

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования**  
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ПЛАНОВАЯ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА**  
**Методические указания для практических занятий**

Направление подготовки – **15.03.02 Технологические машины и  
оборудование**  
Квалификация (степень) выпускника **бакалавр**

Невинномысск 2021

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
Невинномысский технологический институт (филиал)

**ПЛАНОВАЯ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА**  
**Методические указания для лабораторных и практических занятий**

Направление подготовки – 15.03.02 Технологические машины и оборудование  
Квалификация (степень) выпускника бакалавр

Невинномысск, 2021

УДК 66.01  
ББК 35.11  
С24

Печатается по решению УМС НТИ (филиал)  
Северо-Кавказского федерального  
университета

Рецензенты: доцент кафедры химической технологии, машин и аппаратов химических производств, канд. хим. наук *А.Л. Проскурнин*; начальник отдела технического развития АО «Невинномысский Азот» *А.М. Новоселов*

**А.И. Свидченко**

С24 Плановая научно-исследовательская работа: Методические указания для лабораторных и практических занятий / – Невинномысск: Изд-во НТИ (филиал) СКФУ, 2019. – 46 с.

Методические указания подготовлены в соответствии с программой дисциплины «Плановая научно-исследовательская работа», разработанной в соответствии с требованиями ФГОС ВО направления подготовки бакалавров. Последовательно изложены основы теории в соответствии с темой занятия, порядок проведения лабораторных работ, перечень вопросов для обсуждения и самоподготовки. Содержат отдельные теоретические вопросы, примеры и задачи, с расчетами по разделам изучаемого теоретического материала, вынесенным на практические занятия, а также список рекомендуемой литературы. Предназначено для получения знаний по дисциплине «Плановая научно-исследовательская работа» студентами направления подготовки: 15.03.02 Технологические машины и оборудование.

УДК 66.01  
ББК 35.11

© А.И. Свидченко  
© ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Невинномысский технологический институт (филиал), 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
Практическая работа №1. Экспериментальные исследования. Построение корреляционной модели .....	7
Практическая работа №2. Экспериментальные исследования. Построение двухфакторной модели .....	12
Практическая работа №3. Экспериментальные исследования. Проверка адекватности построенных на основе лабораторных измерений моделей .....	16
Практическая работа №4. Экспериментальные исследования. Планирование экспериментов .....	19
Практическая работа №5. Экспериментальные исследования. Проверка адекватности многофакторной модели.....	25
Практическое занятие №6. Проверка экспериментальных измерений на точность, достоверность и воспроизводимость .....	27
Практическое занятие №7, 8. Обработка результатов экспериментальных исследований. Подбор эмпирических формул.....	37
ЛИТЕРАТУРА .....	45

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические указания составлены на современном научном уровне и рассчитаны на студентов, обладающих достаточной подготовкой по разделам дисциплин: информационные технологии, математика, химия, физика, экология, инженерная графика, теоретическая механика и др.

Методические указания составлены для проведения практических занятий курса «Плановая научно-исследовательская работа» (ПНИР) с учетом требований стандарта третьего поколения ФГОС ВО для подготовки бакалавров направления 15.03.02 Технологические машины и оборудование.

При подготовке издания учтены основные изменения в программе дисциплины и тенденции ее развития. Последовательность разделов соответствует логической структуре курса. Предлагаемые методические указания содержат материал, который используется при подготовке и проведении лабораторных и практических занятий.

Содержание методических указаний соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования к содержанию дисциплины «Плановая научно-исследовательская работа Плановая научно-исследовательская работа» для студентов направления 15.03.02 Технологические машины и оборудование.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Изучив этот материал, бакалавр будет:

- знать: - порядок и методы проведения информационных исследований; - методы исследований и проведения экспериментальных работ; - методы экспериментального исследования технологического оборудования;
- уметь: - проводить патентные исследования с целью обеспечения патентной чистоты новых проектных решений и их патентоспособности с определением показателей технического уровня проектируемых изделий; - проводить экспериментальные исследовательские работы и обрабатывать их результаты;
- владеть: - методами составления научных отчетов по выполненному заданию и внедрения результатов исследований и разработок в области машиностроения, процессов и оборудования химических и нефтехимических производств.

Ниже приведены лабораторные работы, примеры и задачи, рассматриваемые по основным темам дисциплины, согласно ФГОС ВО и рабочей учебной программы.

## **Практическая работа №1. Экспериментальные исследования. Построение корреляционной модели**

**Цель:** Практическое построение корреляционной модели (парная корреляция) для связи величин на основе лабораторных измерений (на примере зависимости скорости витания частиц полидисперсного материала от их диаметра).

Организационная форма занятия – традиционная.

### **Вопросы для обсуждения**

1. Чем отличаются статистические измерения от обычных?
2. Корреляционная связь и зависимость величин: сходство и отличия.
3. Методы составления корреляционных уравнений (уравнений регрессии).
4. Задачи, решаемые при помощи уравнений регрессии.

### **Методические рекомендации**

Экспериментальная ПНИР имеет целью закрепление теоретического материала, изученного студентом по дисциплине, и развитие исследовательских умений на практике. Данный вид исследования выполняется, как правило, группой студентов из двух-трех человек в часы лабораторных занятий предусмотренных учебным планом. Такая организация НИР способствует приобретению навыков работы в научном коллективе. В обоснованных случаях задание может поручаться и индивидуально.

Для экспериментального исследования студентам предлагается следующее учебно-исследовательское задание: изучение зависимости скорости витания частиц полидисперсного материала от его характеристик. Выполняется на базе лабораторной работы "Определение гранулометрического состава сыпучего материала по скорости витания".

*Формулировка задачи исследования.* После знакомства с изучаемой темой студенты знакомятся по соответствующей методической разработке с условиями проведения эксперимента, выявляют влияющие независимые параметры

(характеристики сыпучего материала) и формулируют задачу исследования.

При этом целесообразно учесть следующие рекомендации.

Мысленно сформулируйте отношения между неизвестными и известными данными, между данными и условиями эксперимента. Для этого поставьте перед собой вопросы: Что дано? Что нужно экспериментально проверить, получить? Каковы возможные условия выполнения эксперимента?

Формулировку задачи необходимо завершить функциональной записью между зависящей величиной и независимыми параметрами в виде:

$$y=f(x_j) \quad (j=1,2\dots n),$$

где  $j$  - независимый параметр;  $n$  - число независимых параметров.

*Составление плана эксперимента* необходимо провести в следующем порядке.

Уточните и, насколько это возможно, конкретизируйте конечную цель проведения эксперимента. Для этого еще раз осмыслите условие и требование задания.

Выделите промежуточные цели проведения эксперимента, для этого мысленно разберите задачу на подзадачи.

Мысленно представьте все возможные варианты проведения эксперимента.

Выберите из всех возможных вариантов проведения эксперимента наиболее рациональные с точки зрения возможности получить наиболее точный результат при использовании минимума затрат времени.

Поставьте перед собой вопрос и ответьте на него: сколько необходимо опытов для однопараметрической (корреляционной) зависимости при ее линейности? При ее нелинейности?

Запись плана эксперимента должна быть по возможности краткой, отражающей лишь основные его этапы.

Предусмотрите, какие таблицы, рисунки, схемы вам необходимо будет выполнить в процессе эксперимента.

Продумайте, когда и что вам придется измерить в процессе эксперимента,

а что можно вычислить после его выполнения.

Продумайте и предусмотрите в плане, какие приемы и средства могут быть вами использованы.

При составлении плана, если это возможно и необходимо по условию задания, предусмотрите и используйте взаимопомощь взаимоконтроль.

При составлении плана эксперимента стремитесь правильно распределить время на каждый этап его выполнения, уделив больше времени наиболее сложным и трудным этапам.

После составления плана проанализируйте его еще раз. Для этого представьте себе мысленно работу от начала до конца, от конца к началу.

Помните, что хорошо составленный план должен обладать определенной гибкостью, то есть возможностью определенной перестройки ваших действий в случае возникновения затруднений.

*Проведение опытов.* Опыты по исследованию зависимости  $y=f(x_j)$  проводятся в соответствии с составленным планом эксперимента и методической разработкой для конкретной лабораторной работы. Во время эксперимента необходимо соблюдать ряд требований.

Стремитесь провести эксперимент, используя минимальное число приборов и материалов.

Рационально используйте отведенную вам для опытов площадь.

Подумайте, какие процессы в эксперименте можно ускорить, а какие замедлить.

При выполнении задания следите за временем. Укладываетесь ли вы в график времени, предусмотренный планом?

Не расходуете ли вы время на пустые разговоры с товарищем?

Помните, что иногда для экономии времени целесообразно совместить выполнение некоторых этапов (например, проведение расчетов построение графика, и т.д.), не дублировать свою работу с работой товарища.

В целях повышения надежности и объективности эксперимента проводите, где это возможно, не менее трех последовательных замеров каждого факто-

ра (статистические измерения).

*Первичная обработка данных опытов.* Результаты проведенных опытов анализируют с целью выявления промахов и их исключения из массива данных, подлежащих обработке. Далее необходимо усреднить значения факторов для каждого опыта и рассчитать соответствующее значение функции. Все вычисления проводятся согласно указаниям в методических разработках к лабораторным работам, желательно с применением ЭВМ и соответствующих программ.

При изучении корреляционной связи двух величин результаты опытов (У и Х) вносят в таблицу.

*Нахождение коэффициентов уравнения регрессии (функции отклика).* Для корреляционной зависимости между двумя величинами, прежде всего, необходимо построить ее график. При построении графиков следует обращать внимание на следующее.

Связь каких величин представляется на графике? В каких единицах измерения указаны значения физических величин?

В каких пределах изменяются аргумент и функция?

Какой масштаб применен на осях координат?

Какие значения функции соответствуют тем или иным значениям аргумента, и наоборот?

Необходимо учитывать разброс экспериментальных точек, являющийся результатом приближенного характера данных, полученных в ходе измерения.

Каков характер функциональной зависимости, представленной графически?

Какие специфические особенности рассматриваемой функциональной зависимости вы можете отметить?

Каков физический смысл как отдельных участков, так и всего графика в целом?

Для описания зависимости двух величин целесообразно применение нескольких методов. При нелинейности функции необходимо применить "выравнивание" с помощью преобразования координат. Целесообразно проводить об-

работку данных с применением ЭВМ и стандартных программ (Excel, T-FlexCad и др.)

Результаты обработки необходимо записать в виде окончательного уравнения регрессии  $y=f(x_j)$  с найденными численными коэффициентами.

### **Указания по технике безопасности**

Для безопасного проведения занятий в лаборатории кафедры ХТМАХП необходимо:

- проводить работу только в присутствии лаборанта;
- перед началом работы тщательно ознакомиться с методическими указаниями для выполнения работы на конкретной установке;
- выполнять работу в строгом соответствии с методическими указаниями.

### **Методика выполнения работы**

Работу выполняют в соответствии с методическими указаниями, представленными выше и методической разработкой "Определение гранулометрического состава сыпучего материала по скорости витания".

### **Содержание отчета**

В отчете о выполненной работе должны содержаться следующие данные:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Результаты выполнения работы (учебно-исследовательского задания).
4. Выводы по работе.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие данные необходимы для построения корреляционного уравнения для двух величин?
2. Как построить график для выявления корреляционной связи?
3. Как подобрать форму уравнения для описания корреляционной связи двух величин?
4. Как оценить тесноту корреляционной связи?

## **Практическая работа №2. Экспериментальные исследования. Построение двухфакторной модели**

**Цель:** Практическое построение двухфакторной модели (множественная регрессия) для связи величин на основе лабораторных измерений (на примере зависимости скорости осаждения частиц полидисперсного материала от их диаметра и вязкости среды).

Организационная форма занятия – традиционная.

### **Вопросы для обсуждения**

1. Необходимость эмпирических (регрессионных) моделей.
2. Пассивный и активный эксперименты, их достоинства и недостатки.
3. Методы составления регрессионных моделей.
4. Задачи, решаемые при помощи эмпирических моделей.

### **Методические рекомендации**

Для экспериментального исследования студентам предлагается следующее учебно-исследовательское задание: построение двухфакторной модели зависимости скорости осаждения частиц полидисперсного материала от их диаметра и вязкости среды. Выполняется на базе лабораторной работы "Определение скорости осаждения частиц в жидкости".

Как известно, экспериментальное исследование в технических науках должно проводиться так, чтобы можно было получить требуемую информацию, выполнив возможно меньшее число соответствующим образом запланированных опытов. Результаты этих опытов могут быть основой для решения интересующей технологической или иной задачи. Необходимо отметить, что исследователь стремится найти оптимальное решение, то есть определить значения независимых параметров, при которых зависимая переменная (функция) имеет экстремальное значение. Полное изучение процесса или явления достигается редко. При этом должен быть выявлен вид зависимости функции  $y$  от независимых переменных (параметров или факторов)  $x_i$  ( $i= 1, 2, 3...n$ ):

$$y=f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n).$$

Для этого исследуется ряд зависимостей с поочередным сохранением по-

стоянных значений всех независимых переменных, за исключением одной. Например, для двухпараметрической зависимости исследуются:

$$x_2 = \text{const} = B_1, = B_2, = B_m$$

$$y = f(x_1) \quad \text{при} \quad ;$$

$$x_1 = \text{const} = A_1, = A_2, = A_m$$

$$y = f(x_2) \quad \text{при} \quad ,$$

где А и В - постоянные; m - число различных значений (А и В), заданных независимым переменным.

Поясним рассматриваемый случай геометрически. Предположим, что в конкретном случае искомое значение  $y$  лежит на поверхности фигуры (см. рисунок 2.1).

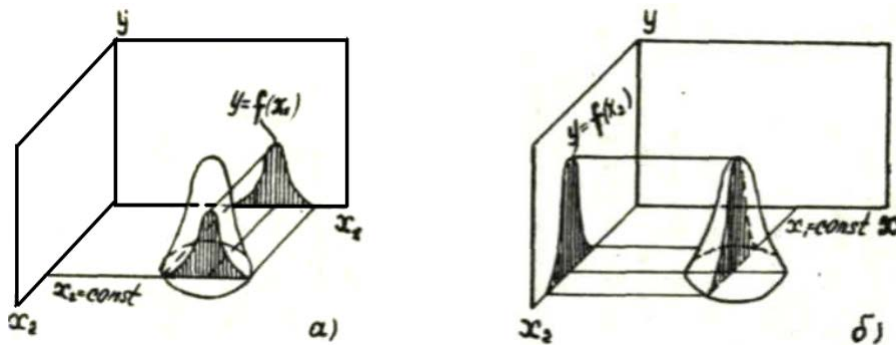


Рисунок 2.1 - Геометрическая интерпретация исследования двухпараметрической зависимости: а)  $y=f(x_1)$ ; б)  $y = f(x_2)$

В результате проведения сечений при  $x_2 = \text{const}$  и  $x_1 = \text{const}$  будем получать функции  $y = f(x_1)$  и  $y = f(x_2)$ . Чем точнее нужно изучить зависимость  $y = f(x_1, x_2)$ , тем больше сечений (m) необходимо исследовать и тем больше будет число необходимых измерений.

Для многопараметрической функции, описывающей технологический процесс или явление, число необходимых измерений очень велико. Может случиться, что даже собранный обширный численный материал недостаточен для определения закона, которому подчиняется ход явления. В этих случаях исследователь вынужден аппроксимировать (описывать) исследуемую зависимость эмпирическим уравнением (уравнением регрессии), например, в виде полинома:

$$y = \epsilon_0 + \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i + \sum_{i < j} \epsilon_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \epsilon_{ij} x_i^2 + \dots \quad (i < j; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$



где  $n$  - число независимых переменных.

Чем больше число измерений  $x$ , тем с большей точностью находятся значения постоянных коэффициентов  $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$ . Чем больше членов полинома принимается во внимание, тем правильнее уравнение описывает изучаемое явление.

Довольно часто в инженерной практике достаточно изучить небольшую область изменения  $y$  и использовать полиномиальное уравнение с двумя первыми членами (линейная аппроксимация) или с тремя (неполное квадратное уравнение).

Вследствие больших затрат труда и времени на полное систематическое изучение процесса или явления исследователь чаще всего довольствуется выборочным исследованием, ведет эксперимент в тех областях, где надеется отыскать оптимальное решение.

#### **Указания по технике безопасности**

Для безопасного проведения занятий в лаборатории кафедры ХТМАХП необходимо:

- проводить работу только в присутствии лаборанта;
- перед началом работы тщательно ознакомиться с методическими указаниями для выполнения работы на конкретной установке;
- выполнять работу в строгом соответствии с методическими указаниями.

#### **Методика выполнения работы**

Работу выполняют в соответствии с методическими указаниями, представленными выше, а также в работе №1, и методической разработкой "Определение скорости осаждения частиц в жидкости".

*Для каждой из исследуемых сред следует провести не менее трех опытов с частицами разного размера.*

Результаты обработки необходимо записать в виде окончательного уравнения регрессии  $y=f(x_j)$  с найденными численными коэффициентами.

#### **Содержание отчета**

В отчете о выполненной работе должны содержаться следующие данные:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Результаты выполнения работы (учебно-исследовательского задания).
4. Выводы по работе.

### **Контрольные вопросы**

1. В чем заключаются задачи экспериментального исследования?
2. Как установить наиболее важные влияющие на функцию параметры (факторы)?
3. Как составить план эксперимента для функции, зависящей от двух параметров?
4. Как определить числовые значения коэффициентов эмпирической модели по экспериментальным данным?

## **Практическая работа №3. Экспериментальные исследования. Проверка адекватности построенных на основе лабораторных измерений моделей**

**Цель:** Практическая оценка работоспособности эмпирических уравнений регрессии одно- и двухфакторных моделей, построенных в работах №1,2.

Организационная форма занятия – занятие с применением ПЭВМ. **Вопросы для обсуждения**

1. Адекватность моделей, описывающих процесс или явление.
2. Методы получения оценок адекватности уравнений регрессии.
3. Интерполяционные и экстраполяционные возможности уравнений регрессии.
4. Формулировка рекомендаций по использованию эмпирических моделей.

### **Методические рекомендации**

Для экспериментального исследования студентам предлагается следующее учебно-исследовательское задание: выполнить практическую оценку работоспособности эмпирических уравнений регрессии одно- и двухфакторных моделей, построенных в работах №1,2

*Проверка математической модели на адекватность.* Проверить модель - это значит установить, что следствия, которые должны из нее вытекать, действительно совпадают с наблюдаемыми явлениями, с результатами эксперимента. Проверая модель необходимо выяснить, не противоречит ли она ранее установленным законам, правилам.

Проверка математической модели на адекватность может быть проведена сравнением расчетов по полученному уравнению с данными контрольных опытов или по результатам программной обработки данных на ЭВМ. Это наиболее часто используемый метод. Причины расхождений следует обсудить. При этом необходимо:

- проанализировать, правдоподобен ли конечный результат, не проти-

воречит ли он физическому смыслу?

- правильны ли единицы измерения конечного результата?

- нельзя ли конечный результат сравнить с какими-либо константами, справочными данными, расчетами по другим известным моделям?

Другие методы оценки работоспособности построенных эмпирических моделей включают расчеты: коэффициентов корреляции, регрессии, среднеквадратической, средней и максимальной ошибок воспроизведения результата измерений (подробнее см. раздел 2, [5]).

#### **Указания по технике безопасности** Для

безопасного проведения занятий в классе ЭВМ необходимо:

– перед началом работы проверить, чтобы ЭВМ была заземлена и все токоведущие части закрыты;

– проводить работу только в присутствии лаборанта;

– выполнять работу в строгом соответствии с методическими указаниями.

#### **Методика выполнения работы** Работу выполняют в

соответствии с изложенными выше рекомендациями

и информацией из дополнительных источников. Необходимо для каждой из моделей рассчитать оценки адекватности и сформулировать области возможного их использования.

#### **Содержание отчета**

В отчете о выполненной работе должны содержаться следующие данные:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Результаты выполнения работы (учебно-исследовательского задания).
4. Выводы по работе.

#### **Контрольные вопросы**

1. Как рассчитывают коэффициенты корреляции и регрессии?
2. Что понимают под среднеквадратичной ошибкой расчета по эмпирическому уравнению?

3. Как оценить среднюю (максимальную) ошибку расчета по эмпирическому уравнению?
4. Как сформулировать рекомендации по применению построенных эмпирических уравнений?

## **Практическая работа №4. Экспериментальные исследования. Планирование экспериментов**

**Цель:** Практическое построение многофакторной модели на основе лабораторных измерений (на примере зависимости коэффициента теплопередачи в теплообменном аппарате от влияющих факторов).

Организационная форма занятия – традиционная.

### **Вопросы для обсуждения**

1. Теория планирования эксперимента и ее достоинства.
2. Области применения факторного эксперимента.
3. Сущность полного факторного эксперимента
4. Сущность дробного факторного эксперимента.

### **Методические рекомендации**

Для экспериментального исследования студентам предлагается следующее учебно-исследовательское задание: изучение зависимости коэффициента теплопередачи в трубчатом теплообменнике от условий процесса. Выполняется на базе лабораторной работы «Определение коэффициента теплопередачи в теплообменнике типа "труба в трубе"».

Теория планирования эксперимента дает возможность избежать излишне длительных и дорогостоящих исследований и одновременно достаточно точно составить план решения задачи при минимально необходимом числе опытов. Теория планирования эксперимента нашла широкое применение в области химии, физики, технологии.

Обычно сначала выполняется небольшое число предварительных опытов, позволяющих исключить те области, в которых отсутствуют перспективы достижения оптимального решения. При этом определяется предположительное направление исследований и планируется первый этап экспериментов. На первых этапах исследования чаще всего достаточно аппроксимировать результат линейным полиномом. Для области, близкой к оптимуму, необходимо использовать полином более высокой степени.

В работе над эволюционным развитием новой технологической концепции используются данные различного происхождения:

- результаты пассивных наблюдений, то есть собранная информация о явлении, на протекание которого не оказывается влияния (например, наблюдение технологического процесса на заводе);

- результаты активного эксперимента, при проведении которого фиксируются значения независимых параметров (факторов), например  $P$ ,  $T$ ,  $x$  и т.д., оказывающих решающее влияние на ход явления, и измеряются значения зависимой переменной  $y$  (то есть находится функция отклика).

Пассивных наблюдений часто недостаточно для определения оптимальных условий проведения процесса. Объясняется это тем, что в установившемся процессе значения независимых параметров колеблются в сравнительно узких пределах. Поэтому затруднительно установить, какое влияние на ход процесса окажут эти параметры при их изменении в более широких пределах. Таким образом, при проведении научного исследования, решающая роль отводится активному эксперименту.

*Полный факторный эксперимент.* Рассмотрим планирование исследований на примере составления плана полного факторного эксперимента, достаточного для определения коэффициентов  $b_i$  аппроксимационного полинома. В целях установления влияния изменения независимых параметров - факторов - будем исследовать процесс при двух значениях каждого фактора: верхнем  $X_1'$ ,  $X_2'$ ...  $X_n'$  и нижнем  $X_1''$ ,  $X_2''$  ...  $X_n''$ .

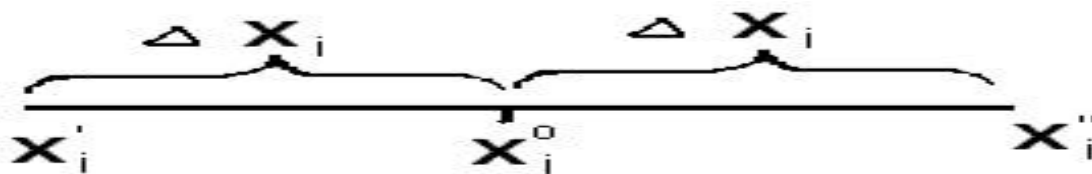
Интервалом варьирования фактора назовем половину удаленности одного уровня от другого:

$$\Delta x_1 = \frac{x_1' - x_1''}{2}; \quad \Delta x_2 = \frac{x_2' - x_2''}{2}; \quad \dots \quad \Delta x_n = \frac{x_n' - x_n''}{2};$$

Основной (нулевой) уровень расположен посередине между верхним и нижним уровнями:

$$x_{i0} = \frac{x_i' + x_i''}{2}; \quad x_{20} = \frac{x_2' + x_2''}{2}; \quad \dots \quad x_{n0} = \frac{x_n' + x_n''}{2};$$

Графически можно представить так:



верхний уровень      интервал варьирования      нулевой уровень      нижний уровень

Введем новое кодовое обозначение независимых параметров  $x_1, x_2 \dots x_n$  следующим образом:

$$x = \frac{\text{разность между данным уровнем и основным}}{\text{интервал варьирования}}$$

Значения кодовых параметров для верхнего и нижнего уровней соответственно равны:

При составлении матрицы планирования эксперимента единицу опускают и пишут для верхнего уровня (+), а для нижнего (-).

**Пример.** Составить план полного факторного эксперимента для случая, когда зависимая переменная  $y$  является функцией независимых переменных (факторов)  $x_1$  и  $x_2$ . Будем считать, что эксперимент достаточно провести на двух уровнях, а зависимость (функцию отклика) можно представить неполным уравнением второй степени:

$$y = b_{00} x_0 + b_{11} x_1 + b_{22} x_2 + b_{12} x_1 x_2 \quad (*)$$

где  $x_0 = 1$ ,  $b_i$  – коэффициенты уравнения регрессии.

Для полного факторного эксперимента число опытов равно

$$N = M^m,$$

где  $M$  - число уровней,  $m$  - число независимых переменных.

Для рассматриваемого случая  $M = 2$ ,  $m = 2$  и  $N = 2^2 = 4$  опыта. Тогда матрица плана будет иметь вид, представленный в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Матрица планирования полного факторного эксперимента

Номер опыта j	Значение фактора $x_i$				$y_j^{*)}$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	
1	+	-	-	+	186
2	+	+	-	-	213

3	+	-	+	-	149
4	+	+	+	+	173

\*) Даны значения  $y_j$  для числового примера, рассматриваемого ниже.

В столбце  $x_0$  всегда пишут +1, т.е. (+). Значения  $x_1$  и  $x_2$  записываются в четырех различных возможных комбинациях. Значения  $x_1x_2$  находятся перемножением  $x_1$  и  $x_2$ . Для составленных таким образом условий опыта (фактические значения независимых переменных используются при реализации эксперимента) определяются значения  $y_j$ :  $y_1, y_2, y_3, y_4$ . имея таблицу плана и значения  $y_j$ , рассчитывают коэффициенты уравнения регрессии  $b_i$  по методу наименьших квадратов (см. раздел 2, [5]) по формулам, непосредственно вытекающим из него:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^N y_j}{N} ; \quad b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} y_j}{N}$$

Поясним рассматриваемый случай численным примером.

При исследовании теплопередачи на модели кожухотрубчатого теплообменного аппарата зависимость коэффициента теплопередачи от влияющих факторов была представлена в виде

$$k = f(t_1', G_2),$$

где  $t_1 = X_1$  - температура горячего теплоносителя на входе в аппарат, °C;  $G_2 = X_2$  - расход холодного теплоносителя в аппарате в % по ротаметру.

В качестве функции отклика использовали уравнение (\*). При реализации опытов в соответствии с планом (таблица 1.1) и значениями  $X_1^0 = 60^\circ\text{C}$ ,  $\Delta X_1 = 10$ ,  $X_2 = 70\%$ ,  $\Delta X_2 = 20$  были получены значения коэффициентов теплопередачи, приведенные в таблице 1.1 в Вт/(м<sup>2</sup>К). Расчет коэффициентов регрессии дает

$$b_0 = \frac{186 + 213 + 149 + 173}{4} = 180,25$$

$$b_1 = \frac{(-1) \cdot 186 + (+1) \cdot 213 + (-1) \cdot 149 + (+1) \cdot 173}{4} = 12,75$$

$$b_2 = \frac{(-1) \cdot 186 + (-1) \cdot 213 + (+1) \cdot 149 + (+1) \cdot 173}{4} = -19,25$$

$$e = \frac{(+1) \cdot 186 + (-1) \cdot 213 + (-1) \cdot 149 + (+1) \cdot 173}{4} = -0,75$$

Таким образом, функция отклика в кодированных обозначениях записывается в виде

$$k = y - 180,25 + 12,75x_1 - 19,25x_2 - 0,75x_1x_2$$

Переход к фактическим параметрам на основе уравнения связи дает

$$k = 180,25 + 12,75 \frac{t_1 - 60}{10} - 19,25 \frac{G_2 - 70}{20} - 0,75 \frac{t_1 - 60}{10} \times \frac{G_2 - 70}{20}$$

или

$$k = 180,25 + 1,275(t_1 - 60) - 0,9625(G_2 - 70) - 0,375 \cdot 10^{-2} (t_1 - 60) \times (G_2 - 70)$$

*Дробный факторный эксперимент.* В уравнении (\*) произведение  $x_1x_2$  - это эффект взаимодействия факторов, выражающий отклонение функции отклика у от линейной зависимости. Когда нужно исследовать небольшую область зависимости у от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , обычно достаточно линейной аппроксимации. Если известно, что эффекты взаимодействия некоторых независимых переменных отсутствуют, можно опустить произведения этих факторов. В таких случаях нет необходимости в полном факторном эксперименте и применяется дробный факторный эксперимент (подробнее см. литературу).

### Методика выполнения работы

Работу выполняют в соответствии с методическими рекомендациями, представленными выше, и методической разработкой «Определение коэффициента теплопередачи в теплообменнике типа "труба в трубе"».

Результаты факторного эксперимента необходимо записать в виде окончательного уравнения регрессии  $y=f(x_i)$  с найденными численными коэффициентами.

### Содержание отчета

В отчете о выполненной работе должны содержаться следующие данные:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Результаты выполнения работы (учебно-исследовательского задания).

4. Выводы по работе.

#### **Контрольные вопросы**

1. Когда возникает необходимость планирования эксперимента?
2. Что понимают под факторным экспериментом?
3. Как проводится факторный эксперимент?
4. Как обрабатывают результаты измерений факторного эксперимента?
5. Как представить результаты факторного эксперимента?

## **Практическая работа №5. Экспериментальные исследования. Проверка адекватности многофакторной модели**

**Цель:** Практическая оценка работоспособности эмпирического уравнения регрессии многофакторной модели, построенной в работе №4.

Организационная форма занятия – занятие с применением ПЭВМ. **Вопросы для обсуждения**

1. Алгоритмы оценки адекватности уравнений регрессии.
2. Значимость коэффициентов уравнения регрессии.
3. Формы возможного представления уравнения регрессии.
4. Оценка рекомендаций по использованию многофакторной модели.

### **Методические рекомендации**

Для экспериментального исследования студентам предлагается следующее учебно-исследовательское задание: выполнить практическую оценку работоспособности эмпирического уравнения регрессии многофакторной модели, построенной в работе №4.

### **Указания по технике безопасности**

Для безопасного проведения занятий в классе ЭВМ необходимо:

- перед началом работы проверить, чтобы ЭВМ была заземлена и все токоведущие части закрыты;
- проводить работу только в присутствии лаборанта;
- выполнять работу в строгом соответствии с методическими указаниями.

### **Методика выполнения работы**

Работу выполняют в соответствии с изложенными выше рекомендациями и информацией из дополнительных источников. Необходимо для многофакторной модели рассчитать оценки адекватности и сформулировать области возможного использования.

### **Содержание отчета**

В отчете о выполненной работе должны содержаться следующие данные:

1. Название работы.

2. Цель работы.
3. Результаты выполнения работы (учебно-исследовательского задания).
4. Выводы по работе.

### **Контрольные вопросы**

1. Как рассчитывают коэффициенты уравнения регрессии для факторного эксперимента?
2. Как определяют уровень значимости коэффициентов уравнения модели?
3. Что понимают под среднеквадратичной ошибкой расчета по уравнению модели?
4. Как оценивают среднюю ошибку расчета по уравнению модели?
5. Как сформулировать рекомендации по применению эмпирической модели?

## **Практическое занятие №6. Проверка экспериментальных измерений на точность, достоверность и воспроизводимость**

**Цель:** Практическое освоение методов статистической обработки массивов измеренных экспериментальных данных.

Организационная форма занятия – занятие с применением ПЭВМ.

### **Методические рекомендации**

Точность измерений характеризуется доверительным интервалом ( $2\mu$ ).

Половина доверительного интервала равна:

$$\mu = \sigma_0 \arg \phi(p_D) = \sigma_0 t \equiv \sigma_0 \alpha_{ст}, \quad (1.1)$$

где  $\arg \phi(p_D)$  – аргумент функции Лапласа (таблица П-1 [1]), а при  $n < 30$  – функции Стьюдента (таблица П-2 [1]);  $\sigma_0$  – среднеарифметическое значение среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ , равное  $\sigma_0 = \sigma / \sqrt{n}$ .

При нормальном законе распределения погрешность, превышающая доверительный интервал, будет встречаться один раз из  $n_{и}$  измерений, где

$$n_{и} = p_D / (1 - p_D) \quad (1.2)$$

или иначе приходится браковать одно из  $n_{и}$  измерений.

Минимальное число измерений, необходимое для проведения опыта с заданной точностью и достоверностью, определяется по формуле:

$$N_{\min} = \sigma^2 t^2 / \Delta^2 = k_B^2 t^2 / \Delta^2, \quad (1.3)$$

где  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение;  $k_B$  – коэффициент вариации (изменчивости), %;  $\Delta$  – точность измерений, %.

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1), \quad k_B = \sigma / \bar{x}, \quad (1.4)$$

где  $\bar{x}$  – среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{или} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m m_i \cdot x_i, \quad (1.5)$$

где  $m_i$  – частота появления результата измерения.

Для исключения грубых ошибок статистического ряда известно несколько методов.

Наиболее простым способом исключения из ряда резко выделяющегося измерения является правило трех сигм: разброс случайных величин от среднего значения не должен превышать

$$X_{\max, \min} = \bar{x} \pm 3\sigma. \quad (1.6)$$

Более достоверными являются методы, базируемые на использовании доверительного интервала.

Пусть имеется статистический ряд малой выборки, подчиняющийся закону нормального распределения. При наличии грубых ошибок критерии их появления вычисляются по формулам

$$\beta_1 = (x_{\max} - \bar{x}) / \sigma \sqrt{(n-1)/n}; \quad (1.7)$$

$$\beta_2 = (\bar{x} - x_{\min}) / \sigma \sqrt{(n-1)/n}, \quad (1.8)$$

где  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  – наибольшее и наименьшее значения из  $n$  измерений.

В таблице П-3 приложения [1] приведены в зависимости от доверительной вероятности максимальные значения  $\beta_{\max}$ , возникающие вследствие статистического разброса. Если  $\beta_1 > \beta_{\max}$ , то значение  $x_{\max}$  необходимо исключить из статистического ряда как грубую погрешность. При  $\beta_2 < \beta_{\max}$  исключается величина  $x_{\min}$ . После исключения грубых ошибок определяют новые значения  $\bar{x}$  и  $\sigma$  из  $(n-1)$  или  $(n-2)$  измерений.

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Задача 1.1. Выполнено  $n$  измерений прочности дорожного покрытия участка автомобильной дороги при среднем модуле упругости одежды  $E$  и вычисленном значении среднеквадратического отклонения  $\sigma$ . Определить требуемую точность измерений для разных уровней доверительной вероятности

( $p_d = 0,9; 0,95; 0,9973$ ), приняв значения  $t$  по таблице П-1. Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Задача 1.2. По данным задачи 1.1 определить достоверность измерений для установленного доверительного интервала  $\mu$ . Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Задача 1.3. По данным задачи 1.1 вычислить количество измерений, из которых одно измерение превышает доверительный интервал.

Таблица 1.1 – Исходные данные к задачам 1.1, 1.2

№ варианта	n	модуль упругости E, МПа	среднеквадратическое отклонение, МПа	доверительный интервал, ±МПа	№ варианта	n	модуль упругости E, МПа	среднеквадратическое отклонение, МПа	доверительный интервал, ±МПа
1	21	170	3,1	7	9	29	160	2,9	7
2	22	175	3,0	6	10	30	165	3,2	6
3	23	180	2,9	5	11	29	170	3,3	5
4	24	160	3,2	8	12	28	175	2,9	8
5	25	165	3,3	7	13	27	180	3,1	7
6	26	170	3,0	6	14	26	160	3,0	6
7	27	175	3,1	5	15	25	165	2,9	5
8	28	180	3,0	8	16	24	170	3,2	8

Задача 1.4. При приемке сооружений комиссия в качестве одного из параметров замеряет их ширину. Согласно инструкции требуется выполнять 25 измерений; допускаемое отклонение параметра  $\pm 0,1$  м. Предварительно вычисленное значение  $\sigma = 0,4$  м. Определить, с какой достоверностью комиссия оценивает данный параметр. Исходные данные принять по таблице 1.2.

Задача 1.5. При разработке технологических условий на качество нефтяной дизельной фракции измерялась её температура застывания. В зависимости от различных факторов эта величина принимала значения, приведенные в таблице 1.3. Измерения проводились ртутным термометром с ценой деления шкалы  $0,2^\circ\text{C}$ . Определить нормативную температуру застывания фракции для внесения её в ТУ; оценить погрешность измерения этой величины.

Таблица 1.2 – Исходные данные к задаче 1.4

№варианта	Число измерений, n	Отклонение параметра, ±м	среднеквадратическое отклонение, м	№варианта	Число измерений, n	Отклонение параметра, ±м	среднеквадратическое отклонение, м
1	25	0,05	0,3	9	25	0,12	0,3
2	35	0,06	0,4	10	35	0,11	0,4
3	25	0,07	0,5	11	25	0,1	0,5
4	35	0,08	0,3	12	35	0,09	0,4
5	25	0,09	0,4	13	25	0,08	0,3
6	35	0,1	0,5	14	35	0,07	0,5
7	25	0,11	0,4	15	25	0,06	0,4
8	35	0,12	0,5	16	35	0,05	0,3

Таблица 1.3 – Экспериментальные данные по температуре застывания нефтяной дизельной фракции

№вариант а	т <sub>заст</sub>	—частота	№варианта	т <sub>заст</sub>	—частота	№варианта	т <sub>заст</sub>	—частота
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-18	1	6	-18	1	11	-18	1
	-17	1		-17	1		-17	2
	-16	12		-16	15		-16	10
	-15	36		-15	40		-15	35
	-14	50		-14	56		-14	48
	-13	5		-13	7		-13	6
	-12	1		-12	1		-12	2
	-11	1		-11	1		-11	1
2	-19	1	7	-19	1	12	-19	1
	-18	1		-18	1		-18	1
	-17	10		-17	11		-17	14
	-16	31		-16	32		-16	35
	-15	51		-15	52		-15	55
	-14	4		-14	5		-14	7

Продолжение таблицы 1.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	-13	2		-13	2		-13	1
	-12	1		-12	1		-12	1
3	-17	1	8	-17	1	13	-17	1
	-16	2		-16	2		-16	1
	-15	11		-15	12		-15	13
	-14	37		-14	38		-14	39
	-13	49		-13	50		-13	53
	-12	4		-12	5		-12	6
	-11	2		-11	2		-11	1
	-10	1		-10	1		-10	1
4	-18	1	9	-18	1	14	-18	1
	-17	1		-17	1		-17	1
	-16	12		-16	14		-16	16
	-15	30		-15	32		-15	39
	-14	55		-14	52		-14	57
	-13	5		-13	4		-13	6
	-12	1		-12	1		-12	2
	-11	1		-11	1		-11	1
5	-17	1	10	-17	1	15	-17	1
	-16	1		-16	2		-16	2
	-15	8		-15	7		-15	5
	-14	28		-14	35		-14	37
	-13	44		-13	50		-13	52
	-12	3		-12	4		-12	5
	-11	1		-11	2		-11	1
	-10	1		-10	1		-10	1

Таблица 1.4 – Температура выкипания топлива

1	2		4	6		7	8	
	3	5		9	10			
ари анг а	ы к 9 0 %, °C		Невари анта	в ы к 90 %, °C		Невари анта	ы к 9 0 %, °C	
	по-			по-			по-	
1	197	1	6	198	1	11	197	1
	199	1		199	1		199	2
	201	3		202	4		202	2
	203	11		203	11		203	12
	205	9		205	10		205	11

Продолжение таблицы 1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	207	21		206	20		206	20
	209	12		207	11		207	9
	211	12		210	9		210	8
	215	1		212	1		211	3
	217	1		215	1		216	2
2	197	1	7	196	1	12	197	1
	199	2		198	1		198	1
	201	2		202	5		201	2
	203	10		203	10		203	11
	205	12		205	9		205	12
	207	21		206	21		206	22
	209	12		207	11		207	10
	211	12		210	8		210	7
	213	1		213	2		212	1
	215	1		217	1		214	1
3	197	1	8	198	1	13	197	1
	199	1		199	1		198	2
	201	2		201	5		201	3
	203	9		203	10		203	10
	205	12		205	9		205	11
	206	22		206	21		206	19
	209	11		209	11		207	9
	212	10		211	8		210	8
	214	1		215	2		213	2
	214	1		216	1		215	1
4	197	1	9	196	1	14	197	1
	198	1		197	1		198	1
	200	2		201	4		201	1
	202	9		203	11		203	11
	206	12		205	10		205	13
	207	22		206	21		206	21
	209	11		209	11		207	10
	211	10		211	9		210	11
	214	1		213	1		213	1
	217	1		216	1		215	1

Продолжение таблицы 1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	197	1	10	196	1	15	197	1
	198	2		197	1		198	1
	201	4		201	5		201	3
	202	12		203	11		203	12
	206	15		205	12		205	13
	207	20		206	21		206	23
	209	10		209	11		207	8
	211	9		211	8		210	9
	213	2		214	1		212	1
	215	1		217	1		214	1

Задача 1.6. При разработке технических условий на качество реактивного топлива измерялась температура выкипания 90% исходной фракции. В зависимости от разных факторов эта величина принимала значения, приведенные в таблице 1.4. Измерения проводились ртутным термометром с ценой деления шкалы 0,2°C. Определить нормативную температуру выкипания 90% топлива для внесения её в ТУ. Оценить погрешность измерения этой величины.

Задача 1.7. Используя критерий Стьюдента, исключить грубую погрешность из ряда измерений температур (таблица 1.5).

Таблица 1.5 – Результаты измерений температуры к задаче 1.7

№ п/п	$t, ^\circ\text{C}$														
	Вариант														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	30	30	29	28	31	25	24	33	21	22	26	27	25	29	22
2	35,5	36	34	33	36,5	31	30	39	27	28	32	33	30,5	33,5	27,5
3	31	31	30	29	32	26	25	34	22	23	27	28	26	30	23
4	32	32	31	30	33	27	26	35	23	24	28	29	27	31	24

Задача 1.8. Было выполнено пять измерений температуры некоторого объекта в одной и той же точке и получены значения температуры, приведенные в таблице 1.6. Определить: 1) интервал, в котором с вероятностью  $P = 0,95$  находится истинное значение измеренной температуры; 2) относительную погрешность измерения; 3) проверить результат на наличие грубой погрешности.

Задача 1.9. Выполнено  $n$  измерений температуры объекта (таблица 1.8). Анализ средств и результатов измерений показал, что систематических ошибок в эксперименте не обнаружено. Определить: 1) не содержат ли измерения грубых ошибок используя: а) критерий  $\beta_{\max}$ , б) правило  $3\sigma$ ; 2) доверительный интервал; 3) действительное значение изучаемой величины; 4) минимальное количество измерений при заданной точности (таблица 1.8). Для удобства обработки данных рекомендуется заполнить таблицу по форме таблицы 1.7.

Таблица 1.6 – Результаты измерений температур к задаче 1.8

	$t_1,$	$t_2,$	$t_3,$	$t_4,$	$t_5,$		$t_1,$	$t_2,$	$t_3,$	$t_4,$	$t_5,$
	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$		$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{C}$
1	32,8	34,3	35,6	35,8	37,5	9	33,1	34,6	35,9	36,1	37,8
2	33,8	35,3	36,6	36,8	38,5	10	30,1	31,6	32,9	33,1	34,8
3	32,5	34,0	35,3	35,5	37,2	11	31,2	32,7	34,0	34,2	35,9
4	33,6	35,1	36,4	36,6	38,3	12	31,5	33,0	34,3	34,5	36,2
5	32,6	34,1	35,4	35,6	37,3	13	31,6	33,1	34,4	34,6	36,3
6	32,9	34,3	35,7	35,9	37,6	14	32,4	33,9	35,2	35,4	37,1
7	33,0	34,4	35,6	36,0	37,7	15	33,4	34,9	36,2	36,4	38,0
8	32,7	34,2	35,5	35,7	37,4						

Таблица 1.7 – Результаты измерений и их обработки для задачи 1.9

$x_i$	$x_i - \bar{X}$	$x_i - X'$	$(x_i - X')^2$
...	...	...	...

Примечание:

1) среднеарифметическое значение величины  $X = X' + (x_i - X') / n$ , где  $X'$  – среднее произвольное число.

2) В формуле (1.4) значение  $(x_i - X')^2$  находится упрощенным методом:

$$(x_i - X')^2 = \sum (x_i - X') - \frac{(x_i - X')^2}{n}.$$

Таблица 1.8 – Исходные данные к задаче 1.9

$x_i$														
Вариант														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
67	66	67	57	59	58	59	61	60	61	61	63	63	62	65
67	67	67	57	59	59	59	61	61	62	62	64	64	63	66
68	68	68	58	61	60	61	63	63	63	63	65	65	65	67
68	68	69	58	61	61	61	63	64	63	63	65	65	65	67

Продолжение таблицы 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
69	69	69	59	62	62	62	64	64	64	64	66	66	66	68
70	70	70	60	63	63	63	65	65	64	65	66	66	67	68
71	71	71	61	64	64	64	66	66	66	66	68	68	68	70
73	72	73	63	66	66	66	68	67	68	66	70	70	70	72
74	74	74	64	68	67	68	70	70	70	68	72	72	71	74
75	75	75	65	68	67	68	70	71	70	70	72	72	72	74
76	75	76	66	69	69	69	71	71	71	71	73	73	73	75
77	77	76	67	70	70	70	72	72	72	71	74	74	74	76
78	78	78	68	71	71	71	73	73	72	72	74	74	74	76
79	79	79	69	72	71	72	75	75	74	74	76	76	76	78
80	80	80	70	73	73	73	75	75	75	75	77	77	77	79
81	81	81	71	74	74	74	76	76	76	76	78	78	78	80
82	92	83	72	75	85	75	77	87	77	87	79	89	89	81
92	-	92	82	85	-	85	87	-	87	-	89	-	-	99

Задача 1.10. Проведено три серии опытов по измерению прочности грунта методом пенетрации (таблица 1.9). В каждой серии выполнялось по пять измерений (повторностей). Проверить эксперимент на воспроизводимость результатов.

Таблица 1.9 – Результаты измерений грунта методом пенетрации

Измерение величины/повторности	Вариант	Серии опытов			Вариант	Серии опытов			Вариант	Серии опытов		
		1	2	3		1	2	3		1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	7	9	8	6	8	7	9	11	7	8	8
2		9	7	8		7	9	7		9	7	8
3		6	8	7		7	6	8		6	8	7
4		8	6	9		9	8	5		6	6	9
5		4	5	8		8	5	5		5	4	6
1	2	7	7	8	7	7	9	8	12	7	9	9
2		9	7	9		9	7	8		9	7	8
3		5	8	7		6	8	7		8	8	7
4		8	6	9		8	6	9		8	6	6
5		6	5	8		4	5	8		4	5	8

Продолжение таблицы 1.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	5	7	8	8	6	5	9	13	8	7	8
2		6	7	8		7	7	8		6	7	8
3		7	6	7		7	6	7		7	6	7
4		8	7	6		8	7	6		8	6	6
5		8	5	6		9	8	4		6	4	5
1	4	7	8	7	9	7	7	8	14	7	9	8
2		9	7	9		9	7	9		9	7	8
3		6	7	6		5	8	7		6	8	7
4		8	9	6		8	6	9		8	6	9
5		4	8	5		6	5	5		5	5	5
1	5	6	8	8	10	7	9	8	15	7	8	7
2		9	7	8		9	7	9		7	7	9
3		6	7	7		5	8	7		6	7	6
4		6	6	9		8	6	9		8	9	6
5		7	4	5		6	5	4		5	6	5

**Методика выполнения работы**

Работу выполняют по вариантам, задаваемым преподавателем, в соответствии с методическими указаниями и исходными данными, приведенными выше. Для проведения расчетов с помощью ПЭВМ рекомендуется использовать возможности Excel.

**Контрольные вопросы**

1. Что понимают под погрешностью измерений и чем она вызвана?
2. Что понимают под результатом статистического измерения и как его записывают?
3. Объясните термины: точность, достоверность и воспроизводимость измеренной величины.
4. Что понимают под доверительной вероятностью результата измерения и как она определяется?
5. Какова цель оценки результатов измерений?

## Практическое занятие №7,8. Обработка результатов экспериментальных исследований. Подбор эмпирических формул

**Цель:** Практическое освоение методов средних и наименьших квадратов при подборе эмпирических формул.

Организационная форма занятия – занятие с применением ПЭВМ.

### Методические рекомендации

*Метод средних* является относительно простым, но и менее точным способом определения параметров формул.

Для определения параметров линейной функции

$$y_i = a + bx_i, \quad (i=1, 2, 3 \dots n), \quad (2.1)$$

где  $n$  – число уравнений;  $y_i$ ,  $x_i$  – соответствующие пары значений, необходимо все уравнения для имеющихся пар разбить на две примерно равные группы с числом наблюдений  $k$  и  $n-k$  и приравнять сумму их отклонений к нулю. Тогда получается, что

$$\sum_{i=1}^k y_i = ka + b \sum_{i=1}^k x_i; \quad (2.2)$$
$$\sum_{i=k+1}^n y_i = (n-k)a + b \sum_{i=k+1}^n x_i.$$

Решая систему уравнений, можно определить коэффициенты  $a$  и  $b$ .

Ниже приведен пример использования метода средних для определения параметров нелинейной функции.

**Пример 2.1.** Пусть проведено семь измерений температуры во времени и получены следующие результаты:

$$t_1 = 4\text{с}; \quad t_2 = 5\text{с}; \quad t_3 = 6\text{с}; \quad t_4 = 7\text{с}; \quad t_5 = 8\text{с}; \quad t_6 = 9\text{с}; \quad t_7 = 10\text{с}.$$

$$t_1 = 10,2\text{ C}; \quad t_2 = 6,7\text{ C}; \quad t_3 = 4,8\text{ C}; \quad t_4 = 3,6\text{ C}; \quad t_5 = 3,6\text{ C}; \quad t_6 = 2,1\text{ C};$$

$$t_7 = 1,7\text{ C}.$$

Необходимо подобрать эмпирическую формулу второй степени для описания связи двух величин в виде:

$$t = b_0 + b_1 T + b_2 T^2,$$

описывающую закон изменения температуры во времени.

Подставив полученные значения температуры в эту формулу и разбив систему уравнений на три группы (1–2, 3–4, 5–7), получим:

$$b_0 + 4b_1 + 16b_2 = 10,2;$$

$$b_0 + 6b_1 + 36b_2 = 4,8;$$

$$b_0 + 7b_1 + 49b_2 = 3,6;$$

$$b_0 + 8b_1 + 64b_2 = 2,7;$$

$$b_0 + 9b_1 + 81b_2 = 2,1;$$

$$b_0 + 10b_1 + 100b_2 = 1,7.$$

После сложения уравнений в каждой из групп будем иметь систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$2b_0 + 9b_1 + 41b_2 = 16,9;$$

$$2b_0 + 13b_1 + 85b_2 = 8,4;$$

Решение этой системы уравнений дает:  $b_0=26,17$ ;  $b_1=-5,217$ ;  $b_2=0,2811$ .

Следовательно, эмпирическая формула имеет следующий вид:

$$t \text{ C} = 26,17 - 5,217T + 0,2811T^2,$$

где время  $t$  выражено в секундах.

**Метод наименьших квадратов** является более точным методом определения коэффициентов эмпирической формулы по сравнению с методом средних.

Сущность метода наименьших квадратов сводится к определению коэффициентов уравнения регрессии, обеспечивающих минимум суммы квадратов отклонений экспериментальных данных от значений, вычисленных по уравнению регрессии, т.е. минимум функции:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_{pi} - y_{zi})^2,$$

где  $y_p$  и  $y_z$  – соответственно расчетная и экспериментальная величины;  $n$  – чис-

ло экспериментальных точек.

Минимум функции  $\Phi$  возможен при равенстве нулю всех частных производных этой функции по искомым параметрам  $a_i$ , т.е.:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0.$$

Таким образом, можно получить систему нормальных уравнений, решив которую можно получить коэффициенты уравнения регрессии, поскольку количество неизвестных равно числу нормальных уравнений.

Если расчетная зависимость имеет вид полинома, то

$$\Phi = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^j - y_i = \min, \quad (2.3)$$

где  $m$  – максимальная степень полинома.

Частные производные образуют систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^{j-1} - y_i = 0; & \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^j &= \sum_{i=1}^n y_i; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^j - y_i \cdot x_i = 0; & \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^{j+1} &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^j - y_i \cdot x_i^2 = 0; & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m a_j \cdot x_i^j - y_i \cdot x_i^n = 0. & \dots & \end{aligned} \quad (2.4)$$

Например, если функция имеет линейный вид ( $m = 1$ ), т.е.  $y = a_0 + a_1 \cdot x$ , то система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i) &= \sum_{i=1}^n y_i; \\ \sum_{i=1}^n (a_0 \cdot x_i + a_1 x_i^2) &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i \end{aligned} \quad (2.5)$$



$$n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i ; \quad (2.6)$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i.$$

Для квадратичного уравнения вида  $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$  ( $m = 2$ ) система будет состоять из трех нормальных уравнений

$$\sum_{i=1}^1 (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2) = \sum_{i=1}^1 y_i; \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^1 (a_0 \cdot x_i + a_1 \cdot x_i^2 + a_2 \cdot x_i^4) = \sum_{i=1}^1 y_i \cdot x_i;$$

$$\sum_{i=1}^1 (a_0 \cdot x_i^2 + a_1 \cdot x_i^3 + a_2 \cdot x_i^4) = \sum_{i=1}^1 y_i \cdot x_i^2$$

или

$$n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i ; \quad (2.8)$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i ;$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^2.$$

Таким образом, при использовании многочлена любой степени в системе уравнений постепенно увеличивается степень переменной  $x$ .

Если сходимость результатов различна на разных отрезках кривой, целесообразно рассчитать отдельно уравнения регрессии для каждого отрезка.

**Пример 2.2.** Провести аппроксимацию методом наименьших квадратов зависимости вязкости некоторой жидкости от температуры (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Исходные данные о динамическом коэффициенте вязкости жидкости при различных температурах

Температура, °C (x)	10	20	30	40	50	60	70	80
Вязкость, мПа·с (y)	2,47	1,79	1,33	1,04	0,85	0,71	0,62	0,57

Примем, что уравнение регрессии будет иметь вид ( $m = 2$ ):

40

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2.$$

Для того чтобы составить систему нормальных уравнений из 3-х (по количеству неизвестных коэффициентов), заполним таблицу (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – К расчету коэффициентов уравнения регрессии при  $m=2$

i	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$y_i \cdot x_i$	$y_i \cdot x_i^2$
1	10	2,47	100	1000	10000	24,7	247
2	20	1,79	400	8000	160000	35,8	716
3	30	1,33	900	27000	810000	39,9	1197
4	40	1,04	1600	64000	2560000	41,6	1664
5	50	0,85	2500	125000	6250000	42,5	2125
6	60	0,71	3600	216000	12960000	42,6	2556
7	70	0,62	4900	343000	24010000	43,4	3038
8	80	0,57	6400	512000	40960000	45,6	3648
$\Sigma$	360	9,38	20400	1296000	87720000	316,1	15191

Составим систему уравнений:

$$8 \cdot a_0 + a_1 \cdot 360 + a_2 \cdot 20400 = 9,38;$$

$$a_0 \cdot 360 + a_1 \cdot 20400 + a_2 \cdot 1296000 = 316,1;$$

$$a_0 \cdot 20400 + a_1 \cdot 12960000 + a_2 \cdot 87720000 = 15191.$$

Из первого уравнения:  $a_0 = 1,1725 - 45 \cdot a_1 - 2550 \cdot a_2$ .

Подставив это выражение в два других, получим:

$$422,1 - 16200 \cdot a_1 - 918000 \cdot a_2 + 20400 \cdot a_1 + 1296000 \cdot a_2 - 316,1 = 0;$$

$$23913 - 918000 \cdot a_1 - 52020000 \cdot a_2 + 1296000 \cdot a_1 + 87720000 \cdot a_2 - 151 = 0.$$

$$4200 \cdot a_1 + 378000 \cdot a_2 + 106 = 0;$$

$$378000 \cdot a_1 + 35700000 \cdot a_2 + 8722 = 0.$$

Умножим второе уравнение на  $\frac{4200}{378000} = 0,0111\dots$  и вычтем из

первого второе, получим:

$$-18666,27 \cdot a_2 + 9,09 = 0;$$

$$a_2 = 0,0004869.$$

Подставив в одно из уравнений, получим:

$$4200 \cdot a_1 + 378000 \cdot 0,0004869 + 106 = 0;$$

$$a_1 = -0,06906;$$

$$a_0 = 1,1725 - 45 \cdot (-0,06906) - 2550 \cdot 0,0004869 = 3,0386.$$

Следовательно, уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y = 3,0386 - 0,06906 \cdot x + 0,0004869 \cdot x^2 \quad \text{или}$$

$$\mu = 3,0386 - 0,06906 \cdot t + 0,0004869 \cdot t^2.$$

Сравним экспериментальные и расчетные величины (таблица 2.3).

Таблица 2.3 – Сравнение экспериментальных и расчетных величин вязкости

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$y_{\text{э}}$	2,47	1,79	1,33	1,04	0,85	0,71	0,62	0,57
$y_{\text{р}}$	2,40	1,85	1,40	1,05	0,81	0,65	0,59	0,63
$\frac{y_{\text{э}} - y_{\text{р}}}{y_{\text{р}}} \cdot 100$	2,8	3,3	5,3	1,0	4,7	8,5	4,8	10,5

Сходимость результатов в отдельных точках все-таки недостаточно хорошая (относительное отклонение более 5%), поэтому целесообразно использовать формулу другого вида (например, при  $m = 3$ ).

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Задания выполняются по вариантам, задаваемым преподавателем.

#### *Метод средних.*

1. Подобрать эмпирическую формулу вида  $\lambda = a + bt$  ( $t$  в °C) для зависимости коэффициента теплопроводности масел и топлив от температуры используя метод средних.

2. Подобрать эмпирическую формулу вида  $\lg \lg(v + 0,8) = a + b \lg T$  ( $T$  в K) для зависимости вязкости масел и топлив от температуры используя метод средних.

Варианты заданий приведены в таблице 2.4, а исходные данные – в таблицах 2.5-2.7.

Таблица 2.4 – Варианты заданий

№ варианта	Вещество	№ варианта	Вещество
1	Масло МК-8(1)	9	Масло промышленное «12»
2	Масло МК-8(2)	10	Масло промышленное «20»

3	Техническое масло	11	Масло АК-10
4	Трансформаторное масло	12	Масло АК-15
5	Масло МК-8(3)	13	Бензин Б-70
6	Масло осевое «С»	14	Керосин Т-1
7	Масло МК-22	15	Топливо Т-5
8	Масло дизельное Д-11		

Таблица 2.5 – Данные о коэффициенте теплопроводности масел в зависимости от температуры

Т, К	$\lambda$ , Вт/(м·К)								
	Масло								
	Трансформаторное	МК-8(1)	Осевое«С»	МК-22	ДизельноеД-11	Индустриальное«12»	Индустриальное«20»	АК-10	АК-15
223	0,116	0,126	0,140	0,155	0,133	0,137	0,139	0,139	-
253	0,114	0,123	0,136	0,149	0,130	0,134	0,136	0,136	0,138
313	0,109	0,117	0,129	0,141	0,125	0,128	0,129	0,130	0,130
353	0,106	0,113	0,124	0,136	0,122	0,124	0,125	0,126	0,128
373	0,104	0,111	0,122	0,133	0,121	0,121	0,123	0,124	0,126

Таблица 2.6 – Данные о коэффициенте теплопроводности и кинематической вязкости масел в зависимости от температуры

МК-8(2)		МК-8(3)		Техническое масло	
t, °C	$\lambda$ , Вт/(м К)	t, °C	$\lambda$ , Вт/(м К)	t, °C	$\nu$ , мм <sup>2</sup> /с
-23,75	0,1225	-6,83	0,1195	16,1	657,9
8,94	0,1180	19,36	0,1164	19	446,5
24,70	0,1156	41,40	0,1135	25,8	277,6
61,40	0,1109	101,21	0,1060	31,9	171,1
126,40	0,1022	139,34	0,1007	39,6	118,1
185,74	0,0946	221,63	0,0897		

Таблица 2.7 – Данные о коэффициенте теплопроводности топлив в зависимости от температуры

Бензин Б-70		Керосин Т-1		Топливо Т-5	
t, °C	$\lambda$ , Вт/(м·К)	t, °C	$\lambda$ , Вт/(м·К)	t, °C	$\lambda$ , Вт/(м·К)
-38	0,1291	-51	0,1349	-51	0,1224

-22	0,1267	-37	0,1326	-40	0,1221
13	0,1186	6	0,1197	-26	0,1209
35	0,1131	10	0,1186	-14	0,1198
77	0,1041	32	0,1151	27	0,1163
124	0,0963	57	0,1105	108	0,1070

3. Оценить адекватность подобранных формул.

### ***Метод наименьших квадратов.***

1. Подобрать эмпирическую формулу вида  $\lambda = a + bt$  ( $t$  в °С) для зависимости коэффициента теплопроводности масел и топлив от температуры используя метод наименьших квадратов.

2. Подобрать эмпирическую формулу вида  $\lg \lg(\nu + 0,8) = a + b \lg T$  ( $T$  в К) для зависимости вязкости масел и топлив от температуры используя метод наименьших квадратов.

Варианты заданий приведены в таблице 2.4, а исходные данные – в таблицах 2.5-2.7.

3. Оценить адекватность подобранных формул.

4. Сравнить полученные результаты с методом средних.

### **Методика выполнения работы**

Работу выполняют по вариантам, задаваемым преподавателем, в соответствии с методическими указаниями и исходными данными, приведенными выше. Для проведения расчетов с помощью ПЭВМ рекомендуется использовать возможности Excel.

### **Контрольные вопросы**

1. Чем вызвана необходимость аналитического представления массивов экспериментальных данных различного назначения?

2. Какие известны методы для получения параметров эмпирических формул?

3. В чем сущность метода средних при нахождении параметров эмпирических формул?

4. В чем сущность метода наименьших квадратов при нахождении параметров эмпирических формул?

5. Какие известны методы для упрощения аналитического вида эмпирической формулы?

6. Как оценить адекватность полученной эмпирической формулы?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьменко О.Н. Основы научных исследований. Методические указания к практическим занятиям. – Невинномысск: НТИ Сев-КавГТУ, 2008. – 48 с.

2. Чеботарев Е.А. Основы инженерного творчества. Методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 240801 – Машины и аппараты химических производств. – Невинномысск: НТИ СевКавГТУ, 2009.- 28с.

3. Свидченко А.И., Новоселов А.М. Процессы и аппараты химической технологии. Лабораторный практикум. – Ставрополь: СевКавГТУ, 2002. 86 с.

4. Новоселова Е.Б., Широпятова О.Н., Свидченко А.И. Определение коэффициента теплопередачи в теплообменнике типа "труба в трубе". Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине "Процессы и аппараты химической технологии" для студентов специальностей 170500 – «Машины и аппараты химических производств» и 250200 – «Химическая технология неорганических веществ». - Ставрополь: СевКавГТУ, 2002. 17 с.

5. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1971. – 824 с.

**ПЛАНОВАЯ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА**  
**Методические указания для практических занятий**

Направление подготовки – 15.03.02 Технологические машины и оборудование

Составитель        *доц. А.И. Свидченко*

Рецензенты        *доц. А.Л. Проскурнин, доц. А.М. Новоселов*

Редактор

---

Подписано в печать 20 г. Формат 60 x 84 1/16 Уч.-изд. л.  
Усл. печ. л. Тираж Заказ №  
Невинномысский технологический институт (филиал)  
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

---

Отпечатано в типографии НТИ  
357108, г. Невинномысск, ул. Гагарина, 1