

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
к самостоятельной работе студентов по дисциплине  
«Основы экспериментальных исследований»

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника  
Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов  
Год начала обучения 2022

**(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)**

Невинномысск, 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Подготовка к практическим занятиям.....	4
3 Самостоятельное изучение темы. Конспект .....	5
4 Требования к реферату .....	6

## Введение

Методические указания предназначены для студентов направления Направление подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника - Электропривод и автоматика. Они содержат рекомендации по организации самостоятельных работ студента на направления 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника - Электропривод и автоматика.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями ФГОС ВО в части содержания и уровня подготовки выпускников направления 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника - Электропривод и автоматика.

В результате должна быть освоены компетенция

Код	Формулировка
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
ПК -1	Способен участвовать в планировании, подготовке и выполнении типовых экспериментальных исследований по заданной методике и обрабатывать результаты экспериментов

Знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
<b>Знать:</b> знает как осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>УК-1</b>
<b>Знать:</b> как участвовать в планировании, подготовке и выполнении типовых экспериментальных исследований по заданной методике и обрабатывать результаты экспериментов	<b>ПК-1</b>
<b>Уметь:</b> осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>УК-1</b>
<b>Учеет:</b> участвовать в планировании, подготовке и выполнении типовых экспериментальных исследований по заданной методике и обрабатывать результаты экспериментов	<b>ПК-1</b>
<b>Владеть:</b> владеет методикой осуществления поиска, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>УК-1</b>
<b>Владеет:</b> методами и навыками участия в планировании, подготовке и выполнении типовых экспериментальных исследований по заданной методике и обрабатывать результаты экспериментов	<b>ПК-1</b>

Составитель

канд. техн. наук Э.Е. Тихонов

Ответственный редактор

канд. техн. наук Д.В. Болдырев

## 1 Подготовка к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по рассмотренному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться студентом на лабораторных занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Подготовку к каждому практическому занятию студент должен начать с ознакомления с методическими указаниями, которые включают содержание работы. Тщательное продумывание и изучение вопросов основывается на проработке текущего материала лекции, а затем изучения обязательной и дополнительной литературы, рекомендованную к данной теме. На основе индивидуальных предпочтений студенту необходимо самостоятельно выбрать тему доклада по проблеме и по возможности подготовить по нему презентацию.

Если программой дисциплины предусмотрено выполнение практического задания, то его необходимо выполнить с учетом предложенной инструкции (устно или письменно). Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса. Результат такой работы должен проявиться в способности студента свободно ответить на теоретические вопросы семинара, его выступлении и участии в коллективном обсуждении вопросов изучаемой темы, правильном выполнении практических заданий и контрольных работ.

В зависимости от содержания и количества отведенного времени на изучение каждой темы практическое занятие может состоять из четырех-пяти частей:

1. Обсуждение теоретических вопросов, определенных программой дисциплины.
2. Доклад и/ или выступление с презентациями по выбранной проблеме.
3. Обсуждение выступлений по теме – дискуссия.
4. Выполнение практического задания с последующим разбором полученных результатов или обсуждение практического задания.
5. Подведение итогов занятия.

Первая часть – обсуждение теоретических вопросов – проводится в виде фронтальной беседы со всей группой и включает выборочную проверку преподавателем теоретических знаний студентов. Примерная продолжительность — до 15 минут. Вторая

часть — выступление студентов с докладами, которые должны сопровождаться презентациями с целью усиления наглядности восприятия, по одному из вопросов практического занятия. Обязательный элемент доклада – представление и анализ статистических данных, обоснование социальных последствий любого экономического факта, явления или процесса. Примерная продолжительность — 20-25 минут. После докладов следует их обсуждение – дискуссия. В ходе этого этапа практического занятия могут быть заданы уточняющие вопросы к докладчикам. Примерная продолжительность – до 15-20 минут. Если программой предусмотрено выполнение практического задания в рамках конкретной темы, то преподавателями определяется его содержание и дается время на его выполнение, а затем идет обсуждение результатов. Подведением итогов заканчивается практическое занятие.

В процессе подготовки к практическим занятиям, студентам необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у студентов свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет студентам проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

### 3 Самостоятельное изучение темы. Конспект

Конспект – наиболее совершенная и наиболее сложная форма записи. Слово «конспект» происходит от латинского «conspectus», что означает «обзор, изложение». В правильно составленном конспекте обычно выделено самое основное в изучаемом тексте, сосредоточено внимание на наиболее существенном, в кратких и четких формулировках обобщены важные теоретические положения.

Конспект представляет собой относительно подробное, последовательное изложение содержания прочитанного. На первых порах целесообразно в записях ближе держаться тексту, прибегая зачастую к прямому цитированию автора. В дальнейшем, по мере выработки навыков конспектирования, записи будут носить более свободный и сжатый характер.

Конспект книги обычно ведется в тетради. В самом начале конспекта указывается фамилия автора, полное название произведения, издательство, год и место издания. При цитировании обязательная ссылка на страницу книги. Если цитата взята из собрания сочинений, то необходимо указать соответствующий том. Следует помнить, что четкая ссылка на источник – неперемutable правило конспектирования. Если конспектируется статья, то указывается, где и когда она была напечатана.

Конспект подразделяется на части в соответствии с заранее продуманным планом. Пункты плана записываются в тексте или на полях конспекта. Писать его рекомендуется четко и разборчиво, так как небрежная запись с течением времени становится малопонятной для ее автора. Существует правило: конспект, составленный для себя, должен быть по возможности написан так, чтобы его легко прочитал и кто-либо другой.

Формы конспекта могут быть разными и зависят от его целевого назначения (изучение материала в целом или под определенным углом зрения, подготовка к докладу, выступлению на занятии и т.д.), а также от характера произведения (монография, статья, документ и т.п.). Если речь идет просто об изложении содержания работы, текст конспекта может быть сплошным, с выделением особо важных положений подчеркиванием или различными значками.

В случае, когда не ограничиваются переложением содержания, а фиксируют в конспекте и свои собственные суждения по данному вопросу или дополняют конспект соответствующими материалами их других источников, следует отводить место для такого рода записей. Рекомендуется разделить страницы тетради пополам по вертикали и в левой части вести конспект произведения, а в правой свои дополнительные записи, совмещая их по содержанию.

Конспектирование в большей мере, чем другие виды записей, помогает вырабатывать навыки правильного изложения в письменной форме важные теоретических и практических вопросов, умение четко их формулировать и ясно излагать своими словами.

Таким образом, составление конспекта требует вдумчивой работы, затраты времени и труда. Зато во время конспектирования приобретаются знания, создается фонд записей.

Конспект может быть текстуальным или тематическим. В текстуальном конспекте сохраняется логика и структура изучаемого произведения, а запись ведется в соответствии с расположением материала в книге. За основу тематического конспекта берется не план произведения, а содержание какой-либо темы или проблемы.

Текстуальный конспект желательно начинать после того, как вся книга прочитана и продумана, но это, к сожалению, не всегда возможно. В первую очередь необходимо составить план произведения письменно или мысленно, поскольку в соответствии с этим планом строится дальнейшая работа. Конспект включает в себя тезисы, которые составляют его основу. Но, в отличие от тезисов, конспект содержит краткую запись не только выводов, но и доказательств, вплоть до фактического материала. Иначе говоря, конспект – это расширенные тезисы, дополненные рассуждениями и доказательствами, мыслями и соображениями составителя записи.

Как правило, конспект включает в себя и выписки, но в него могут войти отдельные места, цитируемые дословно, а также факты, примеры, цифры, таблицы и схемы, взятые из книги. Следует помнить, что работа над конспектом только тогда будет творческой, когда она не ограничена текстом изучаемого произведения. Нужно дополнять конспект данными из другими источниками.

В конспекте необходимо выделять отдельные места текста в зависимости от их значимости. Можно пользоваться различными способами: подчеркиваниями, вопросительными и восклицательными знаками, репликами, краткими оценками, писать на полях своих конспектов слова: «важно», «очень важно», «верно», «характерно».

В конспект могут помещаться диаграммы, схемы, таблицы, которые придадут ему наглядность.

Составлению тематического конспекта предшествует тщательное изучение всей литературы, подобранной для раскрытия данной темы. Бывает, что какая-либо тема рассматривается в нескольких главах или в разных местах книги. А в конспекте весь материал, относящийся к теме, будет сосредоточен в одном месте. В плане конспекта рекомендуется делать пометки, к каким источникам (вплоть до страницы) придется обратиться для раскрытия вопросов. Тематический конспект составляется обычно для того, чтобы глубже изучить определенный вопрос, подготовиться к докладу, лекции или выступлению на семинарском занятии. Такой конспект по содержанию приближается к реферату, докладу по избранной теме, особенно если включает и собственный вклад в изучение проблемы.

#### 4 Требования к реферату

##### Общие положения

Реферат это одна из форм устной итоговой аттестации. Реферат – это самостоятельная исследовательская работа, в которой автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее.

Содержание реферата должно быть логичным; изложение материала носит проблемно-тематический характер.

### Цель

Реферат как форма промежуточной (итоговой) аттестации стимулирует раскрытие исследовательского потенциала магистра, способность к творческому поиску, сотрудничеству, самораскрытию и проявлению возможностей.

### Требования к реферату

Автор реферата должен продемонстрировать достижение им уровня мировоззренческой, общекультурной компетенции, т.е. продемонстрировать знания о реальном мире, о существующих в нем связях и зависимостях, проблемах, о ведущих мировоззренческих теориях, умении проявлять оценочные знания, изучать теоретические работы, использовать различные методы исследования, применять различные приемы творческой деятельности.

1. Необходимо правильно сформулировать тему, отобрать по ней необходимый материал.
2. Использовать только тот материал, который отражает сущность темы.
3. Во введении к реферату необходимо обосновать выбор темы.
4. После цитаты необходимо делать ссылку на автора, например [№произведения по списку, стр.].
5. Изложение должно быть последовательным. Недопустимы нечеткие формулировки, речевые и орфографические ошибки.
6. В подготовке реферата необходимо использовать материалы современных изданий не старше 5 лет.
7. Оформление реферата (в том числе титульный лист, литература) должно быть грамотным.
8. Список литературы оформляется с указанием автора, названия источника, места издания, года издания, названия издательства, использованных страниц.

### Требования к оформлению реферата

Изложение текста и оформление реферата выполняют в соответствии с требованиями ГОСТ 7.32 – 2001, ГОСТ 2.105 – 95 и ГОСТ 6.38 – 90. Страницы текстовой части и включенные в нее иллюстрации и таблицы должны соответствовать формату А4 по ГОСТ 9327-60.

Реферат должен быть выполнен любым печатным способом на пишущей машинке или с использованием компьютера и принтера на одной стороне бумаги формата А4 через полтора интервала. Цвет шрифта должен быть черным, высота букв, цифр и других знаков не менее 1.8 (шрифт Times New Roman, 14 пт.).

Текст следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: верхнее и нижнее — 20 мм, левое — 30 мм, правое — 10 мм. Абзацный отступ должен быть одинаковым по всему тексту и составлять 1,25 см.

Выравнивание текста по ширине.

Разрешается использовать компьютерные возможности акцентирования внимания на определенных терминах, формулах, применяя выделение жирным шрифтом, курсив, подчеркивание.

Перенос слов недопустим.

Точку в конце заголовка не ставят. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой.

Подчеркивать заголовки не допускается.

Расстояние между заголовками раздела, подраздела и последующим текстом так же, как и расстояние между заголовками и предыдущим текстом, должно быть равно 15мм (2 пробела).

Название каждой главы и параграфа в тексте работы можно писать более крупным шрифтом, жирным шрифтом, чем весь остальной текст. Каждая глава начинается с новой страницы, параграфы (подразделы) располагаются друг за другом.

В тексте реферат рекомендуется чаще применять красную строку, выделяя законченную мысль в самостоятельный абзац.

Перечисления, встречающиеся в тексте реферата, должны быть оформлены в виде маркированного или нумерованного списка.

Все страницы обязательно должны быть пронумерованы. Нумерация листов должна быть сквозной. Номер листа проставляется арабскими цифрами.

Нумерация листов начинается с третьего листа (после содержания) и заканчивается последним. На третьем листе ставится номер «3».

Номер страницы на титульном листе не проставляется.

Номера страниц проставляются в центре нижней части листа без точки. Список использованной литературы и приложения включаются в общую нумерацию листов.

Рисунки и таблицы, расположенные на отдельных листах, включают в общую нумерацию листов и помещают по возможности следом за листами, на которых приведены ссылки на эти таблицы или иллюстрации. Таблицы и иллюстрации нумеруются последовательно арабскими цифрами сквозной нумерацией. Допускается нумеровать рисунки и таблицы в пределах раздела. В этом случае номер таблицы (рисунка) состоит из номера раздела и порядкового номера таблицы, разделенных точкой.

Оформление литературы осуществляется с учетом требования ГОСТ.

Все источники, включенные в библиографию, должны быть последовательно пронумерованы и расположены в следующем порядке:

- законодательные акты;
- постановления Правительства;
- нормативные документы;
- статистические материалы;
- научные и литературные источники – в алфавитном порядке по первой букве фамилии автора.

В конце работы размещаются приложения. В тексте на все приложения должны быть даны ссылки. Каждое приложение следует начинать с новой страницы с указанием наверху посередине страницы слова «Приложение» и его номера. Приложение должно иметь заголовок, который записывают симметрично относительно текста с прописной буквы отдельной строкой.

#### Критерии оценок рефератов учащихся на итоговой аттестации

##### Критерии оценки:

- Актуальность темы
- Соответствие содержания теме
- Глубина проработки материала
- Правильность и полнота использования источников
- Соответствие оформления реферата стандартом.

##### *На «отлично»:*

1. присутствие всех вышеперечисленных требований;
2. знание учащимся изложенного в реферате материала, умение грамотно и аргументировано изложить суть проблемы;
3. присутствие личной заинтересованности в раскрываемой теме, собственную точку зрения, аргументы и комментарии, выводы;

4. умение свободно беседовать по любому пункту плана, отвечать на вопросы, поставленные членами комиссии, по теме реферата;

5. умение анализировать фактический материал и статистические данные, использованные при написании реферата;

6. наличие качественно выполненного презентационного материала или (и) раздаточного, не дублирующего основной текст защитного слова, а являющегося его иллюстративным фоном.

Т.е. при защите реферата показать не только «знание - воспроизведешь», но и «знание - понимание», «знание - умение».

*На «хорошо»:*

1. мелкие замечания по оформлению реферата;
2. незначительные трудности по одному из перечисленных выше требований.

*На «удовлетворительно»:*

1. тема реферата раскрыта недостаточно полно;
2. неполный список литературы и источников;
3. затруднения в изложении, аргументировании.

Порядок подготовки к защите реферата

Работа сдается руководителю не позже чем за 1 месяц до срока зачета с оценкой. Руководитель готовит рецензию, решает вопрос о допуске к защите реферата. Окончательное решение о допуске к защите реферата как формы аттестации принимает педагогический совет.

**Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**  
**Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения**  
**дисциплины (модуля)**

**Перечень основной литературы:**

- 1 Баландина, Н. В. Основы экспериментальных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. В. Баландина. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2015. — 113 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/62983.html>
- 2 Шустрова, М. Л. Основы планирования экспериментальных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие / М. Л. Шустрова, А. В. Фафурин. — Электрон. текстовые данные. — Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2016. — 84 с. — 978-5-7882-1924-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/62523.html>

**Перечень дополнительной литературы:**

- 1 Афоничев, Д. Н. Основы научных исследований в электроэнергетике [Электронный ресурс] : учебное пособие / Д. Н. Афоничев. — Электрон. текстовые данные. — Воронеж : Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2016. — 205 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/72725.html>
- 2 Ли, Р. И. Основы научных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие / Р. И. Ли. — Электрон. текстовые данные. — Липецк : Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2013. — 190 с. — 978-5-88247-600-6. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/22903.html>
- 3 Кузнецов, И. Н. Основы научных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие для бакалавров / И. Н. Кузнецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Дашков и К, 2017. — 283 с. — 978-5-394-02783-3. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/60483.html>

**Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

- 1 Методические указания для практических работ по дисциплине «Основы экспериментальных исследований» Направление подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника Направленность (профиль) "Электропривод и автоматика", Невинномысск, 2021 г.
- 2 Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Основы экспериментальных исследований» Направление подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника Направленность (профиль) "Электропривод и автоматика", Невинномысск, 2021 г.

**10.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля):**

- 1 <http://biblioclub.ru/> — ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
- 2 <http://catalog.ncstu.ru/> — электронный каталог ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО.
- 3 <http://window.edu.ru/> — единое окно доступа к образовательным ресурсам.
- 4 <http://www.exponenta.ru/> — образовательный математический сайт для студентов.
- 5 <http://www.iprbookshop.ru> - Электронная библиотечная система

## **Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

При чтении лекций используется компьютерная техника, демонстрации презентационных мультимедийных материалов.

Выполнение практических работ осуществляется в компьютерных классах с использованием компьютерной техники

### ***Информационно-справочные системы:***

1. Справочная правовая система КонсультантПлюс — это компьютерная система для поиска и работы с правовой информацией — <http://www.consultant.ru/>
2. Гарант — справочно-правовая система по законодательству Российской Федерации, комплексное и взаимосвязанное информационно-правовое обеспечение, которое поможет при решении любого вопроса — <http://www.garant.ru/>
3. «Техэксперт» — профессиональные справочные системы для руководителей, инженеров и специалистов — <http://техэксперт.рус/>

### ***Профессиональные базы данных:***

1. Министерство энергетики РФ. Разделы: деятельность, законодательство, статистика, пресс-центр, контакты — <https://minenergo.gov.ru/>
2. Известия высших учебных заведений энергетических объединений СНГ. Энергетика В журнале публикуются статьи по вопросам общей энергетики, электроэнергетики, теплоэнергетики, энергетического строительства, экологическим проблемам энергетики. В журнале публикуются результаты фундаментальных исследований и передовых достижений практики, обзоры литературы по широкому спектру вопросов энергетики — <http://energy.bntu.by/>
3. Энергетика. Электротехника. Энергоремонт. Новостной портал об энергетике, электротехнике, энергоремонте. Ресурс содержит аналитические, исторические и справочные материалы, пресс-релизы и обзоры прессы — <http://madenergy.ru/>
4. База данных Международного общества логистики (SOLE) — <http://www.sole.org/>
5. Министерство промышленности и торговли Российской Федерации (Минпромторг России) — <http://www.minpromtorg.gov.ru/>
6. IT-GOST.RU – электронная библиотека стандартов оформления проектной документации — <http://it-gost.ru>
7. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации (Минобрнауки России) — <http://www.minobrnauki.gov.ru>

## **Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
---	---	--

<p>Аудитория № 415 «Аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации»</p>	<p>доска меловая – 1 шт., стол преподавателя – 1 шт., стул преподавателя – 1 шт., кафедра – 1 шт., ученический стол-парта – 17 шт., демонстрационное оборудование: проектор переносной, экран, ноутбук.</p>	<p>Microsoft Windows 7 Профессиональная Программа DreamSpark Premium Electronic Software Delivery (3 years), Сублицензионный договор №55986/PHД5195 от 01.09.2016. Microsoft Office стандартный 2013 OPEN 91904295ZZE1505, 61907927 Дата окончания OPEN 99634054ZZE2002 Open Li- cense 69398326 2020-02-29</p>
<p>Аудитория № 322 «Лаборатория корпоративных информационных систем»</p>	<p>доска меловая – 1 шт., стол преподавателя – 1 шт., стул преподавателя – 1 шт., комплект ученической мебели – 4 шт., стол компьютерный – 13 шт., АРМ с выходом в Интернет – 13 шт., демонстрационное оборудование: проектор, экран на штативе.</p>	<p>Microsoft Windows 7 Профессиональная Программа DreamSpark Premium Electronic Software Delivery (3 years), Сублицензионный договор №55986/PHД5195 от 01.09.2016. Microsoft Office стандартный 2013 OPEN 91904295ZZE1505, 61907927 Дата окончания OPEN 99634054ZZE2002 Open Li- cense 69398326 2020-02- 29.МАТНЛАВ ЛИЦЕНЗИЯ № 920056 Autocad 2017 основная лицензия 561- 981143 КОМПАС-3D лицензионное соглашение от 09.12.2013 №096A13 AnyLogic 7 id order 2843- 4902-9569-4754 Microsoft Visio профессиональный 2013 Программа DreamSpark Premium Electronic Software Delivery (3 years), Сублицензионный договор №55986/PHД5195 от 01.09.2016г.</p>
<p>Аудитория № 321 «Помещение для самостоятельной работы обучающихся»</p>	<p>доска меловая – 1 шт., стол преподавателя – 1 шт., стул преподавателя – 1 шт., стол одностумбовый – 1 шт., стол ученический (3х-местный) – 4 шт., стул офисный – 27 шт., стол компьютерный – 12 шт., АРМ с вы-ходом в Интернет – 11 шт., шкаф для документов – 3 шт., шкаф офисный – 1 шт.,</p>	<p>Microsoft Windows 7 Профессиональная Программа DreamSpark Premium Electronic Software Delivery (3 years), Сублицензионный договор №55986/PHД5195 от 01.09.2016. Microsoft Office стандартный 2013 OPEN 91904295ZZE1505, 61907927</p>

	демонстрационное оборудование: проектор переносной, экран, ноутбук.	Дата окончания OPEN 99634054ZZE2002 Open License 69398326 2020-02-29. MATHLAB ЛИЦЕНЗИЯ № 920056 Autocad 2017 основная лицензия 561-981143 КОМПАС-3D лицензионное соглашение от 09.12.2013 №096A13 AnyLogic 7 id order 2843-4902-9569-4754 Microsoft Visio профессиональный 2013 Программа DreamSpark Premium Electronic Software Delivery (3 years), Сублицензионный договор №55986/РНД5195 от 01.09.2016г.г.
Аудитория № 315 «Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования»	набор инструментов для профилактического обслуживания учебного оборудования, комплектующие для компьютерной и офисной техники	

### **Особенности освоения дисциплины (модуля) лицами с ограниченными возможностями здоровья**

Обучающимся с ограниченными возможностями здоровья предоставляются специальные учебники, учебные пособия и дидактические материалы, специальные технические средства обучения коллективного и индивидуального пользования, услуги ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, а также услуги сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

Освоение дисциплины (модуля) обучающимися с ограниченными возможностями здоровья может быть организовано совместно с другими обучающимися, а так же в отдельных группах.

Освоение дисциплины (модуля) обучающимися с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья.

В целях доступности получения высшего образования по образовательной программе лицами с ограниченными возможностями здоровья при освоении дисциплины (модуля) обеспечивается:

- 1) для лиц с ограниченными возможностями здоровья по зрению:
  - присутствие ассистента, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе, записывая под диктовку),
  - письменные задания, а также инструкции о порядке их выполнения оформляются увеличенным шрифтом,
  - специальные учебники, учебные пособия и дидактические материалы (имеющие крупный шрифт или аудиофайлы),
  - индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс,

- при необходимости студенту для выполнения задания предоставляется увеличивающее устройство;

2) для лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху:

- присутствие ассистента, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (помогает занять рабочее место, передвигаться, прочесть и оформить задание, в том числе, записывая под диктовку),

- обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости обучающемуся предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- обеспечивается надлежащими звуковыми средствами воспроизведения информации;

3) для лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата (в том числе с тяжелыми нарушениями двигательных функций верхних конечностей или отсутствием верхних конечностей):

- письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;

- по желанию студента задания могут выполняться в устной форме.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПРАКТИКУМ  
по дисциплине  
«Основы экспериментальных исследований»  
для студентов направления  
13.03.02 Электроэнергетика и  
электротехника  
Электропривод и автоматика промышленных установок и  
технологических комплексов  
Год начала обучения 2022

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

Невинномысск 2022

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 ЧАСТЬ 1. ОЦЕНКА ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ.....	5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ .....	17
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРЕМЕНТА ВТОРОГО ПОРЯДКА .....	28
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ ДВУМЕРНЫХ СЕЧЕНИЙ .....	35
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	41

## Введение

Развитие общества в значительной степени определяется уровнем наукоемких технологий, многочисленные направления которых основаны на достижениях соответствующих отраслей естествознания. Современное естествознание обладает большим многообразием методов исследований, среди которых эксперимент — наиболее эффективное и действенное средство познания.

Многие великие открытия стали возможными только благодаря экспериментальному исследованию. Вот почему, знания об основных принципах данного метода научного познания так важны и необходимы.

Во время освоения практических занятий происходит освоение следующих компетенций:

Код	Формулировка
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
ПК-1	Способен участвовать в планировании, подготовке и выполнении типовых экспериментальных исследований по заданной методике и обрабатывать результаты экспериментов

## Практическая работа №1 Часть 1. Оценка ошибок измерений

**Целью работы** является оценка ошибок измерений, возникающих при выполнении опытов в научных исследованиях, изучение методов расчета статистических характеристик случайных величин, а также методики применения статистических критериев для проверки гипотез и отыскания доверительных границ.

### Теоретическое описание работы

В экспериментальных исследованиях необходимо знать и уметь рассчитывать ошибки измерений.

Численное значение физической величины получается в результате ее измерения, то есть сравнения ее с другой величиной того же рода, принятой за единицу.

Ошибкой измерения называется разность  $x_i - x_0$  между результатом измерения  $x_i$  и истинным значением  $x_0$  измеряемой величины.

Одной из важнейших задач математической обработки результатов опытов как раз и является оценка истинного значения измеряемой величины. Обычно неизвестно значение ошибок и истинного значения величины. Поэтому, ставится задача вычисления  $x_0$  с минимальной ошибкой.

В зависимости от способа измерения ошибки подразделяют на прямые и косвенные.

Прямые – это те, которые получают непосредственно из опытных данных. Косвенные – получают по результатам прямых измерений путем вычисления по аналитическим выражениям. Например, определение мощности электрического тока по данным измерений тока и напряжения сети.

В данной работе рассматриваются только прямые измерения. Ошибки измерений классифицируются на 3 вида:

1. **Грубые ошибки** или **промахи** – это ошибки, являющиеся результатом низкой квалификации лица, производящего измерения, его

небрежности или неожиданных сильных внешних воздействий на измерения. Промахи исключаются из обработки результатов после аналитической проверки.

2. **Систематические ошибки** вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Например, после проведения серии измерений обнаруживается неправильная регулировка прибора на нулевую отметку.

В случае систематических ошибок их обнаруживают и вводят коррекцию в результаты наблюдений. Однако полностью эти ошибки всегда исключить не удастся.

3. **Случайные ошибки** измерения вызываются большим количеством таких факторов, эффекты действия которых столь незначительны, что их нельзя учесть в отдельности. Случайную ошибку можно рассматривать как суммарный эффект действия таких факторов. Случайные ошибки являются неустранимыми, но с помощью методов теории вероятностей их можно учесть и внести соответствующие поправки к истинному значению.

Если измерения выполняются неоднократно, то их результаты обозначим  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n = 1, 2, \dots, i$ ), тогда разности  $\Delta x_i = x_i - x_0$  называются **абсолютной ошибкой**.

Качество результатов измерений удобно характеризовать не абсолютной, а **относительной** ошибкой, которая равняется отношению абсолютной ошибки к истинному значению измеряемой величины в процентах, то есть:

$$\frac{\Delta x_i}{x_0} * 100, \%$$

При измерениях физических величин, когда основную роль играют случайные ошибки, все оценки точности измерений можно сделать только с некоторой вероятностью. При этом часть ошибок будет положительной, часть – отрицательной, что очень неудобно.

Поэтому, ошибки измерений рассматривают как случайную величину в статистической совокупности.

**Статистическая совокупность** – это совокупность значений случайной переменной, которые получены в результате измерений и на практике исследователь всегда располагает лишь ограниченным числом значений случайной величины, представляющим собой некоторую выборку из **генеральной совокупности**.

По выборке могут быть рассчитаны **выборочные статистические характеристики** (выборочное среднее, выборочная дисперсия и т.п.), которые являются **оценками** соответствующих генеральных статистических характеристик (параметров).

Математическая статистика предъявляет к оценкам требования состоятельности, несмещенности и эффективности.

Оценка называется **состоятельной**, если с увеличением объема выборки она стремится (по вероятности) к оцениваемому параметру.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно оцениваемому параметру.

Оценка называется **эффективной**, если ее дисперсия минимально возможная из всех возможных оценок.

Для оценки истинного значения физической величины принимается ее среднее арифметическое значение, определяемое по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.1)$$

где  $n$  - число повторностей опыта (число измерений).

В математической статистике доказано, что в большинстве случаев случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения.

Для оценки случайной ошибки измерений существует несколько способов. Наиболее распространена оценка с помощью среднего квадратичного отклонения (стандарта), определяемая по формуле:

$$s_i = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (1.2)$$

Квадрат этой величины называется дисперсией измерений. Дисперсию, а затем и среднюю квадратическую ошибку при работе на

клавишных вычислительных машинах удобнее рассчитывать по алгебраически эквивалентной формуле, которую можно получить разложением суммы квадратов  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2 + x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2 + \\ &\dots + x_n^2 - 2x_n\bar{x} + \bar{x}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (\bar{x}^2 + \\ &\bar{x}^2 + \dots + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2\sum_{i=1}^n x_i}{n} \sum_{i=1}^n x_i + n \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \end{aligned}$$

Тогда

$$s_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2/n}{n-1} \quad (1.3)$$

В приведенных формулах необходимо учитывать, что при вычислении оценки дисперсии величина  $x$  принимается с тем же количеством значащих цифр, что и величины  $x_i$ .

Пусть  $\alpha$  означает вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину, не большую, чем  $\Delta x$ . Это принято записывать в виде:

$$P(\bar{x} - \Delta x < x_0 < \bar{x} + \Delta x) = \alpha$$

Вероятность  $\alpha$  называется доверительной вероятностью или коэффициентом надежности. Интервал  $\bar{x} - \Delta x$  до  $\bar{x} + \Delta x$  называется доверительным интервалом.

Чем большей надежности мы требуем, тем большим получается доверительный интервал и наоборот: чем больше доверительный интервал мы задаем, тем вероятнее, что результаты измерений не выйдут за его пределы.

Таким образом, приходим к очень важному заключению: для характеристики случайной ошибки необходимо задать два числа, а именно: величину самой ошибки (или доверительного интервала) и величину

доверительной вероятности. Задание величины ошибки без доверительной вероятности не имеет смысла, так как имеется неопределенность в обозначении границ изменения случайной величины (ошибки).

### Статистическая проверка гипотез

Под статистическими гипотезами понимаются некоторые предположения относительно значений генеральных статистических характеристик и генеральных распределений вероятности.

Проверка гипотезы заключается в сопоставлении некоторых статистических показателей, критериев проверки, вычисляемых по данным выборки, со значениями этих показателей, определенными теоретически в предположении, что проверяемая гипотеза верна.

Для критериев проверки выбираются надлежащие уровни значимости  $q$  ( $= 10\%$ ,  $5\%$ ,  $2\%$  и т.д.), отвечающие событиям, которые при проводимых исследованиях считаются (с некоторым риском) практически невозможными. Следующим этапом является определение критической области применяемого критерия, вероятность попадания в которую в случае, если гипотеза верна, в точности равна уровню значимости.

Если  $q$  - уровень значимости, то вероятность попадания в область допустимых значений равна

$$1 - \frac{q}{100}$$

**Статистические критерии** являются правилами, которые позволяют делать выводы о свойствах параметров генеральной совокупности, с принятым уровнем значимости, на основании информации, полученной по данным выборок.

Рассмотрим те из них, которые наиболее часто применяются в теории планирования эксперимента (ТПЭ).

1.  **$t$  – критерий Стьюдента** применяется, когда необходимо сделать

вывод, равно ли математическое ожидание

$M\{x\}$  генеральной совокупности

некоторому предполагаемому значению  $C$ , или когда нужно построить доверительный интервал для

$M\{x\}$ .

Доказано, что случайная величина

$$t = \sqrt{N} \frac{\bar{x} - M\{x\}}{s\{x\}} = \frac{\bar{x} - M\{x\}}{s\{\bar{x}\}} \quad (1.4)$$

распределена по закону Стьюдента, если распределение  $x$  нормально.

Здесь  $N$  - объем выборки;  $s\{x\}$  - среднее квадратическое отклонение, случайной величины  $x$ .

$s\{\bar{x}\}$  – среднее квадратическое отклонение среднего  $s\{\bar{x}\} = \frac{s\{x\}}{\sqrt{N}}$

На рисунке 1.1 показаны кривые дифференциального закона распределения  $\varphi(t)$  для различных степеней свободы  $f = N - 1$ , по которым вычисляется несмещенная оценка дисперсии  $s^2\{x\}$ . При  $N \rightarrow \infty$  кривая  $\varphi(t)$  приближается к кривой нормированного нормального распределения.

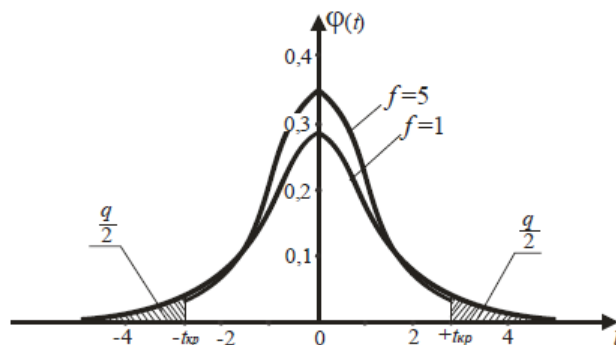


Рисунок 1.1 - Дифференциальные кривые t-распределения Стьюдента

Из рисунка 1.1 видно, что  $t$  – распределение симметрично относительно

$t = 0$ , поэтому в таблицах, где приводятся критические значения  $t_{кр} = t_{q,f}$  для принятого уровня значимости  $q$  и имеющегося числа степеней свободы  $f$ , задаются лишь положительные  $t_{кр}$  (приложение 1).

Если при расчете по формуле (1.4) окажется, что  $t < t_{кр}$ , то делается вывод, что гипотеза  $M\{x\} = C$  не противоречит результатам наблюдений при принятом уровне значимости  $q$ .

Расчет доверительного интервала выполняется по формуле:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} * t_{кр} * s\{x\} \quad (1.5)$$

2.  **$F$  – критерий Фишера** называется дисперсионным отношением, так как он формируется как отношение двух сравниваемых несмещенных оценок дисперсий:

$$F = \frac{s_1^2\{x\}}{s_2^2\{x\}} > 1 \quad (1.6)$$

причем в числитель ставится большая из двух дисперсий. Расчетное  $F$  сравнивается с критическим  $F_{кр} = F_{q,f_1,f_2}$ , где  $F_{q,f_1,f_2}$  находится из приложения 2 для степеней свободы:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{\text{числителя}} = N_1 - 1 \\ f_2 &= f_{\text{знаменателя}} = N_2 - 1 \end{aligned}$$

где  $N_1$  – число элементов выборки, по которым вычислена  $s_1^2\{x\}$ , а  $N_2$  – число элементов выборки, по которым получена  $s_2^2\{x\}$ , причем  $f_1$  – находится в горизонтальном заголовке таблицы, а  $f_2$  – слева в вертикальном заголовке, для принятого уровня значимости  $q$ .

На рисунке 1.2 показаны кривые  $F$  – распределения Фишера. Заштрихована область критических значений  $F$ .

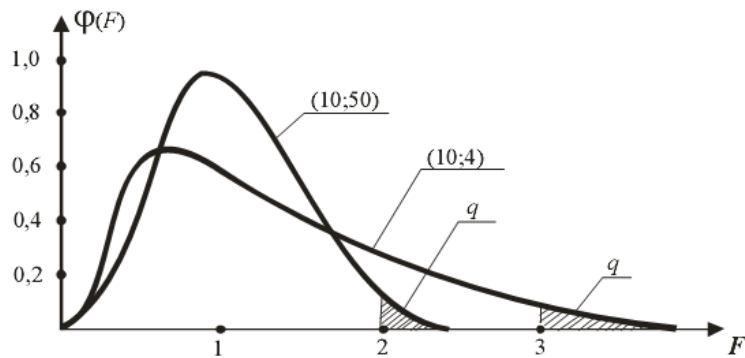


Рисунок 1.2 - Дифференциальные кривые  $F$ -распределения Фишера

При проверке нуль-гипотезы ( $\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0$ ) о равенстве двух генеральных дисперсий, вычисляется  $F$ , вычисляется  $F, s_1^2$  и  $s_2^2$  по данным выборок и сравнивается с табличным значением  $F_q(f_1, f_2)$ . Если найденное из наблюдений значение  $F$ -критерия оказывается меньше табличного,  $F_q(f_1, f_2)$ , то нуль-гипотеза о равенстве двух дисперсий не отвергается.

Когда с нуль-гипотезой конкурирует альтернативная гипотеза ( $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ), то принято отбрасывать нуль-гипотезу, если  $F$  расчетное превосходит верхнее критическое значение. При этом вся критическая область критерия будет отвечать уровню  $\frac{q}{100}$

Если вычисленное по уравнению (1.6)

$$F < F_{кр},$$

то принимается нуль-гипотеза о равенстве генеральных дисперсий  $\sigma_1^2\{x\} = \sigma_2^2\{x\}$ , при принятом уровне значимости.

3.  **$G$  – критерий Кохрена** применяется для оценки однородности несмещенных оценок дисперсий, вычисленных по одинаковому числу  $N$  наблюдений. Он формируется как отношение максимальной из сравниваемых дисперсий к сумме всех  $k$  – дисперсий:

$$G_{max} = \frac{s_1^2\{x\}_{max}}{\sum_{i=1}^k s_1^2\{x\}}$$

Если

$$G_{max} < G_{кр} = G_{q, f_1, f_2},$$

то выборочные дисперсии однородны.

Распределение  $G$  табулировано (таблица 3 приложения). Числа степеней свободы, по которым выбирается из таблиц  $G_{кр}$ , равны:

$$f_1 = f_{\text{числителя}} = N_1 - 1$$
$$f_2 = f_{\text{знаменателя}} = k$$

где  $f_1$  – число степеней свободы числителя;

$f_2$  – число степеней свободы знаменателя и определяется числом всех сравниваемых дисперсий.

### Порядок применения $G$ – критерия

1. По данным выборок вычисляются дисперсии  $s_k^2\{x\}$
2. Из всех дисперсий выбирается  $s^2\{x\}_{max}$
3. Вычисляется сумма  $\sum_1^k s_k^2\{x\}$
4. Рассчитывается эмпирическое  $G_{max} < G_{кр} == G_{q.f_1,f_2}$

Если это условие выполняется, то дисперсии однородны.

## Практическая работа №1 Часть 2. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению С

Часто встречающаяся задача статистической проверки гипотез заключается в том, что требуется определить равенство математического ожидания  $m_x$  какому-либо постоянному числу  $C$ , то есть  $m_x = C$ . Критерием проверки принимается величина

$$t = \sqrt{N} \left( \frac{\bar{x} - C}{s\{x\}} \right) \quad (1.7)$$

называемая  $t$  – критерием Стьюдента с  $f = N - 1$  степенями свободы, где  $N$  – объем выборки.

Если вычисленное значение  $t$  – критерия не превышает  $t_{кр} = t_{q, f}$ , найденного по таблице 1 приложения по заданному уровню значимости  $q$  и числу степеней свободы  $f$ , то исходная гипотеза  $m_x = C$  принимается.

### Определение необходимого числа повторностей опытов (объема выборки, числа параллельных опытов)

При обычных технических измерениях бывает достаточным принять доверительный интервал  $\Delta x = (0,05 \dots 0,1) \bar{x}$  и доверительную вероятность  $P = 0,95$ , а в ответственных случаях  $P = 0,99$ .

Если в распоряжении исследователя имеется значение среднего квадратичного отклонения  $s\{x\}$ , то необходимое число измерений определяется из  $\Delta x$  по формуле

$$N = \frac{t_{кр}^2 s^2\{x\}}{\Delta x^2} \quad (1.8)$$

где  $t_{кр}$  – критическое значение критерия Стьюдента, принятое по таблице 1 приложения с числом степеней свободы, с которым вычислена  $s^2\{x\}$  и принятом уровне значимости  $q$ .

## Исключение грубых ошибок (промахов)

Если в исследуемом ряду имеются сильно отклоняющиеся результаты наблюдений, то необходимо произвести проверку принадлежности подозреваемого измерения к исследуемому ряду.

Для исключения грубых ошибок используют  $t$  – критерий Стьюдента:

$$\frac{x_{min}^{max} - \bar{x}}{s\{x\}} = t \quad (1.9)$$

где  $x_{min}^{max}$  – результаты, которые ставятся под сомнение;

$\bar{x}$  – среднее значение, вычисленное без подозреваемого наблюдения;

$s\{x\}$  – среднеквадратичное отклонение, вычисленное без  $x_{min}^{max}$

Вначале вычисления проводят с наблюдением  $x^{max}$ , а затем с  $x_{min}$ .

Если расчетное значение  $t \geq t_{q,f}$  принятое по таблице 1 приложения, то результат исключается.

Если  $t \leq t_{q,f}$  то результат не исключается.

### Задание и порядок выполнения работы

1. Взять у преподавателя индивидуальный вариант – две выборки опытов по 10 случайных чисел.
2. Результаты опытов и расчетов записать карандашом в таблицу отчета. Фамилию студента и номер группы записать ручкой.
  - а) Найти для каждой выборки оценки математического ожидания и дисперсии ( $\bar{x}$  и  $S^2$ ).
  - б) По одной из выборок найти доверительные границы математического ожидания (с доверительной вероятностью  $P = 0,95$ ).
  - в) Проверить гипотезу о равенстве нулю математического ожидания по одной из выборок (с уровнем значимости  $q = 5\%$ ).
  - г) Проверить гипотезу о равенстве дисперсий в двух полученных

выборках (с уровнем значимости  $q = 5 \%$ ).

д) Рассчитать необходимое число повторностей измерений для одной из выборок (с уровнем значимости  $q = 5 \%$  и доверительным интервалом в пределах 5...10 % от среднего значения).

ж) Для сильно отклоняющихся наблюдений по данным одной из выборок произвести проверку принадлежности подозреваемых наблюдений к исследуемому ряду (с уровнем значимости  $q = 5 \%$ ).

## Практическая работа № 2 Планирование экстремальных экспериментов

**Целью работы** является ознакомление с основами методов статической оптимизации объектов исследования при наличии ошибок измерений на базе метода крутого восхождения (Бокса-Уилсона).

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

При поиске оптимального сочетания факторов, действующих в объекте исследования, то есть наилучших значений в конкретных условиях, задача решается следующим образом.

Задаются критерием оптимизации  $y$ , зависящим от вектора управляемых факторов  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, i$  - число факторов.

Задача оптимизации сводится к отысканию таких значений факторов, при которых целевая функция достигает экстремума (максимума или минимума).

Зависимость

$$y(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.1)$$

образует некоторую поверхность в  $(k + 1)$ -мерном пространстве  $x_1, x_2, \dots, x_k, y$ . Эту поверхность называют поверхностью отклика, а отдельные её точки или значения  $y$  в точках  $\bar{X}$  факторного пространства – просто откликом.

В большинстве практических случаев аналитическая зависимость (2.1) неизвестна и единственное, чем располагает исследователь, – это возможностью наблюдать значение отклика при любой комбинации варьируемых факторов  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Поскольку такое наблюдение связано с проведением опытов и измерений, то фактически наблюдается сумма истинного значения критерия оптимизации  $y_{ист}$  и случайной ошибки опыта  $\varepsilon$ , то есть  $y_{набл} = y_{ист} + \varepsilon$ .

При оптимизации объекта исследования методом крутого восхождения (МКВ) рабочее движение совершается в направлении наиболее быстрого возрастания критерия оптимизации (при поиске максимума) или быстрого убывания (при поиске минимума), то есть в направлении градиента. МКВ представляет собой метод экспериментальной оптимизации, сочетающей полный

или дробный факторный эксперимент с движением по градиенту функции отклика.

Из аналитической геометрии известно, что для многомерной функции градиент задается выражением:

$$\text{grad } \hat{y} = \frac{dy}{dx_1} \vec{l}_1 + \frac{dy}{dx_2} \vec{l}_2 + \dots + \frac{dy}{dx_k} \vec{l}_k \quad (2.2)$$

где  $\vec{l}_i$  направляющий вектор координатной оси  $x_i$ .

Координатами вектора

$$\text{grad } \hat{y} = \frac{dy}{dx_1} + \frac{dy}{dx_2} + \dots + \frac{dy}{dx_k} \quad (2.3)$$

служат координаты модели регрессии при линейных членах разложения функции  $y$  в ряд Тэйлора по степеням  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Тогда соответствующие компоненты вектора градиента могут быть получены как коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_k$  линейной аппроксимации поверхности отклика вблизи исходной точки  $X$

$$y(X) \cong b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k \quad (2.4)$$

Для получения оценок  $b_1, b_2, \dots, b_k$  необходимо выполнить полный факторный эксперимент (ПФЭ) или дробный факторный эксперимент (ДФЭ) с центром в базовой точке  $k_0$  (рисунок 2.1), на котором представлена графическая иллюстрация МКВ на двухфакторном эксперименте. Цифрами 20, 30, 40 и т.д. обозначены линии равного уровня поверхности отклика  $y$  в некоторых относительных единицах.

В МКВ для поиска экстремальной области  $S$  процесс осуществляется в 2...3 цикла и в первом цикле выполняются:

1. Выбирается базовая точка  $k_0$  (рисунок 2.1). Координаты базовой точки выбираются произвольно на основании предварительного изучения объекта исследования, но в области планирования факторов.



$$b_i = \frac{\sum_{iu=1}^N \bar{y}_u}{N} \quad (2.7)$$

где  $x_{iu}$  - значение  $i$ -го фактора в  $u$ -ой строке матрицы плана (факторы нормированы).

4. Важной особенностью МКВ является проведение статистического анализа промежуточных результатов на пути к оптимуму, который включает:

- а) проверку однородности наблюдений в строках МП;
- б) проверку значимости оценок коэффициентов  $b_i$  линейной модели объекта;
- в) проверку адекватности полученной модели объекту.

5. Проверка однородности наблюдений в строке МП состоит в проверке гипотезы о равенстве дисперсий  $\sigma^2\{y_1\} = \sigma^2\{y_2\} = \dots = \sigma^2\{y_n\}$  при экспериментах в соответствующих строках МП. Оценки дисперсий в  $u$ -ой строке МП находятся по формуле:

$$s_u^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_u)^2 \quad (2.8)$$

Проверка однородности выполняется по  $G$ -критерию Кохрена (см. лабораторную работу №1), для чего вычисляется

$$G_{max} = \frac{s_{u \max}^2}{\sum_{u=1}^N s_u^2} \quad (2.9)$$

где

$s_u^2$  - дисперсия в  $u$ -ой строке МП;

$s_{u \max}^2$  - максимальная из всех дисперсий.

Если вычисленное значение критерия  $G_{max}$  окажется меньше  $G_{кр}$ , найденного по таблице 3 приложения для  $f_1 = m - 1$  и  $f_2 = N$  и выбранного уровня значимости  $q$ , то гипотеза об однородности дисперсий принимается.

Если проверка на однородность дала отрицательный результат, то остается признать, что управляемые и неконтролируемые факторы создают на

выходе большой уровень шума. При этом следует попытаться увеличить число параллельных опытов. Существуют и другие способы преобразования данных.

б. После **определения оценок коэффициентов регрессии** необходимо проверить гипотезу о значимости коэффициентов  $b_i$ . Проверка гипотезы проводится с помощью критерия Стьюдента, который при проверке нуль-гипотезы формируется как

$$t = \frac{|b_i|}{s\{b_i\}} \quad (2.10)$$

где  $s\{b_i\}$  - среднеквадратичное отклонение ошибки определения коэффициента  $b_i$ :

$$s\{b_i\} = \frac{s\{y\}}{\sqrt{N * m}} \quad (2.11)$$

где  $s\{y\}$ - среднеквадратичное отклонение ошибки опытов и при равномерном дублировании опытов в строках МП определяется по формуле:

$$s^2\{y\} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_u)^2}{N * (m-1)} \quad (2.12)$$

где  $y_{iu}$  - число дублирующих опытов в  $u$ -ой строке МП.

Если расчетная величина  $t$  превышает значение  $t_{кр}$ , определенное по таблице 1 приложения для числа степеней свободы  $f = N(m-1)$  при

заданном уровне значимости  $q$ , то нуль-гипотеза отвергается и коэффициент  $b_i$  считается значимым. В противном случае нуль-гипотеза принимается и коэффициент  $b_i$  считают статистически незначимым (то есть  $b_i=0$ ).

Статистическая незначимость коэффициента  $b_i$  обусловлена следующими причинами:

1. Уровень базового региона МП близок к точке частного экстремума по фактору  $x_i$ .
2. Интервал варьирования  $\Delta\tilde{x}$  выбран малым.

3. Данный фактор не имеет функциональной связи с откликом  $y$ .
4. Величина ошибки эксперимента велика вследствие наличия неуправляемых и неконтролируемых факторов.

Если какой-либо коэффициент  $b_i$  оказался незначимым, он может быть отброшен без пересчета остальных, так как МП ортогональна и оценки коэффициентов регрессии определяются независимо друг от друга.

Модель регрессии объекта исследования составляется только для значимых коэффициентов.

7. Чтобы проверить гипотезу об адекватности представления результатов эксперимента найденной моделью регрессии, необходимо оценить отклонение предсказанной моделью  $\hat{y}_u$  от результатов эксперимента  $y_u$  в тех же точках (строках МП).

Дисперсия адекватности  $s_{ад}^2$  при равномерном дублировании опытов в строках МП определяется по формуле:

$$s_{ад}^2 = \frac{m}{N-d} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 \quad (2.13)$$

где  $m$  - число параллельных опытов в строках МП;

$d$  – число оценок коэффициентов регрессии модели, включая и  $b_0$ ;

$\hat{y}_u$  - расчетное значение критерия оптимизации в  $u$ -ой строке МП.

Проверка гипотезы об адекватности проводится с помощью  $F$ - критерия Фишера, который позволяет проверить нуль-гипотезу о равенстве двух дисперсий  $s_{ад}^2$  и  $s^2\{y\}$

$F$ -критерий вычисляется как отношение

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s^2\{y\}} \quad (2.14)$$

Если вычисленное значение  $F$  меньше  $F_{кр}$ , найденного по таблице 2 приложения для числа степеней свободы числителя  $f_{числ} = f_{ад} = N - d$  и  $f_{знам} = f_y = N(m - 1)$  при заданном уровне значимости  $q$ , то нуль-гипотеза принимается и модель считается адекватной и наоборот.

Если гипотеза адекватности отвергается, необходимо переходить к

более сложной форме модели регрессии или проводить эксперименты, при возможности, с меньшим интервалом варьирования. Однако с уменьшением интервала варьирования появляются другие трудности:

1. Растет отношение помех (шума) к полезному сигналу, что приводит к необходимости увеличивать число дублирующих опытов для выделения полезного сигнала на фоне шума.
2. Уменьшаются значения коэффициентов  $b_i$ . Коэффициенты могут стать статистически незначимыми.

Если линейная модель регрессии после статистической обработки оказалась не адекватной, то её можно дополнить эффектами парных взаимодействий и она будет иметь вид (неполная полиномиальная модель):

$$\hat{y}(\vec{X}) \cong b_0 + b_1x_1 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{ij}x_ix_j$$

где  $b_{ij}$  - оценки коэффициентов регрессии, характеризующие парные взаимодействия.

Они вычисляются по формуле:

$$b_{ij} = \frac{\sum_{i \neq j}^N x_{iu} * x_{ju} * \bar{y}_u}{N} \quad (2.16)$$

где  $x_{iu}$  и  $x_{ju}$  - значения  $i$ -го и  $j$ -го факторов в  $u$ -ой строке МП.

Статистическая обработка не полной полиномиальной модели (2.15) (оценка однородности наблюдений, значимости оценок коэффициентов регрессии, адекватности модели) осуществляется аналогично и по тем же аналитическим формулам, что и линейной модели (2.4).

8. В МКВ после получения модели регрессии (2.4) начинается шаговое движение в область экстремума по градиенту функции отклика.

Движение начинается из базовой точки  $k_0$  (рисунок 2.1).

При этом вычисляется произведение  $b_i \Delta \tilde{x}_i$ , где  $\Delta \tilde{x}_i$  - интервал варьирования  $i$ -го фактора. Фактор, для которого это произведение максимально, принимается за базовый ( $b_\delta \Delta \tilde{x}_\delta$ ).

На примере однофакторного эксперимента (рисунок 2.2) проследим

шаговое движение по градиенту.

Известно, что первая производная в геометрической интерпретации представляет собой тангенс угла наклона касательной (градиента) к кривой и можно записать:

$$b_i = \operatorname{tg} \varphi .$$

Значение функции в точках, лежащих на градиенте, можно определить, допустим,  $y = OC \cdot \operatorname{tg} \varphi$ .  $OC = \Delta \tilde{x}_i \cdot \operatorname{tg} \varphi = b_i \Delta \tilde{x}_i$ .

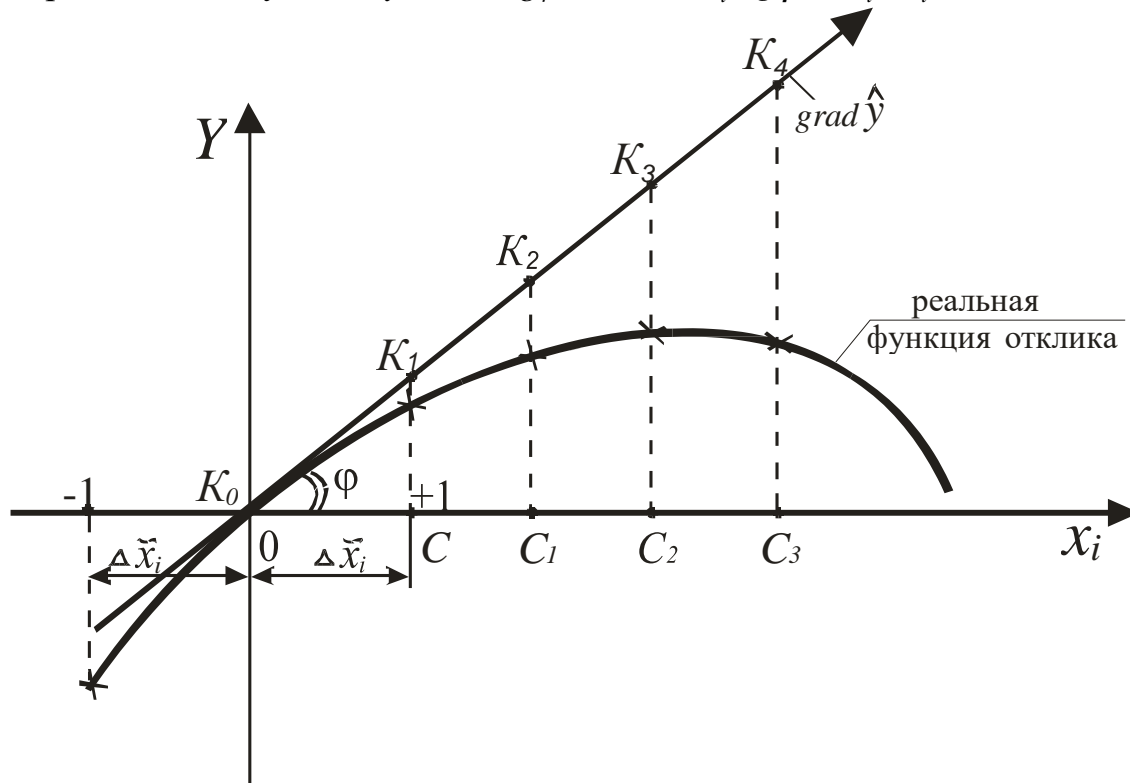


Рисунок 2.2 – Шаговое движение по градиенту

Из рисунка видно, что движение по градиенту (при поиске максимума функции отклика) представляет собой шаговую процедуру, которая продолжается до тех пор, пока последующие результаты не будут получаться ниже предыдущих.

В точке  $K_4$  движение по градиенту прекращается.

В случае многомерной функции отклика при числе факторов  $k = 1, 2, \dots, i$  назначается шаг движения по градиенту для базового фактора, а так как все факторы связаны в математическую модель, то при шаговом движении по

одному из них, должны изменяться и другие, пропорционально произведению коэффициента  $b_i$ , умноженного на интервал варьирования фактора  $\Delta\tilde{x}_i$ , то есть  $b_i\Delta\tilde{x}_i$ .

В реальных условиях на изучаемом объекте исследования всегда имеем дело с факторами, выраженными в реальном масштабе, а в модели регрессии факторы нормированы (безразмерные). При оценке составляющих градиента следует учитывать интервал варьирования факторами.

Для получения шагов других факторов  $h_i$  необходимо для каждого фактора произведение  $b_i\Delta\tilde{x}_i$  уменьшить во столько раз, во сколько уменьшится  $b_6\Delta\tilde{x}_6$  для базового фактора при делении его на шаг, то есть

$$h_i = \frac{b_i\Delta\tilde{x}_i}{b_6\Delta\tilde{x}_6} * h_6 \quad (2.17)$$

где  $h_6$  - шаг базового фактора, натуральное значение.

Знаки  $h_i$  должны соответствовать знакам  $b_i$ .

Выбор шага базового фактора не формализован. Если шаг принять очень малым, то в дальнейшем необходимо будет поставить много опытов для достижения области экстремума. При слишком же большом шаге имеется опасность «перешагнуть» через область экстремума. Для удобства выполнения опытов шаги факторов округляют. Для базового фактора шаг варьирования принимают равным  $h_i = \Delta x_6$  или вводят более мелкий, чтобы первая рабочая точка не выходила за границы области планирования. Точка  $K_5$  на рисунке 2.1.

На расчет градиента свободный член модели регрессии  $b_0$  не влияет. Незначимые факторы стабилизируются на любом уровне в интервале  $\pm 1$ .

Если при шаговом движении по градиенту каким-либо фактором невозможно варьировать, то он стабилизируется на лучшем уровне и движение осуществляется по оставшимся.

Шаговое движение по градиенту осуществляется от базовой точки  $K_0$ . Для этого вычисляются координаты  $K$ -х рабочих точек ( $K = 1, 2, \dots$ ) на направлении градиента  $K_0A$  (рис.2.1) в реальном масштабе

$$\tilde{x}_{i,k} = \tilde{x}_{i,0} + K * h_i \quad (2.18)$$

в них последовательно выполняются проверочные (реальные) и мысленные опыты.

**Мысленные опыты** заключаются в получении предсказанных (расчетных) значений отклика  $\hat{y}_{пр}$  по модели регрессии (2.4). Для этого в уравнение (2.4) следует подставлять нормированные по уравнению (2.5) значения координат факторов.

Таки образом уравнение (2.4) принимает вид

$$\hat{y}_{пр} = b_0 + b_1 * k \frac{h_1}{\Delta \tilde{x}_1} + b_2 * k \frac{h_2}{\Delta \tilde{x}_2} + \dots \quad (2.19)$$

Где  $k = 1, 2, \dots$  - число шагов.

Мысленные опыты позволяют сократить объём реальных опытов, то есть увеличивать скорость продвижения к экстремуму.

Реальные (проверочные) опыты в начале движения из базовой точки вдоль градиента  $K_0A$  ставятся не в каждой рабочей точке, а через 2...4 точки. Затем, при заметном уменьшении приращений отклика в последующих реальных опытах проверочные опыты ставятся чаще.

Рабочее движение продолжается пока не будет достигнут частный экстремум (точка  $K_8$  на рисунке 2.1). Признаком достижения частного экстремума (максимума) является уменьшение отклика в последующих проверочных опытах.

Точка частного экстремума на направлении  $K_0A$  принимается за новую базовую точку, организуется второй цикл крутого восхождения (спуска). Порядок работы на втором цикле тот же, что и на первом. Различие состоит в том, что интервалы варьирования при постановке ПФЭ.

ДФЭ и размер рабочих шагов  $h'_i$  назначаются меньшими, в связи с увеличением кривизны с приближением к экстремуму. В случае необходимости выполняется третий цикл.

В МКВ поисковое движение прекращают после достижения области

экстремума  $S$ , признаком этого является статистическая незначимость всех оценок коэффициентов регрессии  $b_i$  на последнем цикле МКВ.

### **Задание и порядок выполнения работы**

1. Взять у преподавателя индивидуальный вариант результатов эксперимента для двухфакторной МП, уровни и интервал варьирования факторами, цель эксперимента (максимум или минимум).

2. Рассчитать оценки коэффициентов регрессии модели (2.4) для двух факторов. Оценить однородность наблюдений по критерию Кохрена, значимость оценок коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента и адекватность модели по критерию Фишера. Построить линейную модель регрессии.

3. Выполнить процедуру крутого восхождения (спуска) по направлению градиента поверхности отклика с помощью мысленных опытов.

Мысленные опыты продолжаются до тех пор, пока выполняется неравенство:

$$\hat{y}_{\text{пр}} \leq (1 \dots 2) * y_{\text{max}}$$

где  $y_{\text{max}}$  - максимально возможный выход, определяемый из физических соображений (задан в вариантах).

При поиске минимума:

$$\hat{y}_{\text{пр}} \geq (1 \dots 2) * y_{\text{min}}$$

где  $y_{\text{min}}$  - минимально возможный выход, определяемый из физических соображений (задан в вариантах).

## Практическая работа № 3 Планирование эксперимента второго порядка

Целью работы является изучение методов планирования эксперимента для получения модели регрессии второго порядка.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Если линейная модель регрессии (2.4) в лабораторной работе № 2 оказалась неадекватной результатам эксперимента, то зависимость критерия оптимизации от входных факторов необходимо искать в виде полинома более высокого порядка. В технических исследованиях с достаточной точностью эти зависимости аппроксимируются полиномом второго порядка:

$$\hat{y}_{\text{пр}} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i \neq j \\ i < j}} b_{ij} x_i x_j + \sum_{u=1}^k b_{ii} x_i^2 \quad (3.1)$$

где  $i$  – число факторов ( $i = 1, 2, \dots, k$ );

$b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$  – оценки коэффициентов регрессии модели второго порядка.

Для получения модели второго порядка (3.1) пользуются результатами эксперимента, проведенного по плану второго порядка (при активном эксперименте).

Планы второго порядка отличаются от линейных тем, что факторы варьируют на нескольких уровнях, минимум на трех.

При построении планов второго порядка используют центральные композиционные (то есть строящиеся последовательно) планы (ЦКП) включающие точки полного или дробного факторного эксперимента типа  $2^k$ , «звездные точки», расположенные по факторным осям симметрично относительно центра плана. Общее число точек ЦКП второго порядка определяется формулой:  $N = 2^k + 2k + k_0$ , где  $k_0$  – число нулевых (центральных точек).

При построении планов используют различные критерии оптимальности.

Наиболее широкое распространение получили следующие планы: ортогональные, ротататабельные и  $D$  – оптимальные.

**При ортогональном планировании** оценки коэффициентов модели регрессии (3.1) получаются независимыми друг от друга с минимальными дисперсиями. Факторы с незначимыми коэффициентами можно сразу отбрасывать без пересчета оставшихся значимых оценок коэффициентов, как это необходимо при неортогональных планах.

Однако при ортогональном планировании второго порядка точность предсказания критерия оптимизации при повороте факторных осей неодинакова. Наилучшим с этой точки зрения служит такое математическое описание, которое дает одинаковую точность предсказания критерия оптимизации  $Y$  во всех направлениях на одинаковом расстоянии от центра плана. Такое математическое описание получается при ротатабельном композиционном планировании.

Точность оценивания коэффициентов модели регрессии характеризуется эллипсоидом рассеяния их оценок. Планирование, при котором требуется, чтобы объем эллипсоида рассеяния оценок коэффициентов был минимальным, называется  $D$  – оптимальным.

В настоящее время в теории планирования эксперимента разработаны методы построения всех типов планов, формулы для расчета оценок коэффициентов регрессии и статистическая обработка результатов эксперимента.

Свойством ротатабельности обладает и ряд некомпозиционных планов. На рисунке 3.1 показан ротатабельный план второго порядка для двух факторов в виде правильного шестиугольника (план на шестиугольнике).

Особенности данного плана заключаются в том, что один фактор ( $x_2$ ) варьирует на трех уровнях, а другой ( $x_1$ ) – на пяти уровнях. В некоторых конкретных ситуациях это бывает удобно.

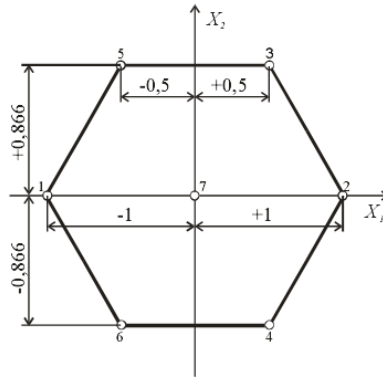


Рисунок 3.1 – Наименьший ротатабельный план на шестиугольнике для двух факторов

Факторы нормированы. Матрица некомпозиционного ротатабельного плана второго порядка для двух факторов представлена в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Матрица наименьшего ротатабельного плана второго порядка для двух факторов

Номера точек	План			Расчетная матрица			Критерий оптимизации
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$\bar{y}_a$
1	+ 1	- 1	0	0	1	0	$\bar{y}_1$
2	+ 1	+ 1	0	0	1	0	$\bar{y}_2$
3	+ 1	0,5	0,866	0,433	0,25	0,75	$\bar{y}_3$
4	+ 1	0,5	-0,866	-0,433	0,25	0,75	$\bar{y}_4$
5	+ 1	-0,5	0,866	-0,433	0,25	0,75	$\bar{y}_5$
6	+ 1	-0,5	-0,866	0,433	0,25	0,75	$\bar{y}_6$
7	+ 1	0	0	0	0	0	$\bar{y}_0$

Оценки коэффициентов регрессии модели (3.1) рассчитываются по следующим формулам.

Свободный член

$$b_0 = \bar{y}_0 \tag{3.2}$$

где  $y_0$  – среднее по результатам опытов в центре плана.

Линейные оценки коэффициентов регрессии факторов:

$$b_i = T_3 \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u \tag{3.3}$$

где  $T_3$  – расчетный коэффициент, при  $k = 2$   $T_3 = 0,33333$ .

Оценки коэффициентов при парных взаимодействиях

$$b_{ij} = T_6 \sum_{i \neq j}^N x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u \quad (3.4)$$

где  $T_6$  – расчетный коэффициент. При  $k = 2$   $T_6 = 1,33333$ .

Оценки коэффициентов квадратичных эффектов факторов:

$$b_{ii} = T_4 \sum_{i=1}^N x_{iu}^2 \bar{y}_u + T_5 \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^N x_{iu}^2 \bar{y}_u - T_2 \sum_{u=1}^N x_{0u} \bar{y}_u \quad (3.5)$$

где  $T_2, T_4, T_5$  – расчетные коэффициенты. При  $k = 2$   $T_2 = 1,0$ ;  $T_4 = 0,66667$ ;

$$T_5 = 0,83333.$$

### **Статистическая обработка моделей регрессии при планировании второго порядка**

Статистическая обработка результатов планирования второго порядка производится по аналогии с линейными планами (см. Практическая работа № 2), но имеет некоторые особенности.

Например, вычисление оценок дисперсий производится отдельно для различных групп коэффициентов ( $b_0, b_i, b_{ij}$  и  $b_{ii}$ ).

Вначале осуществляется проверка однородности наблюдений в строках

МП с помощью критерия Кохрэна, для чего вычисляется:

$$G_{max} = \frac{s_u^2 \max}{\sum_{u=1}^N s_u^2} \quad (3.6)$$

где  $s_u^2$  – дисперсия в  $u$ -ой строке МП:

$$s_u^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_u)^2 \quad (3.7)$$

Здесь  $m$  – число параллельных опытов в строках МП.

Выражения (3.6) и (3.7) справедливы, когда число параллельных

опытов одинаково в строках МП.

Если вычисленное по выражению (3.6) значение  $G_{max}$  окажется меньше критического  $G_{кр}$ , найденного по таблице 3 приложения для  $f_1 = m - 1$  и  $f_2 = N$  и выбранного уровня значимости, то гипотеза об однородности наблюдений принимается.

Проверка гипотезы о значимости оценок коэффициентов регрессии производят с помощью  $t$  – критерия Стьюдента:

$$t_i = \frac{|b_i|}{s\{b_i\}} \quad (3.8)$$

где  $s\{b_i\}$  – среднеквадратическое отклонение коэффициента  $b_i$ .

При планировании второго порядка  $s\{b_i\}$  определяется отдельно для разных групп оценок ( $b_0, b_i, b_{ij}$  и  $b_{ii}$ ) коэффициентов и оценки  $s\{b_i\}$  в уравнении (3.8) будут одинаковы только внутри данной группы оценок коэффициентов.

Дисперсии для оценок коэффициентов регрессии определяются по формулам (для наименьшего ротатабельного плана второго порядка для двух факторов):

$$s\{b_0\} = T_7 s\{y\} \quad (3.9)$$

где  $T_7$  – расчетный коэффициент, при  $k = 2$   $T_7 = 1,0$ ;

$s\{y\}$  – среднеквадратичное отклонение ошибки опытов и при равномерном дублировании опытов в строках МП определяется по формуле:

$$s\{y\} = \sqrt{\frac{\sum_1^N \sum_1^m (y_{iu} - \bar{y}_u)^2}{N(m - 1)}} \quad (3.10)$$

$$s\{b_i\} = T_8 s\{y\}, \quad (3.11)$$

где  $T_8$  – расчетный коэффициент и при  $k = 2$   $T_8 = 0,57735$ .

$$s\{b_{ij}\} = T_{10} s\{y\} \quad (3.12)$$

где  $T_9$  – расчетный коэффициент и при  $k = 2$   $T_9 = 1,1547$ .

$$s\{b_{ii}\} = T_9 s\{y\}, \quad (3.13)$$

где  $T_{10}$  – расчетный коэффициент и при  $k = 2$   $T_{10} = 1,22474$ .

Если расчетная величина по выражению (3.8)  $t$  – превышает значение, определенное по таблице 1 приложения для числа степеней свободы  $f = N(m-1)$  при заданном уровне значимости  $q$ , то коэффициент считается значимым.

**Для проверки гипотезы об адекватности** представления результатов эксперимента моделью второго порядка необходимо оценить отклонение предсказанной моделью  $\hat{y}_u$  в тех же строках МП.

Дисперсия адекватности  $s_{ад}^2$  при равномерном дублировании опытов, определяется по формуле:

$$s_{ад}^2 = \frac{m}{N - d} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 \quad (3.14)$$

где  $d$  – число оценок коэффициентов регрессии модели, включая и  $b_0$ ;  
 $\hat{y}_u$  – расчетное значение критерия оптимизации в  $u$ -ой строке МП.

Проверка адекватности выполняется по  $F$  – критерию Фишера, который вычисляется как отношение:

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s^2\{y\}} \quad (3.15)$$

Если вычисленное по выражению (3.15) значение  $F$  меньше  $F_{кр}$ , найденного по таблице 2 приложения для числа степеней свободы числителя  $f_{числ} = N - d$  и  $f_{знам} = N(m-1)$  при заданном уровне значимости  $q$ , то модель считается адекватной и наоборот.

## ЗАДАНИЕ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Взять у преподавателя индивидуальный вариант результатов эксперимента по наименьшему ротатбельному плану для построения модели регрессии второго порядка, уровни и интервал варьирования факторами для двух факторов.

2. Рассчитать оценки коэффициентов регрессии модели (3.1) для двух факторов. Оценить однородность наблюдений по критерию Кохрэна, значимость оценок коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента и адекватность модели по критерию Фишера. Построить квадратичную модель регрессии.

## Практическая работа № 4 Анализ математических моделей методом двумерных сечений

**Целью работы** является изучение методов анализа полученных моделей регрессии объекта исследования для определения оптимального сочетания факторов по выбранному критерию оптимизации.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

После получения адекватной модели регрессии второго порядка вида:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 \quad (4.1)$$

где  $b_0$ ,  $b_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $b_{ii}$  – оценки коэффициентов регрессии, полученные в лабораторной работе № 3 при действии независимых факторов  $x_1, x_2, \dots, x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), необходимо определить координаты экстремума функции (4.1), если он существует, и изучить свойства поверхности отклика в окрестностях экстремума.

В зависимости от вида математической модели имеется несколько методов поиска экстремума в  $k$ -мерном пространстве факторов и при большом числе переменных применения этих методов затруднительно из-за «барьера многомерности». Резко возрастают вычислительные трудности.

Если модель регрессии имеет вид непрерывной функции, то в ряде случаев можно использовать и методы классического анализа. То есть взять первые производные от модели (4.1) по каждой переменной (фактору) и приравнять их к нулю.

Совместное решение системы уравнений и определит экстремум функции.

Однако, когда критерий оптимизации является функцией многих переменных, равенство нулю частных производных является необходимым, но недостаточным условием экстремума функции в точке.

В этом случае условием достаточности экстремума в точке является

одновременное выполнение максимума или минимума по всем переменным одновременно.

Если полученная поверхность отклика имеет вид седловины, то в седловой точке по одной переменной будет минимум функции, а по другой – максимум, и седловая точка не будет экстремальной для всех переменных одновременно. В этом случае методы классического анализа на экстремум являются непригодными.

Может случиться, что функция имеет вид, для которого выполняются и достаточные условия экстремума в точке, но экстремальная точка находится вне пределов области экспериментирования и тогда методы классического анализа также являются ограниченными, поэтому прибегают к методам локального поиска точки оптимума.

При локальном изучении поверхности отклика делают каноническое преобразование математической модели (4.1), то есть для систематизации и анализа уравнение (4.1) приводится к типовой канонической форме вида:

$$\hat{y} - y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + \dots + B_{kk}X_k^2 \quad (4.2)$$

где  $y$  – текущее значение критерия оптимизации;

$y_s$  – значение критерия оптимизации в центре поверхности отклика;

$X_1^2, X_2^2, \dots, X_k^2$  – новые факторные оси координат, повернутые

относительно старых  $x_1, x_2, \dots, x_k$  на угол  $\alpha$  до совмещения с главными осями фигуры;

$B_{11}, B_{22}, \dots, B_{kk}$  – оценки коэффициентов регрессии в канонической форме.

При каноническом преобразовании модели (4.1) производится перенос начала координат в новую точку и поворот старых осей на некоторый угол в факторном пространстве, в результате чего исчезают линейные члены в выражении (4.1) и изменяется значение свободного члена.

Чтобы осуществить перенос начала координат в особую точку поверхности отклика, надо продифференцировать функцию отклика по каждой переменной (фактору) и, приравняв к нулю частные производные, решить полученную систему уравнений. Решением системы  $k$  линейных

уравнений находятся координаты центра фигуры, если поверхность имеет центр.

Поиск оптимального сочетания факторов удобно выполнять с помощью метода двумерных сечений.

Для упрощения расчетов преобразования модели второго порядка (4.1) выполняются с нормированными значениями факторов.

Построение двумерных сечений функции отклика выполняется в следующей последовательности. В модель (4.1) подставляются нормированные значения (оптимальные или близкие к оптимальным) всех факторов, кроме изучаемых двух. Тогда выражение (4.1) примет вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 \quad (4.3)$$

Далее в полученном выражении определяется центр поверхности отклика путем взятия частных производственных по каждому фактору и приравнивания полученных выражений к нулю.

$$\begin{cases} \frac{d\hat{y}}{dx_1} = b_1 + b_{12}x_2 + 2b_{11}x_1 = 0 \\ \frac{d\hat{y}}{dx_2} = b_2 + b_{12}x_1 + 2b_{22}x_2 = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Совместное решение системы (4.4) дает координаты нового центра  $S$  поверхности отклика  $x_{1S}$  и  $x_{2S}$  в старых осях координат.

Подставляя найденные значения  $x_{1S}$  и  $x_{2S}$  в уравнение (4.3), определяют значение критерия оптимизации в центре  $S$ , то есть  $y_S$ .

Если главный определитель системы (4.4) равен нулю, то поверхность не имеет центра. Тогда точку  $S$  помещают в старом начале координат или в любой другой точке с лучшим значением критерия оптимизации на главных направлениях поверхности.

После переноса центра поверхности в точку  $S$  оси координат поворачивают на угол  $\alpha$  до совмещения их с главными осями геометрической поверхности.

В результате этих операций получают каноническую форму второго порядка модели (4.3):

$$\hat{y} - y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 \quad (4.5)$$

Угол поворота  $\alpha$  определяют из выражения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b_{ij}}{b_{ii} - b_{jj}} = \frac{b_{12}}{b_{11} - b_{22}} = \dots \quad (4.6)$$

Если угол поворота  $\alpha$  окажется положительным, то поворот новых осей относительно старых осуществляется против часовой стрелки, а если отрицательный – по часовой стрелке.

Коэффициенты в канонической форме в уравнении (4.5) определяются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^2 \alpha + b_{12} \cos \alpha \cdot \sin \alpha + b_{22} \sin^2 \alpha \\ B_{22} &= b_{11} \sin^2 \alpha - b_{12} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + b_{22} \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^2 \alpha + b_{12} \cos \alpha * \sin \alpha + b_{22} \sin^2 \alpha \\ B_{22} &= b_{11} \sin^2 \alpha + b_{12} \cos \alpha * \sin \alpha + b_{22} \cos^2 \alpha \end{aligned} \right.$$

При расчетах по (4.7) следуют учесть,  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ . Для проверки вычислений существует правило:  $B_{11} + B_{22} = b_{11} + b_{22}$ .

После канонического преобразования и построения модели (4.5) определяется тип поверхности отклика и начинается графоаналитический анализ полученного выражения, для чего строится двумерное сечение, то есть серия кривых равного выхода (изолиний) в области допустимых значений варьирования факторов.

Для построения двумерного сечения (рекомендуется выполнить на миллиметровой бумаге формата А4) наносятся старые оси координат  $x_1, x_2$  (рисунок 4.1). Отмечаются на осях интервалы варьирования факторами в нормированном виде, то есть -1, 0, +1. (Рекомендуемый масштаб 5 см – одна единица.) В принятом масштабе наносятся координаты  $x_{1S}$  и  $x_{2S}$  центра поверхности отклика  $S$ .

Начало координат переносится в точку  $S$  и строятся промежуточные оси координат  $x'_1, x'_2$ . Эти оси поворачиваются на угол  $\alpha$  до совмещения с главными осями фигуры поверхности отклика. Получаются новые оси

координат  $X_1SX_2$ , относительно которых и производится построение изолиний, по уравнению (4.5).

В зависимости от знаков при коэффициентах  $B_{11}$  и  $B_{22}$  будет та или иная фигура поверхности отклика. Например, если оба коэффициента положительные, то фигура в пространстве представляет собой эллипсоид вращения, и при движении вдоль факторных осей критерий оптимизации будет возрастать. Для построения линий равного выхода (изолиний) необходимо в уравнении (4.5) задать различные значения  $\hat{y}$  (по численному значению больше, чем  $y_s$ ) и полученные значения спроектировать на плоскость. Получится серия эллипсов (по числу значений  $\hat{y}$ ).

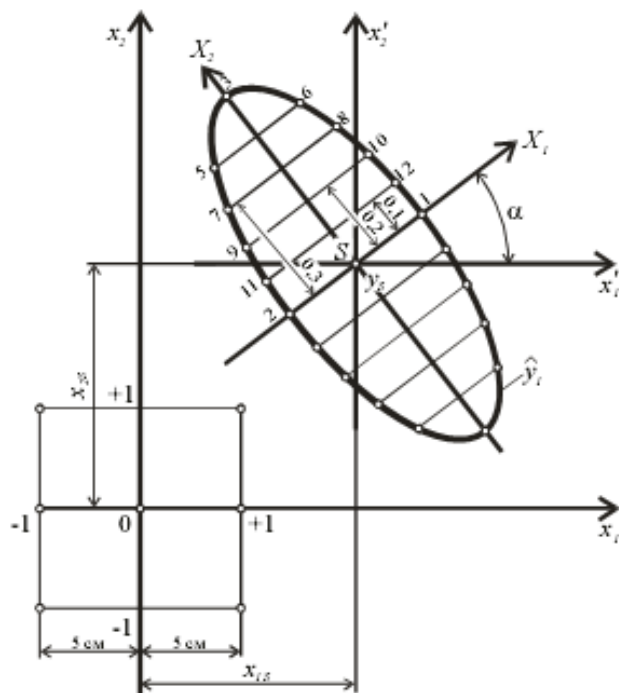


Рисунок 4.1 – Построение двумерного сечения

Для построения конкретного эллипса необходимо задаться значением  $\hat{y}_1$ . Подставляя в уравнение (4.5) значение  $\hat{y}_1$ , получим

$$\hat{y}_1 - y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 \quad (4.8)$$

и, задавшись  $X_2 = 0$ , получим координаты оси эллипса по направлению  $\pm X_1$  (точки 1 и 2).

Задавшись значением  $X_1 = 0$ , получим крайние точки эллипса вдоль оси  $X_2$  (точки 3 и 4). Для нахождения промежуточных координат эллипса

необходимо задаться значением  $X_2 = 0,1$ ;  $X_2 = 0,2$ ;  $X_2 = 0,3$  и т.д. В каждом случае подстановкой в выражение (4.8) определяем координаты эллипса вдоль оси  $\pm X_1$  (точки 11 и 12, 9 и 10 и т.д.). По полученным точкам строят линию равного выхода и численное значение отклика наносят на рисунок. В данном случае  $\hat{y}_1$ .

Построив серию кривых равного выхода в пределах области варьирования факторов, анализируют полученные результаты и выбирают значения факторов, дающих оптимальное значение отклика. Для этого в старых осях координат  $x_{1S}$  и  $x_{2S}$  наносят размерные значения факторов в пределах области экспериментирования и единицы измерения вдоль факторных осей.

### **ЗАДАНИЕ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

1. Взять модель регрессии второго порядка из отчета лабораторной работы № 3 для двух факторов и выполнить анализ модели с помощью построения двумерного сечения.

2. Определить координаты центра поверхности отклика и значение критерия оптимизации в центре поверхности  $y_S$ .

3. Рассчитать угол поворота координатных осей  $\alpha$  до совмещения их с главными осями фигуры поверхности отклика и вычислить коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{22}$  в канонической форме. Построить каноническую форму модели регрессии вида (4.5).

4. На миллиметровой бумаге формата А4 построить двумерное сечение с 3-мя изолиниями, нанести натуральную (размерную) шкалу измерения факторов, приняв координаты варьирования из лабораторной работы № 3. Определить оптимальные значения факторов в именованных единицах.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1 –  $q$  %-ные пределы для величины  $t_q(f)$  в зависимости от  $f$  степеней свободы и от  $\frac{q}{100}$  вероятности для распределения Стьюдента

$f \backslash q$	20%	10%	5%	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
1	3,0770	6,3130	12,706	31,820	63,656	127,356	318,308	636,619
2	1,8850	2,9200	4,3020	6,9640	9,9240	14,0890	22,3270	31,5990
3	1,6377	2,3534	3,1820	4,5400	5,8400	7,4530	10,2140	12,9410
4	1,5332	2,1318	2,7760	3,7460	4,6040	5,5970	7,1730	8,6100
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7730	5,8930	6,8590
6	1,4390	1,9430	2,4460	3,1420	3,7070	4,3160	5,2070	5,9580
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,0293	4,7850	5,4049
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8320	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7800
10	1,3720	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5779
11	1,3630	1,7950	2,2010	2,7180	3,1050	3,4960	4,0240	4,4370
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9290	4,3178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2208
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9760	3,3257	3,7874	4,1405
15	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0723
16	1,3360	1,7450	2,1190	2,5830	2,9200	3,2520	3,6860	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5668	2,8982	3,2224	3,6458	3,9650
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5514	2,8784	3,1936	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	1,3230	1,7200	2,0790	2,5170	2,8310	3,1350	3,5270	3,8190
22	1,3212	1,7117	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	1,3188	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0915	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
26	1,3150	1,7050	2,055	2,4780	2,7780	3,0660	3,4350	3,7060
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0380	3,3962	3,6594
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,9712	3,3069	3,5510
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,9146	3,2317	3,4602
500	1,2830	1,6470	1,9640	2,3330	2,7850	2,8190	3,1060	3,3100

Таблица 2 – 5 %-ные верхние пределы для величины  $F$  в зависимости от чисел степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,0	200,0	216,0	225,0	230,0	234,0	237,0	239,0	241,0
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95
	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88

Продолжение таблицы 2

$f_i \backslash f_j$	10	12	16	20	24	30	40	75	100	$\infty$
1	242,0	244,0	246,0	248,0	249,0	250,0	251,0	253,0	253,0	254,0
2	19,39	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,78	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,57	8,56	8,53
4	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,68	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,42	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,72	3,71	3,67
7	3,63	3,57	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,29	3,28	3,23
8	3,34	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,00	2,98	2,93
9	3,13	3,07	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,77	2,76	2,71
10	2,97	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,61	2,59	2,54
11	2,86	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,47	2,45	2,40
12	2,76	2,69	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,36	2,35	2,30
13	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,28	2,26	2,21
14	2,60	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,21	2,19	2,13
15	2,55	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,15	2,12	2,07
16	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,09	2,07	2,01
17	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,04	2,02	1,96
18	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,00	1,98	1,92
19	2,38	2,31	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	1,96	1,94	1,88
20	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,92	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,89	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,87	1,84	1,78
23	2,28	2,20	2,10	2,04	2,00	1,96	1,91	1,84	1,82	1,76
24	2,26	2,18	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,82	1,80	1,73
25	2,24	2,16	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,80	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,78	1,76	1,69
27	2,20	2,13	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,76	1,74	1,67
28	2,19	2,12	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,75	1,72	1,65
29	2,18	2,10	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,73	1,71	1,64
30	2,16	2,09	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,72	1,69	1,62
40	2,07	2,04	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,61	1,59	1,51
60	1,99	1,92	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,50	1,48	1,39
125	1,90	1,83	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,39	1,36	1,25
	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,28	1,24	1,00

Таблица 3 – 5 %-ные пределы для отношения  $S_{max}$  наибольшей эмпирической дисперсии к сумме  $N$  эмпирических дисперсий, полученных из независимых выборок

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	$\infty$
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,200
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4148	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1915	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083

# ОТЧЁТ

## Лабораторная работа № 1

Всладыш

Работу выполнил:

Группа:

Вариант № \_\_\_\_

Расчет оценок математического ожидания и дисперсии							Статистическая проверка гипотез о параметрах	
$i$	Выборка № 1			Выборка № 2			Проверка гипотезы $m_{x_i}=0$ по данным выборки № 1	
	$x_i$	$x_i - \bar{x}_i$	$(x_i - \bar{x}_i)^2$	$x_i$	$x_i - \bar{x}_i$	$(x_i - \bar{x}_i)^2$		
1							$\bar{x}_1$	
2							$s_1$	
3							$f_1$	
4							$t$	
5							$q$	
6							$t_{\text{кр}}$	
7							Вывод	
8							Проверка гипотезы о равенстве дисперсий $S_{x1}^2 = S_{x2}^2$ по данным выборки № 1 и № 2	
9								
10								
$\Sigma$							$s_1^2$	
$\bar{x}$							$s_2^2$	
$s^2$							$f_1$	
$s$							$f_2$	
$f$							$F$	
Определение доверительного интервала для математического ожидания $m_{x_i}$ по данным выборки №1							$q$	
							$F_{\text{кр}}$	
$q$	$f_1$	$t_{qf}$	$\bar{x}_1$	$s_1^2$	$s_1$	$\Delta x$	$(\bar{x}_1 - \Delta x ; \bar{x}_1 + \Delta x)$	
							Вывод	

Определение необходимого числа повторностей измерений по данным выборки № 1

$q$	$\Delta x$	$(\Delta x)^2$	$s_1^2$	$t_{\text{кр}}$	$t_{\text{кр}}^2$	$N$

Исключение грубых ошибок (промахов) по данным выборки № 1

$i$	Выборка без $x_{max}$			Выборка без $x_{min}$		
	$x_j$	$x_j - \bar{x}$	$(x_j - \bar{x})^2$	$x_j$	$x_j - \bar{x}$	$(x_j - \bar{x})^2$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
$\Sigma$						
$\bar{x}$						
$s^2$						
$s$						
$q$						
$f$						
$t$						
Вывод:				Вывод:		

Дата \_\_\_\_\_

Отчет проверил \_\_\_\_\_

# О Т Ч Ё Т

## Лабораторная работа № 2

Выполнил \_\_\_\_\_

Работу выполнил:

Группа:

Вариант № \_\_\_\_\_

Варируемые факторы	Обозначение	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
Нижний уровень	0		
Интервал варьирования	$\Delta \tilde{x}$		
Верхний уровень	+1		
Нижний уровень	-1		

Уровень значимости  $q = 0,05$

Цель эксперимента: поиск макс или мин

Матрица планирования	$x_0$	$x_1$	$x_2$	Результаты эксперимента и проверка воспроизводимости					Проверка адекватности	
				$y_{10}$	$y_{20}$	$y_{30}$	$\bar{y}_u$	$s^2_u$	$\tilde{y}_u$	$(\bar{y}_u - \tilde{y}_u)^2$
1	+	-	-							
2	+	+	-							
3	+	-	+							
4	+	+	+							

$\sum x_i \cdot \bar{y}$				$\sum x_i^2$		$\sum (\bar{y}_u - \tilde{y}_u)^2$
$b_1$				$s^2_{max}$		$s^2_u$
Проверка значимости коэффициентов				$G_{max}$		$F$
$s^2\{y\}$		$s^2\{b_1\}$		$f_1$		$f_1$
$f_{max}$		$s^2\{b_2\}$		$f_2$		$f_2$
$t_{qp}$		$k$		$G_{qp}$		$F_{qp}$
<b>Выводы</b>						
$b_1 \cdot \Delta \tilde{x}$				Линейная модель объекта		
$b_2$				$\tilde{y}(x) =$		

Проверочные и испытательные опыты	k	k $\frac{b_1}{\Delta \tilde{x}_1}$	k $\frac{b_2}{\Delta \tilde{x}_2}$	$\tilde{y}_{пр}$	$x_{1,пр} + kb_1$	$x_{2,пр} + kb_2$
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					
	6					
	7					

Дата \_\_\_\_\_

Ответ проверил \_\_\_\_\_

ОТЧЕТ  
Лабораторная работа №3

Выладыш

Работу выполнил: \_\_\_\_\_  
Вариант № \_\_\_\_\_

Группа: \_\_\_\_\_

Наименьший ротатабельный план второго порядка на шестигульнике

Варьируемые факторы							Обозначения			$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	Уровень значимости  $q=0,05$	
Базовый уровень							0						
Интервал варьирования							$\Delta\tilde{x}_1$						
Верхний уровень для $x_1$							+1						
Нижний уровень для $x_1$							-1						
Верхний уровень для $x_2$							0,866						
Нижний уровень для $x_2$							-0,866						
Верхний промежуточный уровень для $x_1$							+0,5						
Нижний промежуточный уровень для $x_1$							-0,5						
$n$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y_{n1}$	$y_{n2}$	$y_{n3}$	$\bar{y}_n$	$s_n^2$	$\hat{y}_n$	$(\sigma_n - \hat{y}_n)^2$
1	+1	-1	0	0	1	0							
2	+1	+1	0	0	1	0							
3	+1	0,5	0,866	0,433	0,25	0,75							
4	+1	0,5	-0,866	-0,433	0,25	0,75							
5	+1	-0,5	0,866	-0,433	0,25	0,75							
6	+1	-0,5	-0,866	0,433	0,25	0,75							
7	+1	0	0	0	0	0							
$\sum_{i=1}^7 x_{ni} \bar{y}_i$							$\sum_{i=1}^7 x_{ni}^2$			$\sum_{i=1}^7 (\sigma_n - \hat{y}_n)^2$			
Коэфф $b_j$							$s_{n\text{ост}}^2$			$s_{\text{ост}}^2$			
Проверка значимости коэффициентов							$G_{\text{ост}}$			$F$			
$s^2\{y\}$		$s^2\{b_j\}$					$f_1$			$f_{\text{крит}}$			
$f_m$		$s\{b_j\}$					$f_2$			$f_{\text{мин}}$			
$t_{\text{сп}}$		$t_i$					$G_{\text{сп}}$			$F_{\text{сп}}$			
Выводы													
Модель регрессии (полная квадратичная модель)													
$\hat{y} =$													

Дата \_\_\_\_\_

Ответ  
проверил \_\_\_\_\_