МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к выполнению лабораторной работы

15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2021

В методических указаниях изложены основные сведения о методах решения систем линейных алгебраических уравнений и приведены правила реализации этих операций с помощью современных программных средств решения математических задач.

Составитель *канд. техн. наук, доцент Д.В. Болдырев*

Отв. редактор *канд. техн. наук А.А. Евдокимов*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ………………………………………………………….. **4**
1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ……………………………………. **4**
1.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений 4
1.2 Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений 9
1.3 Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений 14
2 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В MathCAD ………….. **16**
3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ ……………………. **19**
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ …………………………………… **20**
ЛИТЕРАТУРА ...…………………………………………………… **20**
ПРИЛОЖЕНИЯ …………………………………………………… **22**

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является усвоение студентом основных правил решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), изучение основных методов решения СЛАУ и получение навыков реализации этих операций с помощью современных программных средств решения математических задач.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1} \\ \quad\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \boldsymbol{a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m} \end{cases} \tag{1.1}$$

В ней выделяют следующие составляющие:

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \ldots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \ldots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix}$ — матрица коэффициентов;

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \ldots \\ \boldsymbol{b_m} \end{bmatrix}$ — вектор-столбец правых частей уравнений;

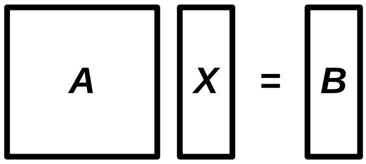
$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \ldots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix}$ — вектор-столбец неизвестных.

В матричной форме система (1.1) и ее решение будут иметь вид:

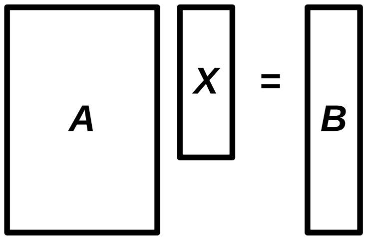
$$\boldsymbol{A \cdot X = B}, \quad \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}. \tag{1.2}$$

Различают следующие виды систем:

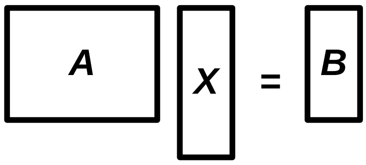
1. **Определенная система** с квадратной матрицей коэффициентов ($\boldsymbol{m = n}$).



2. **Переопределенная система** с прямоугольной матрицей коэффициентов ($\boldsymbol{m > n}$).



3. **Недоопределенная система** с прямоугольной матрицей коэффициентов ($\boldsymbol{m < n}$).

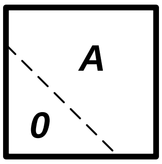


Системы вида ***1*** и ***2*** обычно имеют $\boldsymbol{n}$ определенных значений вектора $\boldsymbol{X}$. Система ***3*** имеет $\boldsymbol{m}$ определенных значений $\boldsymbol{X}$, а остальные считаются произвольными. Чтобы получить вектор решений, имеющий минимальную евклидову длину, решения $\boldsymbol{x_{m+1},.. x_m}$ считают нулевыми.

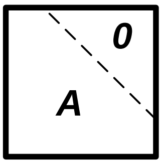
В ряде случаев формируются следующие системы уравнений со специальными видами матриц, допускающие специфические методы решения:

1. Системы с *симметричной* матрицей коэффициентов ($\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}$).

2. Системы с *верхней* или *нижней* треугольной матрицей коэффициентов:

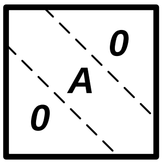


$$\begin{cases} a_{ij} \neq 0, & i \leq j \\ a_{ij} = 0, & i > j \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_{ij} \neq 0, & i \geq j \\ a_{ij} = 0, & i < j \end{cases}$$

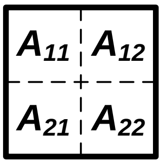
3. Системы с *ленточной* матрицей коэффициентов



$$\begin{cases} a_{ij} \neq 0, & i - \dfrac{k}{2} \leq j \leq i + \dfrac{k}{2} \\ a_{ij} = 0, & j < i - \dfrac{k}{2}, j > i + \dfrac{k}{2} \end{cases},$$

$\boldsymbol{k}$ — число диагоналей

4. Системы с *клеточной* матрицей (элементы образуют клетки)



Чтобы СЛАУ имела единственное решение, матрица коэффициентов должна быть **полного ранга**, т. е. должно выполняться условие $|A| \neq 0$. Если $|A| = 0$, матрица A считается **вырожденной**. Система при этом или не имеет решений, или имеет их бесконечное множество. Если $|A| \to 0$, матрица A считается **плохо обусловленной**. Ее решение определяется со значительной погрешностью.

Оценить величину определителя матрицы коэффициентов можно по соотношению:

$$|A| = \sum (-1)^k \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \cdot \ldots \cdot a_{m\omega}, \tag{1.3}$$

где индексы $\alpha \ldots \omega$ пробегают все возможные $n!$ перестановок номеров от ***1*** до ***n***; ***к*** — число инверсий пар индексов в данной перестановке.

Пример: *расчет определителя квадратной матрицы.*

$$a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} \qquad k = 0$$

$$a_{11} \quad a_{23} \quad a_{32} \qquad k = 1$$

$$a_{12} \quad a_{21} \quad a_{33} \qquad k = 1$$

$$a_{13} \quad a_{22} \quad a_{31} \qquad k = 1$$

$$a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} \qquad k = 2$$

$$a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32} \qquad k = 2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

• • •

Методы решения СЛАУ делятся две группы.

Прямые методы используют конечные соотношения для расчета компонент вектора неизвестных. Они дают решение после заранее известного числа операций.

Достоинства таких методов: относительная простота и универсальность (пригодность для решения широкого класса систем). Их *недостатки*: нерациональное расходование памяти ЭВМ (приходится одновременно хранить все элементы матрицы ***A*** без учета ее симметричности, разреженности и т. п.) и накапливание погрешности в процессе решения (на каждом этапе вычислений используются результаты предыдущих операций), что ограничивает область их применения размерностью $m \approx 100$.

Итерационные методы работают по принципу циклического уточнения заданного предварительно некоторого приближенного решения $\boldsymbol{X}^{(0)}$ по схеме, которая определяется алгоритмом. Одношаговые методы для нахождения последующего значения $\boldsymbol{X}^{(k)}$ на $\boldsymbol{k}$-м шаге используют информацию только об одной предыдущей итерации:

$$\boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{\Phi}\left[\boldsymbol{X}^{(k-1)}\right]. \tag{1.4}$$

Многошаговые методы при решении используют информацию о двух и более предыдущих итерациях:

$$\boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{\Phi}\left[\boldsymbol{X}^{(k-1)}, \boldsymbol{X}^{(k-2)}, \ldots \boldsymbol{X}^{(k-l)}\right]. \tag{1.5}$$

Само решение находится, как $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{X}^{(k)}$. Обычно за конечное число итераций этот предел не достигается, поэтому работа метода продолжается до выполнения некоторого условия, например:

$$\left\|\boldsymbol{X}^{(k)} - \boldsymbol{X}^{(k-1)}\right\| < \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1.6}$$

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1.7}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — точность решения.

Достоинства итерационных методов: более рациональное расходование памяти (можно организовать хранение матрицы коэффициентов по строкам или столбцам и обрабатывать их последовательно) и отсутствие накопления погрешности результата (точность решения на каждом этапе определяется только результатами предыдущих итераций и практически не зависит от выполненных ранее расчетов). Их недостатки: усложнение алгоритмов и трудность предварительной оценки объема вычислений (сходимость итерационного процесса к решению может быть медленной или вообще отсутствовать).

Обычно итерационные методы используются для уточнения решения, найденного одним из прямых методов.

1.2 Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Метод Гаусса. Он основан на приведении матрицы системы к треугольному виду и последующем разрешением новой системы уравнений относительно $\boldsymbol{X}$. Метод включает в себя два этапа.

На этапе *прямого хода* квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ размерностью $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ приводится к треугольному виду за счет последовательного исключения переменных. На этапе *обратного хода* выполняется вычисление неизвестных. Для этого полученная система последовательно разрешается, начиная со старших уравнений.

Пример: *решение системы уравнений методом Гаусса.*

Исходная матрица:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

Первый шаг прямого хода (исключение x_1):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{32}\cdot x_2 + a'_{33}\cdot x_3 = b'_3 \end{cases}$$

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{12}, \quad a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{13}, \quad b'_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot b_1$$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}\cdot a_{12}, \quad a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}\cdot a_{13}, \quad b'_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\cdot b_1$$

Второй шаг прямого хода (исключение x_2):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a''_{33}\cdot x_3 = b''_3 \end{cases}$$

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}\cdot a'_{23}, \quad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}\cdot b'_2$$

Обратный ход:

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}, \quad x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23} \cdot x_3}{a'_{22}}, \quad x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3}{a_{11}}$$

•••

Для корректной работы метода Гаусса необходимо, чтобы диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ были ненулевыми. Для повышения точности решения целесообразно, чтобы на этапе исключения с номером $\boldsymbol{k}$ на месте элемента $\boldsymbol{a_{kk}}$ располагался наибольший из всех оставшихся элементов столбца (от $\boldsymbol{a_{kk}}$ до $\boldsymbol{a_{Nk}}$). Поэтому на практике метод Гаусса дополняют этапом выбора т. н. *главного (или ведущего) элемента*. Алгоритм метода приведен ниже.

```
I. ПРЯМОЙ ХОД.
ДЛЯ k ОТ 1 ДО n – 1 ВЫПОЛНИТЬ
| // Поиск ведущего элемента
| kMax ← k
| ДЛЯ i ОТ k + 1 ДО n ВЫПОЛНИТЬ
|   ЕСЛИ |a_ik| > |a_kMax,k|, ТО kMax ← i
| // Перестановка уравнений при необходимости
| ЕСЛИ kMax ≠ k, ТО
| | ДЛЯ j ОТ 1 ДО n ВЫПОЛНИТЬ a_kj ↔ a_kMax,j
| | b_k ↔ b_kMax
|// Исключение переменных
| ДЛЯ i ОТ k + 1 ДО n ВЫПОЛНИТЬ
| | ДЛЯ j ОТ k + 1 ДО n ВЫПОЛНИТЬ
| |   a_ij ← a_ij – a_ik·a_kj / a_kk
| | b_i ← b_i – a_ik·b_k / a_kk
II. ОБРАТНЫЙ ХОД.
X_n ← b_n / a_nn
ДЛЯ i ОТ n – 1 ДО 1 ВЫПОЛНИТЬ
| S ← 0
```

```
ДЛЯ j ОТ i + 1 ДО n ВЫПОЛНИТЬ S ← S + a_ij·x_j
x_i ← (b_i − S) / a_ii
```

Количество операций для метода Гаусса пропорционально значению $\frac{2}{3} \cdot n^3$.

На точность результата влияет погрешность округления результатов операций. Если X^* — точное решение, а X — решение, полученное методом Гаусса, то величину

$$E = X - X^* \tag{1.8}$$

называют *погрешностью* метода. Величину

$$R = B - A \cdot X \tag{1.9}$$

называют *невязкой*. В общем случае эти показатели ухудшаются с ростом размерности системы и снижения обусловленности матрицы A. В практических расчетах метод Гаусса не рекомендуется использовать для систем с $n > 100$ с сильно разреженной матрицей коэффициентов.

Метод Гаусса может быть использован для вычисления определителей и обратных матриц.

Определитель матрицы A после ее приведения к треугольному виду определяется соотношением:

$$|A| = \pm \prod_{k=1}^{n} a_{kk} . \tag{1.10}$$

Знак «плюс» берется, если число перестановок строк при поиске главного элемента было четным, а «минус» — если нечетным.

Для обращения матрицы A необходимо решить систему:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot Z = I , \tag{1.11}$$

где I — единичная матрица. Выражение (1.11) можно представить как совокупность систем линейных уравнений с одинаковой матрицей коэффициентов и набором векторов правой части, образующих единичную матрицу.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot z_{ki} = \delta_{ij}, \quad i = 1...n, \quad j = 1...n, \tag{1.12}$$

где:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{1.13}$$

Система (1.7) должна быть разрешена n раз для различных значений j. На каждом этапе такого решения будет формироваться один столбец матрицы A^{-1}.

2. Метод прогонки. Он является модификацией метода Гаусса для частного случая практически важных разреженных систем с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$\begin{cases} b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot x_2 & = & d_1, \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 & = & d_2, \\ a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 & = & d_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} \cdot x_{n-2} + b_{n-1} \cdot x_{n-1} + c_{n-1} \cdot x_n & = & d_{n-1}, \\ a_n \cdot x_{n-1} + b_n \cdot x_n & = & d_n, \end{cases} \tag{1.14}$$

где b_i — элементы главной диагонали (обычно не равные нулю), a_i — элементы поддиагонали, c_i — элементы наддиагонали.

Метод состоит из двух этапов. При прямой прогонке (аналоге прямого хода метода Гаусса) каждое последующее решение x_{i+1} связывается с предыдущим решением x_i с помощью прогоночных коэффициентов u_i и v_i:

$$x_i = u_i \cdot x_{i+1} + v_i, \quad i = 1...n-1. \tag{1.15}$$

При обратной прогонке (аналоге обратного хода метода Гаусса) для решения используется формула (1.15). Расчет начинается со значения $\boldsymbol{x_n}$, которое вычисляется с использованием последнего уравнения системы (1.14):

$$\begin{gathered} a_n \cdot x_{n-1} + b_n \cdot x_n = d_n, \\ a_n \cdot \left(u_{n-1} \cdot x_n + v_{n-1} \right) + b_n \cdot x_n = d_n, \\ x_n = \frac{d_n - a_n \cdot v_{n-1}}{b_n + a_n \cdot u_{n-1}}. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Прогоночные коэффициенты определяются следующим образом. Для $\boldsymbol{i}$-го уравнения можно записать:

$$\begin{gathered} a_i \cdot x_{i-1} + b_i \cdot x_i + c_i \cdot x_{i+1} = d_i, \\ a_i \cdot \left(u_{i-1} \cdot x_i + v_{i-1} \right) + b_i \cdot x_i + c_i \cdot x_{i+1} = d_i, \\ x_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \cdot u_{i-1}} \cdot x_{i+1} + \frac{d_i - a_i \cdot v_{i-1}}{b_i + a_i \cdot u_{i-1}}, \\ u_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \cdot u_{i-1}}, \quad v_i = \frac{d_i - a_i \cdot v_{i-1}}{b_i + a_i \cdot u_{i-1}}, \quad i = 2 \ldots n-1. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Для первого уравнения системы ($\boldsymbol{a_1 = 0}$):

$$u_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad v_1 = \frac{d_1}{b_1}. \tag{1.18}$$

Алгоритм метода прогонки следующий.

I. ПРЯМАЯ ПРОГОНКА.

$u_1 \leftarrow -c_1 \;/\; b_1,\; v_1 \leftarrow d_1 \;/\; b_1$

ДЛЯ i ОТ 2 ДО $n - 1$ ВЫПОЛНИТЬ

  $u_i \leftarrow -c_1 \;/\; (b_i + a_i \cdot u_{i-1})$

  $v_i \leftarrow (d_i - a_i \cdot v_{i-1}) \;/\; (b_i + a_i \cdot u_{i-1})$

II. ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА.

$x_n \leftarrow (d_n - a_n \cdot v_{n-1}) \;/\; (b_n + a_n \cdot u_{n-1})$

ДЛЯ i ОТ $n - 1$ ДО 1 ВЫПОЛНИТЬ

  $x_i \leftarrow u_i \cdot x_{i+1} + v_i$

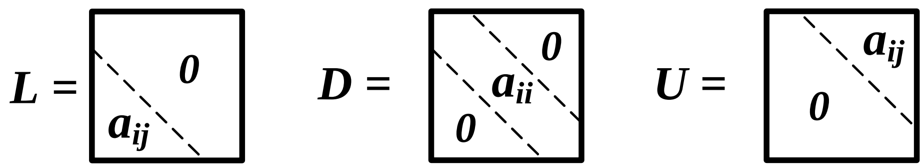
1.3 Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Обычно итерационные методы представляют в обобщенной канонической форме:

$$\frac{F^{(k+1)}}{\tau^{(k+1)}} \cdot \left[X^{(k+1)} - X^{(k)}\right] + A \cdot X^{(k)} = B, \tag{1.19}$$

где k — номер итерации, $F^{(k+1)}$ — некоторая матрица, форма которой определяет алгоритм метода, $\tau^{(k+1)}$ — итерационный параметр, повышающий скорость сходимости. Если F и τ не зависят от k, метод считают *стационарным*. Если $F = I$ (I — единичная матрица), метод считают *явным*. Явные методы обычно обеспечивают более низкую скорость сходимости. Матрица коэффициентов может быть представлена в виде суммы нижней треугольной, диагональной и верхней треугольной матриц:

$$A = L + D + U,$$



(1.20)

В зависимости от формы матрицы F и значений τ различают следующие итерационные методы.

1. Метод простой итерации (стационарный и явный метод).

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau \cdot \left[\frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)}\right], \quad i = 1...m. \tag{1.21}$$

В матричной форме:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \tau \cdot D^{-1} \cdot \left[B - A \cdot X^{(k)}\right],$$

$$\frac{D}{\tau} \cdot \left[X^{(k+1)} - X^{(k)}\right] + A \cdot X^{(k)} = B, \quad F = D, \quad \tau = const. \tag{1.22}$$

Если τ зависит от номера шага поиска решения k, то метод простой итерации превращается в **метод Ричардсона**.

2. Метод Якоби (стационарный и явный метод).

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left\{ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)} \right\}, \quad i = 1...m. \tag{1.23}$$

В матричной форме:

$$\begin{gathered} X^{(k+1)} = D^{-1} \cdot \left[B - L \cdot X^{(k)} - U \cdot X^{(k)} \right], \\ D \cdot X^{(k+1)} + (L + U) \cdot X^{(k)} = B, \\ D \cdot \left[X^{(k+1)} - X^{(k)} \right] + A \cdot X^{(k)} = B, \\ F = D, \quad \tau = 1. \end{gathered} \tag{1.24}$$

3. Метод Зейделя (стационарный метод).

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k+1)} \right\} - \sum_{j=i+1}^{n} \left\{ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)} \right\}, \quad i = 1...m. \tag{1.25}$$

Суммы считаются равными нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего.

В матричной форме:

$$\begin{gathered} X^{(k+1)} = D^{-1} \cdot \left[B - L \cdot X^{(k+1)} - U \cdot X^{(k)} \right], \\ (D + L) \cdot X^{(k+1)} + U \cdot X^{(k)} = B, \\ (D + L) \cdot \left[X^{(k+1)} - X^{(k)} \right] + A \cdot X^{(k)} = B, \\ F = D + L, \quad \tau = 1. \end{gathered} \tag{1.26}$$

4. Метод систематической сверхрелаксации или верхней релаксации (нестационарный и неявный метод).

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega^{(k)} \cdot \left[\frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)} \right], \tag{1.27}$$

$$i = 1...m$$

В матричной форме:

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{X}^{(k)} + \omega^{(k)} \cdot \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \left[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{X}^{(k+1)} - \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{X}^{(k)}\right],$$

$$\frac{\boldsymbol{D}}{\omega^{(k)}} \cdot \left[\boldsymbol{X}^{(k+1)} - \boldsymbol{X}^{(k)}\right] + \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{X}^{(k+1)} + \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{B},$$

$$\frac{\boldsymbol{D} + \omega^{(k)} \cdot \boldsymbol{L}}{\omega^{(k)}} \cdot \left[\boldsymbol{X}^{(k+1)} - \boldsymbol{X}^{(k)}\right] + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{B}, \tag{1.28}$$

$$\boldsymbol{F}^{(k+1)} = \boldsymbol{D} + \omega^{(k)} \cdot \boldsymbol{L}, \quad \tau^{(k+1)} = \omega^{(k)} > 1.$$

Достаточным (но не необходимым) условием сходимости итерационных методов является следующее неравенство:

$$|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1...m. \tag{1.29}$$

Хотя бы для одного из уравнений это неравенство должно выполняться строго. Это делает эффективным метод Зейделя только для систем с сильно разреженной матрицей коэффициентов.

2 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В MathCAD

Создание необходимых матриц и векторов производится по общим правилам. В свободном месте рабочего поля документа размещаются имена объектов со знаком присваивания. Через пункты меню ***Математика|Матрицы... (Math|Matrices...)*** вызывается диалог, в котором определяются количество ***Строк (Rows)***, ***Столбцов (Columns)*** и выбирается действие ***Создать (Create)***. Здесь же можно ***Удалить (Delete)*** или ***Вставить (Insert)*** нужное число строк и столбцов. (Доступ к диалогу производится также нажатием клавиш **[*Ctrl*] *M***.)

Для формирования диагональной и единичной матриц удобно использовать функции ***diag*** и ***identity***.

Имя функции	Возвращается...
diag(V)	Диагональная матрица, содержащая по диагонали элементы вектора $\boldsymbol{V}$.
identity(n)	Единичная матрица размерностью $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$.

На этапе задания значений над векторами и матрицами можно выполнять следующие операции:

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Присваивание	:=	`:`	Присваивание значений элементам вектора или матрицы.
Нижний индекс вектора	$\boldsymbol{V_n}$	`[…`	Элемент вектора с номером $\boldsymbol{n}$.
Нижний индекс матрицы	$\boldsymbol{M_{n,m}}$	`[…,…`	Элемент матрицы из строки $\boldsymbol{n}$ и столбца $\boldsymbol{m}$.
Верхний индекс	$\boldsymbol{M^{<n>}}$	`[Ctrl]6`	Извлечение столбца $\boldsymbol{n}$ из $\boldsymbol{M}$ (возвращается вектор).
Векторизация	$\vec{\boldsymbol{M}}$	`[Ctrl]-`	Выполнение всех операций над $\boldsymbol{M}$ поэлементно.

По умолчанию массивы нумеруются с нулевого элемента. Чтобы изменить этот порядок, необходимо определить начальное значение встроенной переменной ***ORIGIN*** через пункт меню ***Математика | Встроенные переменные... (Math | Built-In Variables...)***. Можно также задать глобальное значение ***ORIGIN*** в любом месте документа. Например, чтобы установить этот параметр равным ***1***, необходимо напечатать в рабочем поле ***ORIGIN~1*** (при этом в документе отобразится ***ORIGIN≡1***).

Над массивами выполняются стандартные операции.

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Сложение и вычитание с константой	$V+C$, $V-C$ $C+V$, $C-V$ $M+C$, $M-C$ $C+M$, $C-M$	+ −	Сложение (вычитание) элементов массивов с константой C.
Умножение и деление на константу	$V \cdot C$, $C \cdot V$ $M \cdot C$, $C \cdot M$ $\frac{V}{C}, \frac{M}{C}$	* /	Умножение (деление) элементов массивов на константу C.
Сложение и вычитание	V_1+V_2 , V_1-V_2 , M_1+M_2 , M_1-M_2	+ −	Сложение (вычитание) соответствующих элементов массивов, имеющих одинаковую размерность.
Умножение векторов	$V \cdot V$	*	Скалярное произведение векторов.
Умножение матрицы на вектор	$M \cdot V$	*	Произведение матрицы M на вектор V. Число столбцов M должно соответствовать числу строк V.
Умножение матриц	$M_1 \cdot M_2$	*	Произведение матриц M_1 и M_2. Число столбцов M_1 должно соответствовать числу строк M_2.
Транспонирование	V^T, M^T	[Ctrl]1	Транспонирование массива.
Степень	M^n	^	Целая степень n квадратной матрицы M (M^{-1} – обратная матрица).

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Длина	$\|\boldsymbol{V}\|$	|	Вычисление длины вектора ***v***. Возвращается $\sqrt{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}$, если все элементы ***v*** вещественны или $\sqrt{\boldsymbol{V}\cdot\overline{\boldsymbol{V}}}$, если вектор ***v*** содержит комплексные значения.
Определитель	$\|\boldsymbol{M}\|$	|	Вычисление определителя матрицы ***M***. Возвращается скаляр.

Решить систему линейных уравнений можно с помощью стандартных матрично-векторных операций, использованных в уравнении (1.2). Для этой же цели можно использовать встроенную функцию ***lsolve***.

Имя функции	Возвращается...
lsolve(M, V)	Вектор решения ***X*** такой, что ***M·X = V***.

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Работа заключается в получении решения СЛАУ прямым и итерационным методом. Работа выполняется в следующем порядке.

1. Задается матрица коэффициентов ***A*** и вектор-столбец правых частей уравнений ***B***. Рассчитывается определитель матрицы ***A***, по значению которого оценивается обусловленность ***A*** и предполагаемое качество решения.

2. Находится решение СЛАУ прямым методом с помощью матрично-векторных операций или функции ***lsolve***. По формуле (1.9) оценивается величина невязки.

3. Находится решение СЛАУ заданным итерационным методом (начальное приближение выбирается самостоятельно). Оцениваются сходимость к точному решению (им считается вектор ***X***, полученный прямым методом) и величина невязки.

Примеры решения задач приведены в приложении Б.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как представляется СЛАУ?
2. Какие виды СЛАУ принято выделять с точки зрения из определенности?
3. Как влияет обусловленность СЛАУ на точность ее решения?
4. В чем заключаются особенности прямых методов решения СЛАУ?
5. В чем сущность метода Гаусса?
6. В чем сущность метода прогонки?
7. В чем заключаются особенности итерационных методов решения СЛАУ?
8. В чем сущность методов простых итераций, Якоби, Зейделя решения СЛАУ? Какое условие должно выполняться для их сходимости к решению?
9. Как решаются СЛАУ средствами системы ***MathCAD***?

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 2003.
3. Канахен Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
4. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCAD 2000. Математический практикум. – М.: Финансы и статистика, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

№	Система уравнений
1	$\begin{cases} 2,4\cdot x_1+0,2\cdot x_2-2,4\cdot x_3+5,8\cdot x_4=3,8 \\ 1,7\cdot x_1-1,3\cdot x_2-7,4\cdot x_3+4,8\cdot x_4=2,9 \\ -9,1\cdot x_1+3,6\cdot x_2+1,4\cdot x_3+1,1\cdot x_4=-3,4 \\ 0,4\cdot x_1+8,1\cdot x_2+4,4\cdot x_3-3,0\cdot x_4=5,1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 1,2\cdot x_1+6,5\cdot x_2+3,2\cdot x_3+1,7\cdot x_4=2,6 \\ 2,0\cdot x_1+3,5\cdot x_2+8,3\cdot x_3-0,7\cdot x_4=4,8 \\ 3,3\cdot x_1+0,4\cdot x_2-0,8\cdot x_3-0,7\cdot x_4=3,6 \\ 1,7\cdot x_1+1,4\cdot x_2+2,7\cdot x_3+6,3\cdot x_4=-8,4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4,1\cdot x_1+0,1\cdot x_2+0,2\cdot x_3+0,2\cdot x_4=1,1 \\ 0,3\cdot x_1+5,3\cdot x_2+0,9\cdot x_3-0,1\cdot x_4=-7,8 \\ 0,2\cdot x_1+0,3\cdot x_2+3,2\cdot x_3+0,2\cdot x_4=9,0 \\ 0,1\cdot x_1+0,1\cdot x_2+0,2\cdot x_3-9,1\cdot x_4=7,1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 0,1\cdot x_1-3,9\cdot x_2+7,5\cdot x_3+1,7\cdot x_4=3,2 \\ 5,7\cdot x_1+0,9\cdot x_2+1,9\cdot x_3+0,7\cdot x_4=6,3 \\ 2,1\cdot x_1-1,3\cdot x_2+2,8\cdot x_3+8,0\cdot x_4=1,5 \\ 2,5\cdot x_1-5,4\cdot x_2+1,9\cdot x_3+0,5\cdot x_4=-1,2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2,4\cdot x_1+0,2\cdot x_2-0,3\cdot x_3+5,8\cdot x_4=3,8 \\ 0,3\cdot x_1+0,1\cdot x_2+9,9\cdot x_3+1,1\cdot x_4=8,3 \\ 0,5\cdot x_1-6,2\cdot x_2+0,1\cdot x_3+1,5\cdot x_4=6,5 \\ 4,5\cdot x_1+0,1\cdot x_2+0,2\cdot x_3+3,3\cdot x_4=6,5 \end{cases}$

№	Система уравнений
6	$\begin{cases} 7{,}0 \cdot x_1 + 4{,}3 \cdot x_2 - 2{,}1 \cdot x_3 - 0{,}5 \cdot x_4 = 8{,}0 \\ -2{,}3 \cdot x_1 + 6{,}1 \cdot x_2 + 1{,}0 \cdot x_3 + 2{,}4 \cdot x_4 = -3{,}0 \\ 0{,}6 \cdot x_1 - 1{,}3 \cdot x_2 - 4{,}5 \cdot x_3 - 2{,}0 \cdot x_4 = 1{,}0 \\ -1{,}3 \cdot x_1 + 0{,}4 \cdot x_2 + 1{,}1 \cdot x_3 + 4{,}1 \cdot x_4 = 1{,}0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2{,}7 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 + 3{,}3 \cdot x_3 + 9{,}6 \cdot x_4 = 6{,}2 \\ 1{,}4 \cdot x_1 + 6{,}5 \cdot x_2 - 1{,}7 \cdot x_3 + 0{,}7 \cdot x_4 = 6{,}9 \\ -3{,}3 \cdot x_1 + 0{,}9 \cdot x_2 + 8{,}7 \cdot x_3 + 2{,}8 \cdot x_4 = 1{,}2 \\ 8{,}3 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_2 + 0{,}7 \cdot x_3 - 1{,}6 \cdot x_4 = 4{,}4 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 1{,}0 \cdot x_1 + 2{,}1 \cdot x_2 - 8{,}9 \cdot x_3 + 4{,}0 \cdot x_4 = -4{,}0 \\ -7{,}1 \cdot x_1 + 2{,}0 \cdot x_2 + 0{,}3 \cdot x_3 + 3{,}1 \cdot x_4 = 1{,}9 \\ 2{,}0 \cdot x_1 + 1{,}5 \cdot x_2 + 1{,}6 \cdot x_3 - 8{,}8 \cdot x_4 = 8{,}5 \\ 2{,}3 \cdot x_1 - 6{,}6 \cdot x_2 - 1{,}6 \cdot x_3 + 0{,}9 \cdot x_4 = 3{,}1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} -2{,}3 \cdot x_1 + 0{,}7 \cdot x_2 + 3{,}0 \cdot x_3 + 8{,}1 \cdot x_4 = 2{,}0 \\ 4{,}4 \cdot x_1 + 6{,}9 \cdot x_2 - 0{,}7 \cdot x_3 + 0{,}4 \cdot x_4 = 0{,}9 \\ 2{,}3 \cdot x_1 + 1{,}9 \cdot x_2 + 7{,}7 \cdot x_3 - 2{,}3 \cdot x_4 = -9{,}2 \\ 9{,}0 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 - 0{,}7 \cdot x_3 - 4{,}6 \cdot x_4 = 3{,}1 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -0{,}1 \cdot x_1 - 3{,}9 \cdot x_2 + 7{,}5 \cdot x_3 - 1{,}7 \cdot x_4 = 3{,}2 \\ 6{,}7 \cdot x_1 - 0{,}9 \cdot x_2 - 1{,}9 \cdot x_3 + 0{,}8 \cdot x_4 = -6{,}3 \\ 2{,}1 \cdot x_1 + 1{,}3 \cdot x_2 + 2{,}8 \cdot x_3 - 9{,}0 \cdot x_4 = 7{,}5 \\ 2{,}5 \cdot x_1 + 5{,}4 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot x_3 + 0{,}1 \cdot x_4 = 1{,}2 \end{cases}$
11	$\begin{cases} -2{,}3 \cdot x_1 - 0{,}1 \cdot x_2 + 1{,}4 \cdot x_3 - 7{,}8 \cdot x_4 = 4{,}8 \\ -8{,}1 \cdot x_1 + 2{,}0 \cdot x_2 + 3{,}1 \cdot x_3 + 1{,}5 \cdot x_4 = -4{,}9 \\ 2{,}0 \cdot x_1 + 1{,}5 \cdot x_2 + 7{,}1 \cdot x_3 - 2{,}4 \cdot x_4 = 2{,}9 \\ 2{,}3 \cdot x_1 - 6{,}3 \cdot x_2 + 1{,}6 \cdot x_3 - 1{,}0 \cdot x_4 = 2{,}9 \end{cases}$

№	Система уравнений
12	$\begin{cases} -1{,}1 \cdot x_1 + 2{,}5 \cdot x_2 - 6{,}5 \cdot x_3 + 0{,}7 \cdot x_4 = 6{,}3 \\ -8{,}2 \cdot x_1 + 2{,}0 \cdot x_2 + 4{,}3 \cdot x_3 + 1{,}7 \cdot x_4 = 0{,}2 \\ 3{,}3 \cdot x_1 + 5{,}4 \cdot x_2 - 0{,}8 \cdot x_3 - 0{,}7 \cdot x_4 = 3{,}6 \\ 1{,}7 \cdot x_1 + 1{,}4 \cdot x_2 + 2{,}7 \cdot x_3 + 6{,}3 \cdot x_4 = -8{,}4 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 4{,}7 \cdot x_1 + 0{,}9 \cdot x_2 + 0{,}8 \cdot x_3 + 0{,}7 \cdot x_4 = 0{,}0 \\ 1{,}1 \cdot x_1 + 6{,}3 \cdot x_2 + 1{,}9 \cdot x_3 - 1{,}1 \cdot x_4 = 0{,}0 \\ -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}3 \cdot x_2 + 3{,}2 \cdot x_3 - 0{,}2 \cdot x_4 = 0{,}0 \\ 1{,}1 \cdot x_1 + 1{,}1 \cdot x_2 + 1{,}2 \cdot x_3 - 4{,}1 \cdot x_4 = 0{,}0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 0{,}2 \cdot x_1 - 1{,}9 \cdot x_2 + 6{,}5 \cdot x_3 + 2{,}7 \cdot x_4 = -3{,}1 \\ 4{,}8 \cdot x_1 - 0{,}9 \cdot x_2 + 0{,}9 \cdot x_3 + 1{,}7 \cdot x_4 = 4{,}3 \\ 1{,}2 \cdot x_1 - 2{,}4 \cdot x_2 + 1{,}9 \cdot x_3 + 8{,}9 \cdot x_4 = -2{,}5 \\ 0{,}5 \cdot x_1 - 5{,}5 \cdot x_2 + 0{,}9 \cdot x_3 - 1{,}5 \cdot x_4 = 1{,}8 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -1{,}3 \cdot x_1 + 0{,}7 \cdot x_2 - 0{,}1 \cdot x_3 + 4{,}8 \cdot x_4 = -8{,}3 \\ 0{,}4 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_2 + 7{,}9 \cdot x_3 + 2{,}6 \cdot x_4 = 3{,}3 \\ 1{,}4 \cdot x_1 - 6{,}8 \cdot x_2 + 0{,}9 \cdot x_3 + 3{,}5 \cdot x_4 = -0{,}5 \\ 4{,}5 \cdot x_1 + 3{,}1 \cdot x_2 - 0{,}2 \cdot x_3 - 0{,}3 \cdot x_4 = 5{,}2 \end{cases}$
16	$\begin{cases} -6{,}0 \cdot x_1 - 3{,}3 \cdot x_2 + 1{,}1 \cdot x_3 - 1{,}5 \cdot x_4 = 1{,}0 \\ 2{,}0 \cdot x_1 + 5{,}1 \cdot x_2 + 1{,}0 \cdot x_3 + 0{,}4 \cdot x_4 = -1{,}0 \\ -1{,}6 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 - 4{,}5 \cdot x_3 + 2{,}0 \cdot x_4 = 1{,}0 \\ 1{,}3 \cdot x_1 - 0{,}4 \cdot x_2 + 1{,}1 \cdot x_3 - 4{,}1 \cdot x_4 = -1{,}0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 1{,}0 \cdot x_1 + 2{,}0 \cdot x_2 + 4{,}0 \cdot x_3 + 8{,}0 \cdot x_4 = 1{,}0 \\ 8{,}0 \cdot x_1 + 1{,}0 \cdot x_2 + 2{,}0 \cdot x_3 + 4{,}0 \cdot x_4 = 2{,}0 \\ 4{,}0 \cdot x_1 + 8{,}0 \cdot x_2 + 1{,}0 \cdot x_3 + 2{,}0 \cdot x_4 = 3{,}0 \\ 2{,}0 \cdot x_1 + 4{,}0 \cdot x_2 + 8{,}0 \cdot x_3 + 1{,}0 \cdot x_4 = 4{,}0 \end{cases}$

№	Система уравнений
18	$\begin{cases} 1{,}2\cdot x_1+0{,}3\cdot x_2-2{,}7\cdot x_3+6{,}1\cdot x_4=2{,}3\\ 4{,}0\cdot x_1+7{,}1\cdot x_2-1{,}7\cdot x_3+1{,}3\cdot x_4=-9{,}0\\ 0{,}3\cdot x_1-2{,}9\cdot x_2+6{,}4\cdot x_3-2{,}4\cdot x_4=0{,}2\\ -8{,}2\cdot x_1+2{,}2\cdot x_2-1{,}7\cdot x_3-4{,}0\cdot x_4=-0{,}1 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 0{,}7\cdot x_1+4{,}9\cdot x_2+8{,}5\cdot x_3-1{,}3\cdot x_4=-7{,}2\\ 4{,}8\cdot x_1-1{,}4\cdot x_2+2{,}7\cdot x_3+0{,}6\cdot x_4=-5{,}3\\ -3{,}2\cdot x_1+0{,}3\cdot x_2-3{,}4\cdot x_3+7{,}0\cdot x_4=5{,}5\\ 2{,}0\cdot x_1-8{,}4\cdot x_2+0{,}9\cdot x_3+4{,}5\cdot x_4=7{,}2 \end{cases}$
20	$\begin{cases} 3{,}4\cdot x_1+0{,}1\cdot x_2+0{,}6\cdot x_3-0{,}7\cdot x_4=0{,}0\\ 0{,}1\cdot x_1-5{,}1\cdot x_2+1{,}4\cdot x_3-2{,}1\cdot x_4=0{,}0\\ 0{,}7\cdot x_1-0{,}3\cdot x_2+2{,}3\cdot x_3-0{,}4\cdot x_4=0{,}0\\ -2{,}7\cdot x_1+1{,}1\cdot x_2+4{,}4\cdot x_3-9{,}8\cdot x_4=0{,}0 \end{cases}$

Во второй части работы задачи вариантов 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 решаются методом простых итераций, задачи вариантов 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 — методом Якоби, задачи вариантов 3, 6, 9, 12, 15, 18 — методом Зейделя.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕЬРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (документ MathCAD)

Исходная система:

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 12.3 & 1.7 & 1.1 & 3.2 \\ 1.4 & 12.5 & 0.2 & 4.8 \\ 4.1 & 3.7 & 10.1 & 2.0 \\ 2.2 & 4.2 & 0.3 & 10.9 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} := \begin{pmatrix} 0.3 \\ 5.8 \\ 1.8 \\ 6.1 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы коэффициентов:

$$|\boldsymbol{A}| = 1.3124 \times 10^{4}$$

Значение определителя велико, поэтому решение будет найдено достаточно точно.

Решение системы прямым методом:

$$\boldsymbol{X} := \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -0.1428 \\ 0.2979 \\ 0.0334 \\ 0.4727 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{lsolve}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} -0.1428 \\ 0.2979 \\ 0.0334 \\ 0.4727 \end{pmatrix}$$

Величина невязки:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

Разложение матрицы коэффициентов:

$$\boldsymbol{L} := \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 4.1 & 3.7 & 0.0 & 0.0 \\ 2.2 & 4.2 & 0.3 & 0.0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} := \begin{pmatrix} 12.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 10.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 10.9 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{U} := \begin{pmatrix} 0.0 & 1.7 & 1.1 & 3.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Решение системы методом Якоби.

Начальное приближение:

$$\boldsymbol{\Xi}^{\langle 0\rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получение последовательноситi приближений:

$$\boldsymbol{i} := 0 \,..\, 20$$

$$\boldsymbol{\Xi}^{\langle \boldsymbol{i}+1\rangle} := \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \left[\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{\Xi}^{\langle \boldsymbol{i}\rangle} \right]$$

$$\boldsymbol{\Xi}^{\langle 20\rangle} = \begin{pmatrix} -0.1428 \\ 0.2979 \\ 0.0334 \\ 0.4727 \end{pmatrix}$$

Изменение величины невязки на каждом шаге: