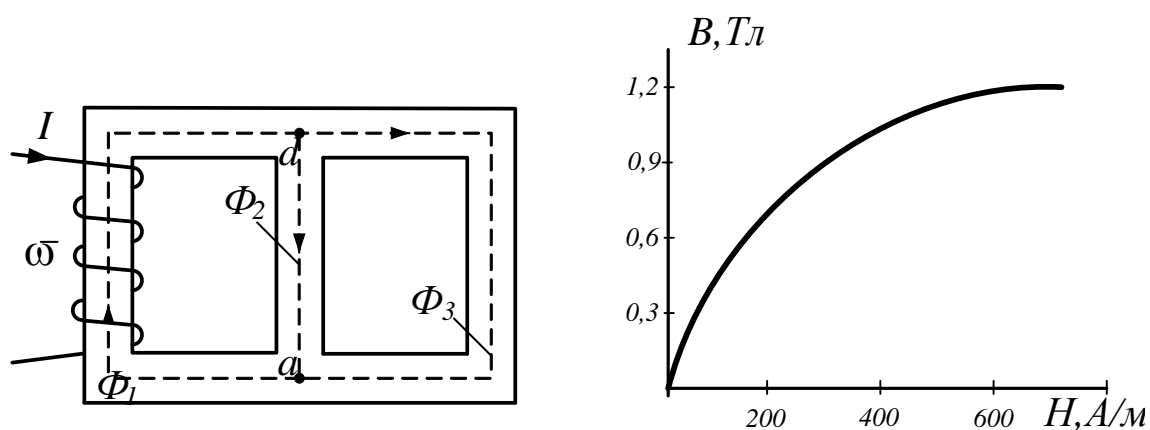


Рисунок 117

Задача 109. Магнитная цепь, изображенная на рисунке 118, имеет следующие параметры: $s_1=5\text{см}^2$; $l_1=46\text{см}$; $l_{1\delta}=0.1\text{см}$; $s_2=9.6\text{см}^2$; $l_2=18\text{см}$; $l_{2\delta}=0.1\text{см}$; $s_3=7\text{см}$; $l_3=142\text{см}$; $F=Iw=1870\text{А}$. Кривая намагничивания задана таблицей

В,Тл	0,4	0,8	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8
Н,А/м	2	4,1	6,0	7,55	13	40	100

Рассчитать магнитные потоки участков.

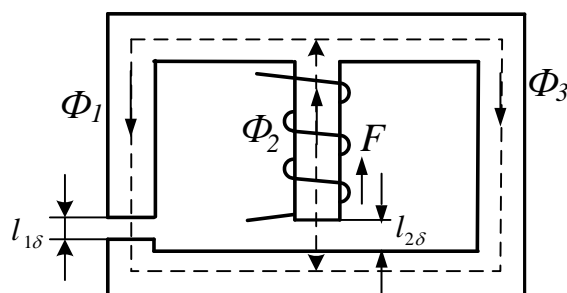


Рисунок 118

9.2.2 Расчет разветвленной магнитной цепи методом двух узлов

Если намагничивающие обмотки расположены не на одном, а на нескольких стержнях магнитопровода, то есть в цепи имеется несколько намагничивающих сил, то расчет такой цепи целесообразно проводить методом двух узлов.

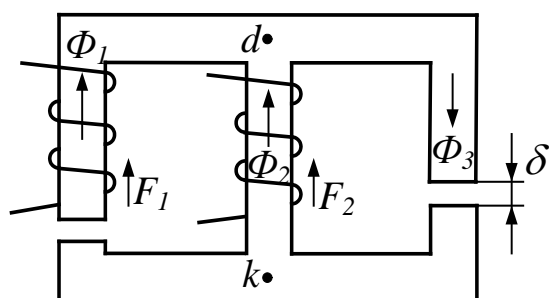


Рисунок 120

Пусть требуется рассчитать магнитные потоки для цепи (рис.120) по заданным геометрическим размерам, кривой намагничивания материала сердечника и заданным намагничивающим силам.

ла сердечника и заданным намагничивающим силам.

Введем в расчет разность магнитных потенциалов между двумя узлами магнитной цепи

$$d \text{ и } k \quad U_{M_{dk}} = \varphi_{M_d} - \varphi_{M_k}.$$

Выразим магнитный потенциал точки d через магнитный потенциал точки k , следуя из точки k в точку d сначала по первой, затем по второй и, наконец, по третьей ветви:

$$\varphi_{M_d} = \varphi_{M_k} - (H_1 l_1 + H_{\delta 1} l_{\delta 1}) + I_1 \varpi_1$$

В этом уравнении $(H_1 l_1 + H_{\delta 1} l_{\delta 1}) = U_{M1}$ – падение магнитного напряжения на первой ветви. Записав по аналогии уравнения для двух других ветвей, получаем:

$$\left. \begin{aligned} U_{M_{dk}} &= I_1 \varpi_1 - (H_1 l_1 + H_{\delta 1} l_{\delta 1}) \\ U_{M_{dk}} &= I_2 \varpi_2 - H_2 l_2 \\ U_{M_{dk}} &= (H_3 l_3 + H_{\delta 3} l_{\delta 3}) \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Задача решается графически:

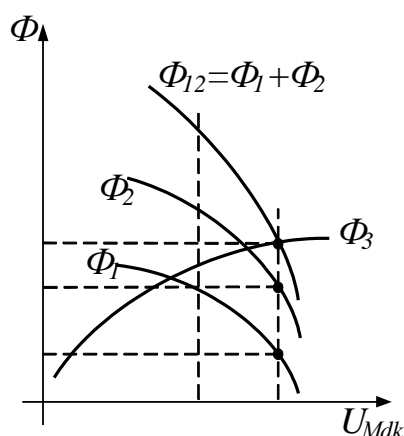


Рисунок 119

1. Рассчитываем и строим вебер-амперные характеристики:

$$\Phi_1 = f(U_{M_{dk}}); \Phi_2 = f(U_{M_{dk}}) \quad \text{и} \\ \Phi_3 = f(U_{M_{dk}});$$

2. Строим суммарную характеристику:

$$\Phi_{12} = \Phi_1 + \Phi_2 = f(U_{M_{dk}});$$

3. Так как по первому закону Кирхгофа $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3$, то точка пересечения характеристик Φ_3 и $\Phi_1 + \Phi_2$ и дает решение задачи.

Задачи

Задача 109. Магнитопровод (рис. 120) выполнен из электротехнической стали 1512 и имеет следующие размеры: $l_1=30\text{см}$; $l_2=12\text{см}$; $l_3=30\text{см}$; $s_1=s_2=s_3=15\text{см}^2$; $F_1=I_1 w_1=100\text{А}$; $F_2=I_2 w_2=470\text{А}$.

Определить магнитную индукцию в каждом стержне. Задачу решить методом двух узлов.

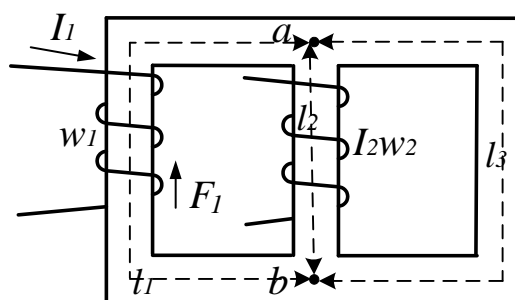


Рисунок 120

10. Электрические цепи с распределенными параметрами

Электрические цепи, в которых ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точке цепи к другой, называются цепями с распределенными параметрами.

Для расчетов режимов работы линии с распределенными параметрами используют два уравнения:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i, \quad (74)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + G_0 u \quad (75)$$

Уравнения (74), (75) являются основными дифференциальными уравнениями для линии с распределенными параметрами. Они могут быть решены однозначно при использовании начальных и граничных условий.

В качестве начальных условий могут использоваться значения тока и напряжения в начале (или конце) линии в момент $t = 0$.

Граничные условия определяются связями между напряжением и током в начале или конце линии, зависящими от заданного режима работы линии.

Уравнения записаны в частных производных, т.к. и напряжение и ток в линии являются функциями двух переменных: координаты x (вдоль линии) и времени t .

Если обозначить $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ – продольное сопротивление линии, а $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ – поперечная проводимость линии, то

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0) \cdot \dot{I}; \quad (76)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0) \cdot \dot{U}. \quad (77)$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} \\ \dot{I} &= \frac{\gamma}{Z_0} (A_2 e^{-\gamma x} - A_1 e^{\gamma x}) \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения выражают комплексы тока и напряжения в функции расстояния x .

Постоянная распространения и волновое сопротивление

Величина $(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0) = Z_0 Y_0$ в общем случае является комплексной.

Выражение $\sqrt{Z_0 Y_0} = \gamma$ называют *постоянной распространения*. Ее можно представить в алгебраической форме $\gamma = \alpha + j\beta$, где α – коэффициент затухания, характеризующий затухание тока и напряжения на единицу длины линии, β – коэффициент фазы, характеризующий изменение фазового сдвига между током и напряжением на единицу длины линии.

Из выражения для тока

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \cdot \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{A_2 e^{-\gamma x} - A_1 e^{\gamma x}}{Z_0 / \gamma}$$

величину $Z_0 / \gamma = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_g$ принято называть *волновым сопротивлением*.

Выражение тока и напряжения в любой точке линии через ток и напряжение в ее начале или конце

Выразим напряжение и ток в любой точке линии через напряжение и ток в ее начале.

Как и раньше, под x будем понимать расстояние от начала линии до текущей точки.

Пусть при $x = 0$ (начало линии) напряжение и ток соответственно равны \dot{U}_1, \dot{I}_1 .

Тогда после ряда преобразований получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 Ch\gamma x - \dot{I}_1 Z_g Sh\gamma x \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 Ch\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_g} \cdot Sh\gamma x \end{aligned} \right\},$$

где $\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = Ch\gamma x$; – гиперболический косинус; $\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = Sh\gamma x$. – гиперболический синус аргумента γx .

Эти формулы дают возможность найти комплексы напряжения и тока в любой точке линии, расположенной на расстоянии x от ее начала.

Линия без потерь

Рассмотрим линию, в которой отсутствуют распределенные активное сопротивление и проводимость, т.е. $R_0 = 0$, и $G_0 = 0$. Такую линию называют идеальной или *линией без потерь*.

Для линии без потерь выражения для постоянной распространения и волнового сопротивления упрощаются и принимают вид:

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0C_0}, \quad Z_{\epsilon} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 \rho \sin \beta x \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta x \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Распределение действующих значений напряжения вдоль линии можно найти используя выражение:

$$U(y) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y}, \quad (79)$$

где $m = \frac{Z_c}{Z_H}$; y – расстояние от конца линии до текущей точки.

Рассмотрим пример:

Известны первичные параметры воздушной линии связи:

$r_0 = 2.84 \text{ Ом} / \text{км}$; $L_0 = 1.94 \text{ мГн} / \text{км}$; $g_0 = 0.70 \text{ мкСм} / \text{км}$; $C_0 = 6.25 \text{ нФ} / \text{км}$. $f = 800 \text{ Гц}$
 $U_2 = 20 \text{ В}$; $l = 59 \text{ км}$.

Определить

1. Волновое сопротивление линии.
2. Постоянную распространения.
3. Фазовую скорость и длину волны.
4. При каком сопротивлении приемника в линии отсутствует отраженная волна.
5. При этом сопротивлении приемника найти напряжение на входе линии, активную мощность источника и КПД линии.
6. Какую наибольшую длину может иметь линия, если считать допустимым ослабление сигнала 11,3дБ, и какое напряжение должно быть в начале линии, чтобы напряжение приемника осталось прежним.

Для линии с потерями волновое сопротивление

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{Z_0 / Y_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) / (g_0 + j\omega C_0)};$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3.14 \cdot 800 = 5.03 \cdot 10^3 \text{ рад} / \text{с};$$

$$\omega L_0 = 5.03 \cdot 10^3 \cdot 1.94 \cdot 10^{-3} = 9.75 \text{ Ом} / \text{км};$$

$$\omega C_0 = 5.03 \cdot 10^3 \cdot 6.25 \cdot 10^{-9} = 31.4 \cdot 10^{-6} \text{ См} / \text{км}.$$

$$Z_0 = r_0 + j\omega L_0 = 2.84 + j9.75 = 10.15 e^{j73.45}$$

$$Y_0 = g_0 + j\omega C_0 = 0.7 \cdot 10^{-6} + j31.4 \cdot 10^{-6} \approx 31.4 \cdot 10^{-6} e^{j90}$$

1. Волновое сопротивление линии

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{Z_0 / Y_0} = \sqrt{10.15 e^{j73.45} / 31.4 \cdot 10^{-6} e^{j90}} = 568 e^{-j7.5} \text{ Ом}$$

2. Постоянная распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{10.15 e^{j73.45} \cdot 31.4 \cdot 10^{-6} e^{j90}} = 17.9 \cdot 10^{-3} e^{j81.15} = 2.72 \cdot 10^{-3} + j17.5 \cdot 10^{-3}$$

откуда $\alpha = 2.72 \cdot 10^{-3} \text{ Нп} / \text{км}$; $\beta = 17.5 \cdot 10^{-3} \text{ рад} / \text{км}$.

3. Фазовая скорость

$$c = \omega / \beta = 5.03 \cdot 10^3 / 17.5 \cdot 10^{-3} = 287428 \text{ км} / \text{с}$$

Длина волны

$$\lambda = c / f = 2\pi / \beta = 6.28 / 17.5 \cdot 10^{-3} = 358.8 \text{ км}$$

4. Отраженная волна отсутствует при сопротивлении нагрузки, равном волновому сопротивлению линии т.е. при $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$

$$5. \quad Z_{\text{в}} = 568 e^{-j7.5} \text{ Ом};$$

$$\alpha l = 2.72 \cdot 10^{-3} \cdot 59 = 0.16 \text{ Нп}$$

Тогда напряжение на входе линии

$$U_1 = U_2 e^{\alpha l} = 20 e^{0.16} = 20 \cdot 1.17 = 23.4 \text{ В}$$

Активная мощность источника

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \theta = \frac{U_1^2}{Z_{\text{в}}} \cos \theta = \frac{U_2^2}{Z_{\text{в}}} e^{2\alpha l} \cos \theta = \frac{20^2}{568} 1.38 \cos(-7.5^\circ) = 0.96 \text{ Вт}$$

Активная мощность в нагрузке находится следующим образом:

$$\text{Ток в нагрузке } \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{н}}} = \frac{20}{568 e^{-j7.5}} = 0.035 e^{j7.5}$$

$$\text{Тогда } P_2 = U_2 I_2 \cos \theta = 20 \cdot 0.035 \cdot \cos(7.5) = 0.694 \text{ Вт}$$

Коэффициент полезного действия линии

$$\eta = P_2 / P_1 = 0.694 / 0.96 = 0.72$$

6. При допустимом ослаблении сигнала в линии $\alpha l = 11.3 \cdot 0.115 = 1.3 \text{ Нп}$ наибольшая длина линии $l_{\max} = 1.3 / \alpha = 1.3 / 2.72 \cdot 10^{-3} = 478 \text{ км}$

Необходимое напряжение в начале линии при $U_2 = 20 \text{ В}$ и $l = l_{\max}$

$$U_1 = U_2 e^{\alpha l_{\max}} = 20 \cdot 3.68 = 73.5 \text{ В.}$$

Задачи

Задача 110. Первичные параметры двухпроводной телефонной линии при частоте $f = 100 \text{ кГц}$: $r_0 = 14 \text{ Ом/км}$; $L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$; $g_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$; $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$.

Вычислить :

1. Индуктивность L , которую надо включить на каждый километр длины, чтобы линия стала неискажающей.

2. Волновое сопротивление, коэффициент распространения и его составляющие.

Задача 111. Для линии длиной $l = 38 \text{ км}$ и параметрами $r_0 = 38.4 \text{ Ом/км}$; $L_0 = 88.4 \text{ Гн/км}$; $g_0 = 0.05 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$; $C_0 = 5,12 \text{ Ф/км}$ при частоте $f = 800 \text{ Гц}$ определить:

1. Волновое сопротивление.

2. Коэффициент распространения и его составляющие.

3. Отношение напряжения и тока в начале и конце линии.

Задача 112. По заданным параметрам линии (R_0 ; L_0 ; G_0 ; C_0), частоте f , длине линии l , комплексным значениям напряжения и тока U_2 и I_2 в конце линии, сопротивлению нагрузки Z_n требуется:

1. Рассчитать напряжение U_1 и ток I_1 в начале линии, активную и полную мощности в начале и конце линии, а также КПД линии.

2. Полагая, что линия п.1 стала линией без потерь ($R_0 = G_0 = 0$), а нагрузка стала активной и равной модулю комплексной нагрузки в п.1, определить напряжение U_1 и ток I_1 в начале линии, а также длину электромагнитной волны λ .

3. Для линии без потерь п.2 построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии в функции координаты y .

Дано:

$$f = 500 \text{ Гц}; l = 200 \text{ км}; R_0 = 10 \text{ Ом/км}; C_0 = 9.6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}; L_0 = 5.08 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}; \\ G_0 = 1.25 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}; \dot{U}_2 = 100 \text{ В}; \dot{I}_2 = 64.2 e^{j15} \text{ мА};$$

11. Примеры решения задач по теории поля

11.1 Электростатическое поле

Электростатическое поле – это поле, создаваемое совокупностью зарядов неподвижных в пространстве и неизменных во времени.

Основными характеристиками электростатического поля являются напряженность \vec{E} и потенциал φ .

Напряженность поля в данной точке есть вектор, численное значение которого равно отношению силы, действующей на помещенное в эту точку пробное тело, обладающее положительным зарядом, к величине этого заряда, а направление совпадает с направлением силы.

Если поле создается несколькими зарядами $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$, то результирующая напряженность поля равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

Напряженность поля связана с потенциалом выражением:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad (80)$$

Физический смысл выражения (56) заключается в том, что напряженность поля в какой-либо его точке равна скорости изменения потенциала в этой точке, взятой с обратным знаком.

Если диэлектрик поместить в электростатическое поле, в нем будет наблюдаться поляризация. Под действием сил поля молекулы диэлектрика стремятся повернуться таким образом, чтобы их электрический момент совпадал по направлению с вектором напряженности поля.

Степень поляризации оценивают вектором поляризованности P_s . Для однородного диэлектрика величина вектора поляризованности представляет геометрическую сумму электрических моментов молекул, заключенных в единице объема:

$$P_s = \frac{\sum p_s}{V} \quad (81)$$

Поляризованность тем больше, чем сильнее электрическое поле. Зависит она и от свойств диэлектрика. Ее можно выразить произведением:

$$P_s = \varepsilon_0 k_s E, \quad (82)$$

где k_3 – диэлектрическая восприимчивость, характеризующая способность диэлектрика поляризоваться под действием электрического поля.

Кроме векторов \vec{E} и \vec{P} в электротехнических расчетах используют еще вектор электрического смещения (электрической индукции) \vec{D} .

Вектор \vec{D} равен сумме двух векторов: вектора $\varepsilon_0 \vec{E}$, характеризующего поле в вакууме, и вектора поляризации \vec{P} :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 k_3 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + k_3) \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}. \quad (83)$$

В этой формуле величина $\varepsilon_0 \vec{E}$ характеризует только электрическое поле в пустоте. Другим слагаемым $\varepsilon_0 k_3 \vec{E}$ учитывается явление поляризации диэлектрика. Величина $\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + k_3)$, зависящая от свойств диэлектрика, и есть диэлектрическая проницаемость вещества.

Теорема Гаусса в интегральной форме

Теорема Гаусса является одной из фундаментальных теорем теории поля. Она гласит: *поток вектора электрического смещения D сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов $q_{св}$, расположенных в объеме, ограниченном этой поверхностью*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \sum q_{св} \quad (84)$$

Так как $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}$, то.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \sum q_{св} / \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (85)$$

Теорему Гаусса в интегральной форме можно использовать для нахождения напряженности или электрического смещения в какой-либо точке поля, если через эту точку можно провести замкнутую поверхность таким образом, чтобы все ее точки находились в одинаковых (симметричных) условиях по отношению к заряду.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме

Разделим обе части выражения (60) на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности S :

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} d\vec{s}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_{св}}{V}$$

При стремлении объема к нулю $\oint_s \bar{D} d\bar{s}$ также стремится к нулю, но отношение двух бесконечно малых величин есть величина конечная.

Предел отношения потока вектора сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, к величине этого объема называют дивергенцией вектора. Следовательно

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \bar{D} d\bar{s}}{V} = \text{div} \bar{D} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sum q_{cv}}{V} = \rho_{cv},$$

где ρ_{cv} – объемная плотность свободных зарядов.

Если в данной точке поля $\rho > 0$, то из бесконечно малого объема, окружающего данную точку линии вектора D исходят. Если $\rho < 0$, линии входят в объем и, наконец, если $\rho = 0$, то через данную точку поля линии проходят.

Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа

Эти уравнения являются основными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Известно, что $\bar{E} = -\text{grad} \varphi$. С другой стороны, из теоремы Гаусса $\text{div} \bar{E} = \rho_{cv} / \varepsilon_a$. После подстановки получаем:

$$\text{div} \bar{E} = \text{div}(-\text{grad} \varphi) = \rho_{cv} / \varepsilon_a.$$

Вынесем знак минус за знак дивергенции:

$$\text{div grad} \varphi = -\rho_{cv} / \varepsilon_a$$

Вместо $\text{grad} \varphi$ запишем его эквивалент $\nabla \varphi$; вместо div напишем ∇ .

Тогда $\nabla(\nabla \varphi) = -\frac{\rho_{cv}}{\varepsilon_a}$, или

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{cv}}{\varepsilon_a}. \quad (86)$$

Уравнение (62) называют уравнением Пуассона.

В областях, не занятых свободными зарядами ($\rho_{cv} = 0$), уравнение (62) принимает вид:

$$\begin{aligned} \text{div grad} \varphi &= 0, \\ \nabla^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

и называется уравнением Лапласа.

Задачи

Задача 113. Определить силу, которая действует в вакууме на каждый из точечных зарядов системы, изображенной на рисунке 121, где $q_a = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл; $q_b = 15 \cdot 10^{-12}$ Кл; $q_c = 15 \cdot 10^{-12}$ Кл.

Решение

Действующая на заряд q_a сила $F_a = q_a E_a$, где E_a напряженность электрического поля в точке расположения заряда q_a (рис.105), создаваемая всеми зарядами, кроме q_a , т.е.

$$E_a = E_{ca} + E_{ba} = \frac{q_c r_{ca}^0}{4\pi\epsilon_0 r_{ca}^2} + \frac{q_b r_{ba}^0}{4\pi\epsilon_0 r_{ba}^2},$$

где r_{ca}^0 – единичный радиус-вектор, направленный из точки c в точку a ; r_{ba}^0 – единичный радиус-вектор, направленный из точки b в точку a .

В декартовой системе координат

$$E_{a=} = \left(\frac{q_c \cos \alpha_1}{4\pi\epsilon_0 r_{ca}^2} + \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_{ba}^2} \right) i + \frac{q_c \sin \alpha_1}{4\pi\epsilon_0 r_{ca}^2} j$$

где $\cos \alpha_1 = r_{ba}/r_{ca} = 0.3/0.5 = 0.6$. $\sin \alpha_1 = r_{cb}/r_{ca} = 0.4/0.5 = 0.8$.

При этом $F_a = (-7.25i + 1.72j)$ мкН. Аналогично

$$F_b = (6.0i + 14.3j)$$
 мкН; $F_c = (1.2i - 14.52j)$ мкН;

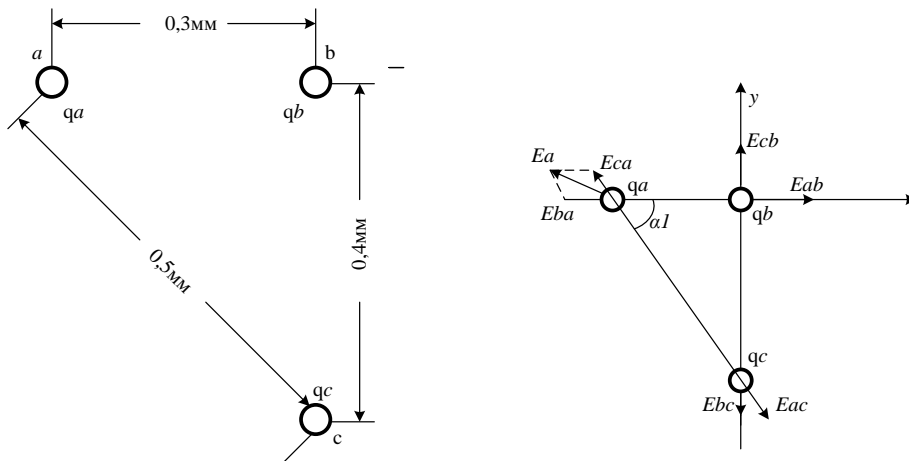


Рисунок 121

Задача 114. Определить напряженность поля E и потенциал ϕ в вакууме над плоской металлической пластиной вдали от ее краев, на одной стороне которой равномерно распре-

делен поверхностный заряд $q_s = 10^{-10}$ Кл/м². Рассчитать силу, действующую на положительный пробный заряд $q = 10^{-12}$ Кл, находящийся на расстоянии a от пластины.

Решение

В полупространстве, ограниченном заряженной стороной бесконечной металлической пластины, существует однородное электрическое поле, напряженность которого перпендикулярна ее плоскости. По другую сторону пластины поля нет.

Выбрав в качестве гауссовой поверхности прямоугольный параллелепипед, который пересекает пластину и боковые грани которого перпендикулярны плоскости пластины, по теореме Гаусса получим:

$$\varepsilon_0 E \Delta S = q_s \Delta S$$

где ΔS – торцевая поверхность параллелепипеда.

Поток через все остальные грани параллелепипеда равен нулю.

Выбрав начало координат на поверхности, где распределен заряд q_s , и ось Y, перпендикулярную этой поверхности получим

$$E = E_y = q_s / \varepsilon_0 = 11.3 \text{ В/м}$$

Сила, действующая на пробный заряд, $F = qE = 11.3 \cdot 10^{-12}$ Н, а потенциал, $\varphi = -\int E_y dy + const = -11.3y$ если выбрать на пластине ($y=0$) потенциал $\varphi=0$.

Задача 115. В электрическом поле точечного заряда напряжение между точками a и b равно 25В. Определить величину и направление напряженности поля в точке С, если $R_a=3\text{см}$; $R_b=7\text{см}$; $R_c=5\text{см}$.

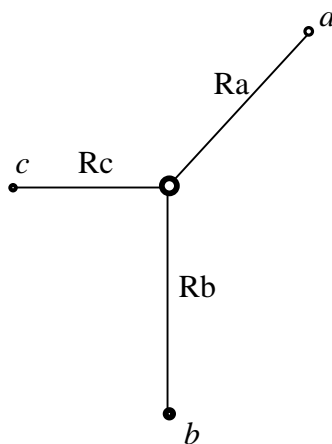


Рисунок 122

Решение

1. Напряженность поля точечного заряда в произвольной точке

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R^2}$$

Напряженность в точке С (рис.122)

$$E_C = q / 4\pi\epsilon_a R_c^2$$

2. Напряжение между точками *a* и *b*

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \int_a^b \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{Ra} - \frac{1}{Rb} \right) \Rightarrow$$

$$q = \frac{U_{ab} 4\pi\epsilon_a}{\left(\frac{1}{Ra} - \frac{1}{Rb} \right)}$$

Тогда

$$E = \frac{U_{ab}}{\left(\frac{1}{Ra} - \frac{1}{Rb} \right) R_c^2} = \frac{25}{\left(\frac{1}{0.03} - \frac{1}{0.07} \right) 0.05^2} = 525 \text{ В / м}$$

Задача 116. Тонкая, бесконечно длинная нить (рис.123) равномерно заряжена с линейной плотностью $\tau = 20 \cdot 10^{-9} \text{ Кл / м}$. Рассчитать напряженность поля в точке А, удаленной от оси на расстояние 30см и построить кривую распределения потенциала $\varphi = f(y)$.

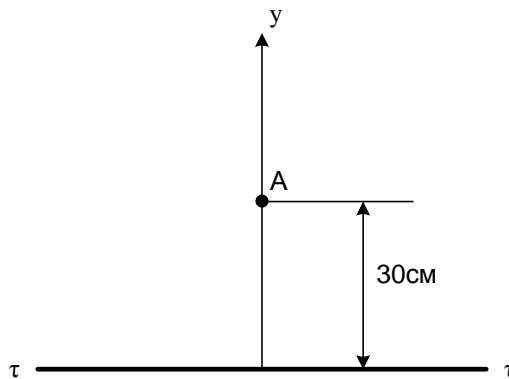


Рисунок 123

Решение

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r}$$

Задача 117. Две заряженные оси, подвешенные параллельно на расстоянии 40см и несут равные по величине заряды с линейной плотностью $\tau = 30 \cdot 10^{-9} \text{ Кл / м}$ (рис.124).

Вычислить напряженность поля и потенциал точки М с координатами $x_M = 10\text{см}$; $y_M = 30\text{см}$.

Решение

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a a}; \quad E_2 = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a b};$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a}$$

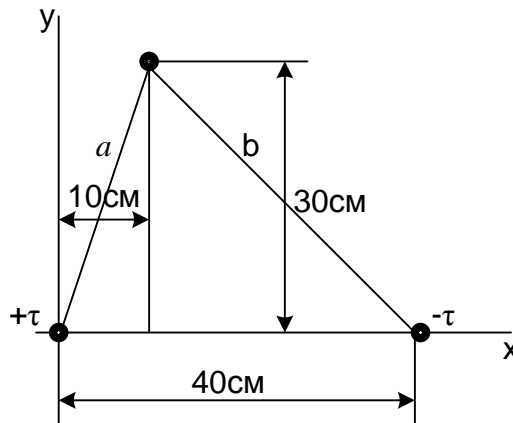


Рисунок 124

Задача 118. Электрическое поле создано тонкой бесконечно длинной нитью (осью), равномерно заряженной с линейной плотностью $\tau = 30 \text{ нКл / м}$. На расстоянии $a=20\text{см}$ от нити находится плоская круглая площадка радиусом $r = 1\text{см}$ (рис.125). Определить поток вектора напряженности через эту площадку, если плоскость ее составляет угол $\beta = 30^\circ$ с линией напряженности, проходящей через середину площадки.

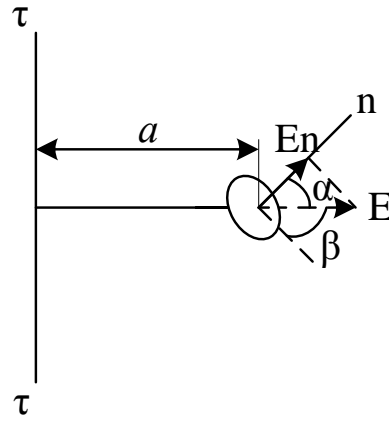


Рисунок 125

Решение

Поле, создаваемое заряженной осью, является неоднородным. В этом случае

$$\Phi_E = \int_s E_n ds,$$

Где E_n – проекция Вектора E на нормаль \mathbf{n} к поверхности площадки ds .

$$E_n = E \cos \alpha$$

$$\text{Тогда } \Phi_E = \int_s E \cos \alpha ds$$

Т.к. размеры площадки малы по сравнению с расстоянием до нити $r \ll a$, то в пределах площадки можно считать поле практически однородным. С учетом этого

$$\Phi_E = E \cos \alpha \int_s ds = \pi r^2 E_A \cos \alpha$$

Напряженность поля в точке, удаленной на расстояние a от оси, равна

$$E_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a};$$

$$\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta$$

$$\text{Тогда } \Phi = \frac{\pi r^2 \tau}{2\pi\epsilon_0 a} \sin \beta = \frac{r^2 \tau}{2\epsilon_0 a} \sin 30^\circ = 424 \text{ мВ / м}$$

Задача 119. Определить емкость плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1=2\text{мм}$ и эбонита толщиной $d_2=1.5\text{мм}$, если площадь пластин равна 100см^2 ($\epsilon_{\text{ф}}=5$; $\epsilon_{\text{э}}=3$).

Решение

Емкость конденсатора $C = Q/U$. Заменяв разность потенциалов на сумму напряжений на слоях диэлектриков (U_1+U_2), получим

$$C = Q/(U_1 + U_2) \text{ Учтем, что } Q = \sigma S, \text{ а}$$

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1; \quad U_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2$$

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2}$$

Умножим числитель и знаменатель на ε_0 и из граничных условий $D = \sigma$ получим

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = 98.3 \text{ нФ}$$

Задача 120. Параллельно бесконечно протяженному плоскому листу из проводящего материала на расстоянии $h=4\text{см}$ от его поверхности расположен прямой бесконечно длинный провод круглого сечения диаметром $d=2\text{мм}$ (рис.126). Между листом и проводом приложено постоянное напряжение $U=400\text{В}$. Окружающая среда – воздух ($\varepsilon_0 = 8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$).

1. Рассчитать емкость между плоскостью и проводом на единицу длины.
2. Найти плотность поверхностного заряда в точке **A** с координатами $X_A=4\text{см}$; $Y_A=0$. Полагая потенциал листа равным нулю, определить потенциал точки **B** ($X_B=3\text{см}$; $Y_B=2\text{см}$)

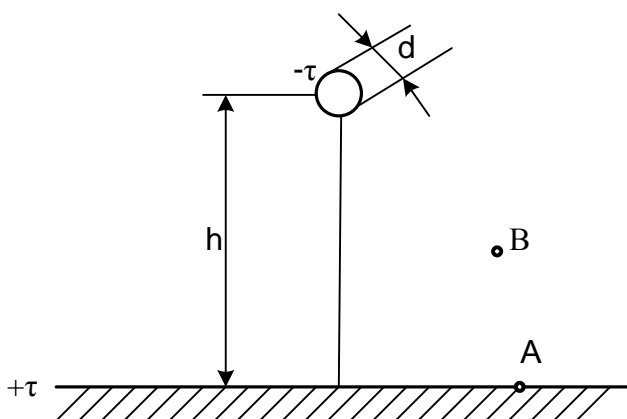


Рисунок 126

Решение

Эта задача проще всего решается методом зеркальных изображений (рис.127).

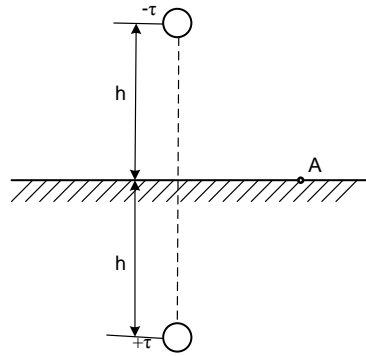


Рисунок 127

1. Емкость двухпроводной линии

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{H+h}{r}}$$

При достаточно тонких проводах

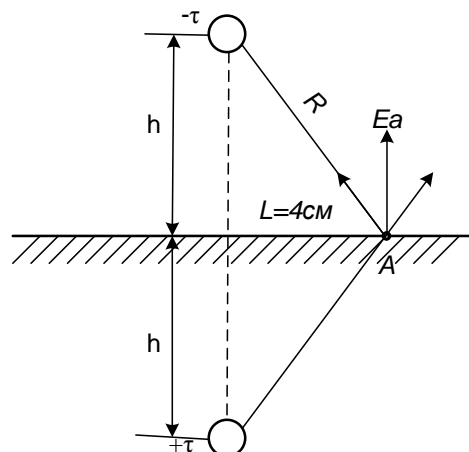
$$h \approx H$$

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{2h}{r}}$$

Емкость между проводом и землей будет видимо вдвое больше

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{2h}{r}} = \frac{6.28 \cdot 8 \cdot 10^{-12}}{\ln \frac{8}{0.1}} = 11.5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$$

Для нахождения плотности заряда в точке А вычислим напряженность поля в этой точке (рис.128).



а) от заряда $-\tau$

$$R = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5.65 \text{ см};$$

$$E_1 = \frac{U}{R} = \frac{400}{5.65} = 70.8 \text{ В / см};$$

$$E_2 = \frac{U}{R} = 70.8 \text{ В / см};$$

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{70.8^2 + 70.8^2} = 100 \text{ В / см}.$$

Пренебрегая радиусом провода по сравнению с высотой подвеса поверхностная плотность заряда в точке A

$$\sigma = \frac{2U \varepsilon_0 h}{h^2 \ln \frac{2h}{R}} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 8 \cdot 10^{-12} \cdot 4}{16 \ln \frac{8}{5.65}} =$$

Найдем потенциал в точке B (рис. 129)

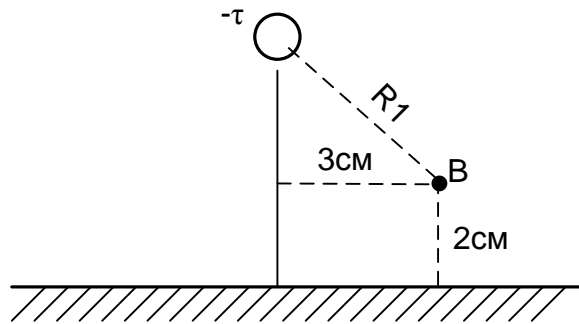


Рисунок 129

$$R_1 = \sqrt{(h-2)^2 + (l-3)^2} = \sqrt{4+1} = 2.2$$

Линейную плотность заряда найдем через напряженность в точке B

$$E_B = \frac{U}{R_1} = \frac{400}{2.2} = 181.8 \text{ Кл / м}$$

С другой стороны

$$E_B = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R_1} \Rightarrow \tau = E_B 2\pi\varepsilon_0 R_1 = 181.8 \cdot 6.28 \cdot 8 \cdot 10^{-12} \cdot 2.2 =$$

$$= 200.9 \cdot 10^{-10} \text{ Кл / см}$$

Потенциал точки B

$$\varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{R_1} = \frac{200.9 \cdot 10^{-10}}{6.28 \cdot 8 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{1}{2.2} = 4 \cdot 10^2 \cdot 0.79 = 316 \text{ В}.$$

Задача 121. Два тонких параллельных провода расположены над проводящей поверхностью (рис.130). Провода несут заряды, линейные плотности которых равны $\tau_1 = +10^{-8} \text{ Кл}$; $\tau_2 = -0,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$. Диаметры проводов $D=10\text{мм}$. Окружающая среда – воздух.

Требуется:

1. Вычислить потенциалы проводов;
2. Вычислить потенциал точки A с координатами ($X_A=40\text{см}$; $Y_A=10\text{см}$).
3. Найти частичную емкость между проводами.

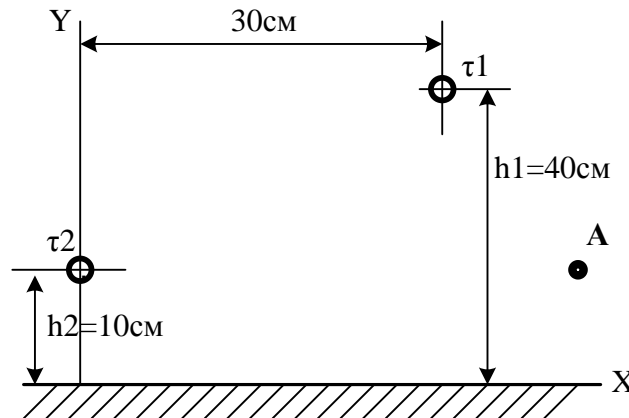


Рисунок 130

Решение

Решение найдем методом зеркальных изображений (рис.131)

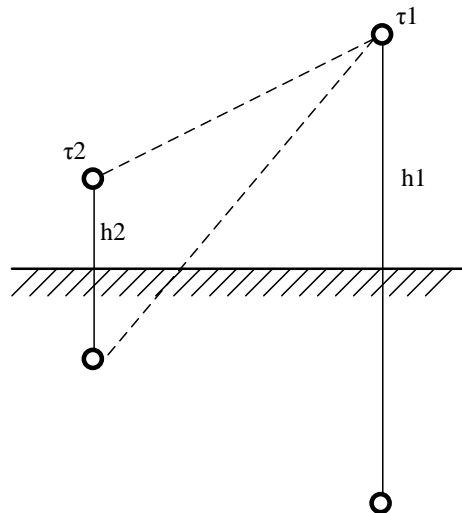


Рисунок 131

1. Расстояние между первым и вторым проводом

$$d_{12} = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800} = 0.42\text{м}$$

Расстояние между первым проводом и зеркальным изображением второго

$$b_{12} = \sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{2500 + 900} = 0.58 \text{ м}$$

2. Потенциалы проводов связаны с линейными плотностями их зарядов первой группой формул Максвелла:

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 \quad (88)$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2,$$

где

$$\varphi_1 = 101 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} + 6.42 \cdot 10^9 \cdot (-0.6 \cdot 10^{-8}) = 1010 - 38.5 = 997.1 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = 6.42 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} - 73.4 \cdot 10^9 \cdot 0.6 \cdot 10^{-8} = 64.2 - 440.4 = -376.2 \text{ В}.$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r} = \frac{1}{6.28 \cdot 8 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{0.8}{0.005} = 101 \cdot 10^9 \text{ м / Ф};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_2}{r} = \frac{1}{6.28 \cdot 8 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{0.2}{0.005} = 73.4 \cdot 10^9 \text{ м / Ф};$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{6.28 \cdot 8 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{0.58}{0.42} = 6.42 \cdot 10^9 \text{ м / Ф};$$

Тогда

3. Вычислим потенциал точки A

Составляющая потенциала точки A от провода 1 и его зеркального изображения:

$$\varphi_{A1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1A}}{a_{1A}} = 10^{-8} \cdot 19.9 \cdot 10^9 \ln \frac{0.51}{0.316} = 95.2 \text{ В};$$

$$b_{1A} = \sqrt{50^2 + 10^2} = 0.51 \text{ м};$$

$$a_{1A} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 0.316 \text{ м}$$

Составляющая потенциала точки A от провода 2 и его зеркального изображения:

$$\varphi_{A2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2A}}{a_{2A}} = (-0.6 \cdot 10^{-8} \text{ фф}) \cdot 19.9 \cdot 10^9 \ln \frac{0.447}{0.4} = -13.3 \text{ В};$$

$$a_{2A} = 40 \text{ см}$$

$$b_{2A} = \sqrt{40^2 + 20^2} = 0.447 \text{ м}$$

$$\text{Тогда } \varphi_A = \varphi_{A1} - \varphi_{A2} = 95.2 - 13.3 = 81.9 \text{ В}.$$

4. При определении зарядов по известным потенциалам удобно пользоваться второй группой формул Максвелла:

$$\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2;$$

$$\tau_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2;$$

(89)

Значения емкостных коэффициентов можно получить путем решения системы (1)

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha_{12} \\ \varphi_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_1 \alpha_{22} - \varphi_2 \alpha_{12}}{D};$$

$$\tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \varphi_1 \\ \alpha_{21} & \varphi_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\varphi_2 \alpha_{11} - \varphi_1 \alpha_{21}}{D} \Rightarrow \quad (90)$$

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{D}; \quad \beta_{12} = \frac{-\alpha_{12}}{D}; \quad \beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{D}.$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101 \cdot 10^9 & 6,42 \cdot 10^9 \\ 6,42 \cdot 10^9 & 73,4 \cdot 10^9 \end{vmatrix} = 7371,5 \cdot 10^9$$

Из сравнения уравнений (65) и (66) находим

$$\beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{D} = -\frac{6,42 \cdot 10^9}{7371,5 \cdot 10^9} = -8,7 \cdot 10^{-4}$$

Частичная емкость между проводами

$$C_{12} = -\beta_{12} = 8,7 \cdot 10^{-4} \Phi / \text{м}$$

Задача 122. Равномерное электрическое поле существует в среде с $\varepsilon_r = 4$ возмущено внесенным в него проводящим шаром, несущим заряд $Q = 5,56 \cdot 10^{-10}$ Кл (Рис.132).

Напряженность невозмущенного поля $E_0 = 10^3$ В/м Радиус шара $a=4$ см.

Требуется:

1. Определить напряженность поля в точке **A** ($X_A=7,35$ см; $Z_A=3,2$ см)
2. Рассчитать и построить график изменения потенциала по 5 – 6 точкам лежащим на оси z в интервале $0 \leq \theta \leq 180^\circ$.

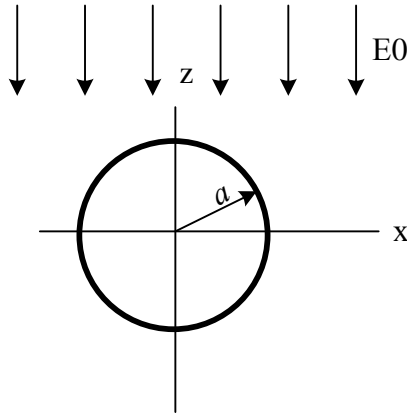


Рисунок 132

Решение

Поле во внешней области описывается уравнением Лапласа, полное решение которого имеет вид:

$$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2 + (C_3 R + \frac{C_4}{R_2}) \cos \theta$$

Значения $C_1 - C_4$ зависят от того, какой шар.

Т.к. шар проводящий, то внутри него $\varphi = const$ и $E = 0$.

Поскольку поле внутри шара отсутствует, его можно заменить тонким сферическим проводящим листом. С другой стороны сферическая поверхность является эквипотенциальной в поле точечного заряда, расположенного в его центре. Таким образом, поле вне заряженного шара можно заменить полем точечного заряда равного заряду шара и расположенного в его центре. Тогда потенциал в плоскости ХОУ шара

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a \epsilon_r} = \frac{5.56 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 8.9 \cdot 10^{-12}} = \frac{5.56 \cdot 10^{-10}}{447.1 \cdot 10^{-14}} = 124B$$

Во всех точках диэлектрика (вне шара)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R} + \varphi_0 + E_0 (R - \frac{a^3}{R^2}) \cos \theta$$

Задаемся $R=0.05\text{м}$ и $\theta=(0 - 180^0)$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R} = \frac{5.56 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 3.14 \cdot 4 \cdot 8.9 \cdot 10^{-12} \cdot 0.05} = \frac{5.56 \cdot 10^2}{22.3} = 25B$$

$$\varphi_0 = 124B;$$

$$R - \frac{a^3}{R^2} = 0.05 - \frac{0.04^3}{0.05^2} = 0.05 - \frac{6.4 \cdot 10^{-5}}{2.5 \cdot 10^{-3}} = 0.05 - 0.025 = 0.025$$

$$\varphi = 25 + 124 + 10^3 \cdot 0.025 \cdot \cos \theta$$

Задаем значениями θ и рассчитываем зависимость $\varphi(\theta)$

θ	0	30	60	90	120	150	180
φ	174	170	161,5	149	161,5	170	174

По полученным данным строим график $\varphi(\theta)$ (Рис.133).

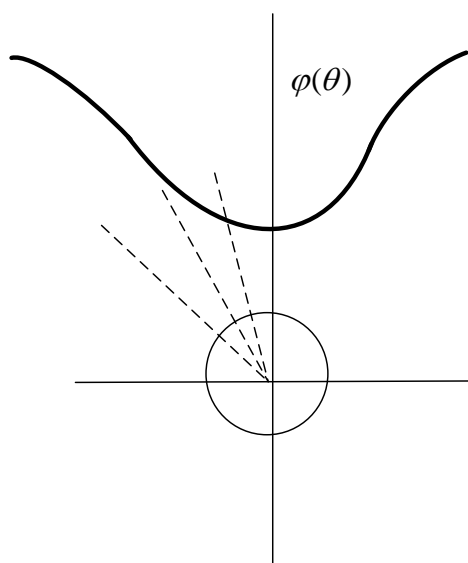


Рисунок 133

11.2 Магнитное поле постоянного тока

Основным свойством неизменного во времени магнитного поля является силовое воздействие его как на движущиеся в нем заряженные тела, так и на неподвижные проводники с электрическим током.

Основной величиной, характеризующей магнитное поле, является вектор магнитной индукции \vec{B} . Зная величину и направление вектора \vec{B} , можно установить свойства магнитного поля и вызываемых им явлений. Вектор \vec{B} можно, например, определить по силе, с которой магнитное поле действует на контур с током. Магнитная индукция измеряется в Теслах (Тл).

Другим основным вектором магнитного поля является *вектор напряженности* \vec{H} , равный магнитной индукции, деленной на абсолютную магнитную проницаемость μ_0 :

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_a} \quad (91)$$

Опыт показывает, что всякое вещество, внесенное в магнитное поле, намагничивается. Внутримолекулярные токи под действием внешнего поля ориентируются определенным образом и их магнитное поле, складываясь с внешним полем, изменяет его.

Собственное макроскопическое поле вещества можно характеризовать *вектором намагниченности* \bar{J} . Этот вектор определяет, *насколько магнитная индукция в данной среде* $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ *отличается от магнитной индукции в пустоте* $\bar{B}_0 = \mu_0 \bar{H}$ *при одной и той же напряженности магнитного поля*

$$\bar{B} - \bar{B}_0 = \mu_0 \bar{J}.$$

В однородных средах при слабых магнитных полях напряженность и намагниченность пропорциональны: $\bar{J} = \chi \bar{H}$. Безразмерный коэффициент χ называется *магнитной восприимчивостью*.

Связь между тремя векторами магнитного поля можно записать следующим образом:

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \bar{H} = \mu_0 (1 + \chi) \bar{H} = \mu \mu_r \bar{H} = \mu_a \bar{H}. \quad (92)$$

Следовательно $\mu_r = (1 + \chi)$.

Напряженность магнитного поля и намагниченность в системе СИ измеряются в амперах, деленных на метр (А/м).

Закон полного тока

Основным законом, характеризующим свойства магнитного поля, является закон полного тока, который устанавливает связь между напряженностью магнитного поля и током. Он гласит: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром:*

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \sum_{k=1}^n I_k = I.$$

Положительное направление тока связано с направлением обхода контура правилом правого винта.

Пользуясь теоремой Стокса можно записать равенство

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{H} d\bar{S}.$$

Следовательно,

$$\int_S \text{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_S \bar{\delta} d\bar{S}.$$

Так как это равенство справедливо для всех значений предела интегрирования S , то подинтегральные функции равны между собой:

$$\text{rot} H = \bar{\delta} \quad (93)$$

Задачи

Задача 123. Найти напряженность поля в точках **m** и **n** (рис.134), если $\mu_1=1$; $\mu_2=999$; $I_1=10A$

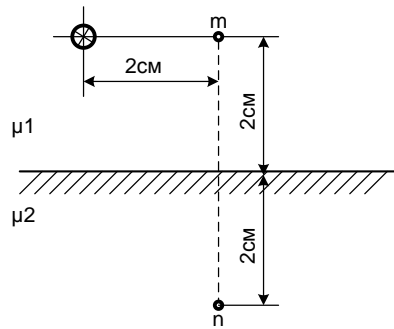


Рисунок 134

Решение

Задачу решаем методом зеркальных изображений. Находим фиктивные токи (рис.135)

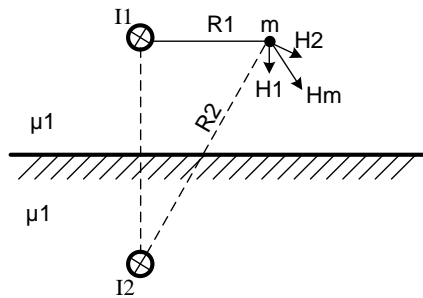


Рисунок 135

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I_1 = 9,98A;$$

$$I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I_1 = 0,02A/$$

Напряженность магнитного поля в точке **m** $\bar{H}_m = \bar{H}_1 + \bar{H}_2$, где

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = \frac{10}{6,28 \cdot 0,02} = 79,5 \text{ A/м} \quad R_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,48$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{9,98}{6,28 \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 35,4 \text{ A/м}$$

Графическим сложением находим $H_m = 101 \text{ A/м}$

Напряженность магнитного поля в точке n определяется током I_3 (рис.136).

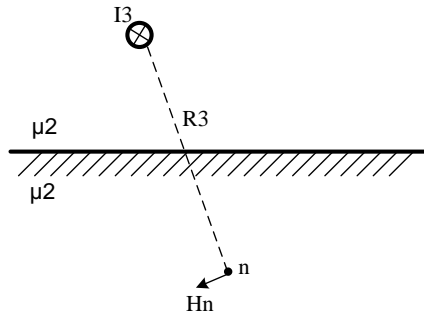


Рисунок 136

$$H_n = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{0,02}{6,28 \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 0,0715 \text{ A/м}$$

Задача 124. На длинный каркас диаметром $D=2\text{см}$ уложена однослойная обмотка (виток к витку) из проволоки диаметром $d=0.1\text{мм}$.

Определить магнитный поток Φ , создаваемый таким соленоидом при токе $I=0.5\text{А}$.

Решение

Магнитный поток, пронизывающий площадь сечения соленоида равен

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции \vec{B} и вектором магнитного момента \vec{P}_M .

Т.к. они в нашем случае совпадают $\cos \alpha = 1$.

$$\text{Но } B = \mu_0 I \cdot n; \quad S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Учитывая, что $n = 1/d$, получим

$$\Phi = \mu_0 \frac{I}{d} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{0,5\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 1,97 \cdot 10^{-6} \text{ вб}.$$

Задача 125. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника (рис.137) течет постоянный ток $I=20\text{А}$. Длина стороны шестиугольника $a=10\text{см}$. Определить индукцию в центре шестиугольника.

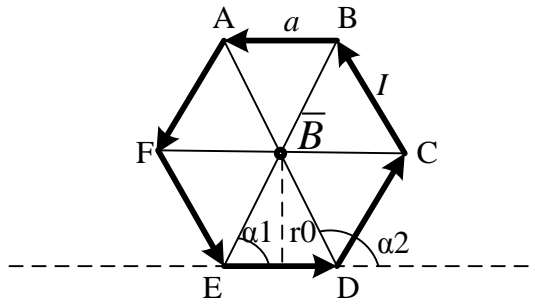


Рисунок 137

Решение

Индукция магнитного поля от каждого участка AB; BC; CD; DE; EF и FA в центре шестиугольника будет направлена к нам перпендикулярно плоскости чертежа. На основании принципа суперпозиции

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 + \vec{B}_5 + \vec{B}_6 = 6\vec{B}_1$$

Магнитная индукция B_1 , создаваемая отрезком прямолинейного провода с током, выражается формулой: $\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$.

Т.к. шестиугольник правильный, то

$$r_0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \alpha_1 = 60^\circ; \alpha_2 = 120^\circ$$

$$B_1 = \frac{2\mu_0 I}{4\pi a\sqrt{3}} (\cos 60^\circ - \cos 120^\circ) = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{4\pi \cdot 0,1\sqrt{3}} (0,5 - (-0,5)) = 2,31 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$$

$$\text{Тогда } B = 6 \cdot 2,31 \cdot 10^{-5} = 1,38 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$$

Задача 126. Найти разность скалярных магнитных потенциалов между точками А и В (рис.138), расположенными в магнитном поле линейного тока $I=10\text{А}$.

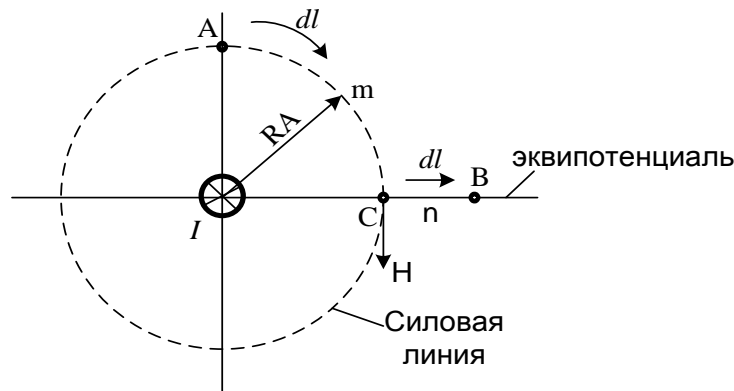


Рисунок 138

Решение

$$U_{MAB} = \int_A^B \bar{H} dl = \int_{\text{По пути AmC}} \bar{H} d\bar{l} + \int_{\text{По пути CnB}} \bar{H} d\bar{l}$$

$$\int_{AmC} \bar{H} dl = H \int dl = \frac{I}{2\pi R_A} \cdot \frac{2\pi R_A}{4} = \frac{I}{4}$$

$$\int_{CnB} \bar{H} d\bar{l} = 0 \text{ т.к. угол между } \bar{H} \text{ и } d\bar{l} = 90^\circ$$

$$U_{MAB} = I / 4 = 2.5A$$

Задача 127. Вдоль трубы с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 протекает постоянный ток I (рис.139). Вывести формулы для напряженности H внутри трубы, в теле трубы и снаружи трубы.

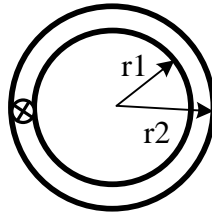


Рисунок 139

Решение

1. Если провести окружность радиусом $r < r_1$ с центром на оси трубы, то она не охватит тока. Поэтому при $r \leq r_1$ $H=0$, т.е. во внутренней полости трубы магнитное поле отсутствует.

2. Плотность тока в трубе

$$\delta = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

Окружность радиусом $r_1 \leq r \leq r_2$ охватывает ток $\delta\pi(r_2^2 - r_1^2)$. Поэтому в этом интервале изменений r

$$H = \frac{I(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi r(r_2^2 - r_1^2)}$$

Снаружи трубы при $r \geq r_2$ напряженность поля убывает по гиперболическому закону

$H = \frac{I}{2\pi r}$. Таким образом, график $H = f(r)$ имеет вид (рис. 140).

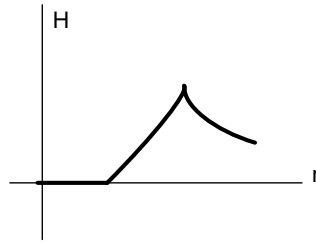


Рисунок 140

Литература

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник.- М.: Юрайт, 2013.- (Бакалавр).
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: учебник.- М.: Юрайт, 2013.- (Бакалавр).
3. Евдокимов Ф. Е. Теоретические основы электротехники: Учебник. Рек. МО РФ. - 9-е изд., стереотип. - М.:Изд. центр Академия,2004. - 560с. - (Среднее профессиональное образование). - с556
4. Белов Н. В. Электротехника и основы электроники: учебное пособие.- СПб.: Лань, 2012.