

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Методические указания к выполнению лабораторной работы

15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2021

В методических указаниях изложены основные сведения о методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем с помощью современных программных средств.

Составитель *канд. техн. наук, доцент Д.В. Болдырев*

Отв. редактор *канд. техн. наук А.А. Евдокимов*

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| 1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ | 4 |
| 1.1 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений | 4 |
| 1.2 Решение дифференциальных уравнений первого порядка | 8 |
| 1.3 Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка | 13 |
| 1.4 Решение дифференциальных уравнений высших порядков | 14 |
| 2 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ MathCAD | 18 |
| 3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ | 21 |
| КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ | 22 |
| ЛИТЕРАТУРА | 23 |
| ПРИЛОЖЕНИЯ | 24 |

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является усвоение студентом основных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем и получение навыков выполнения этих операций с помощью современных программных средств.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Обыкновенными называют дифференциальные уравнения, которые содержат одну или несколько производных искомой функции. Их представляют в виде:

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(m)}(x)] = 0. \quad (1.1)$$

Для их решения необходимо задание m начальных условий: $y(0), y'(0), y''(0), \dots, y^{(m-1)}(0)$.

Уравнение (1.1), разрешенное относительно старшей производной, считается представленным в *нормальной форме* (или *форме Коши*):

$$y^{(m)}(x) = f[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(m-1)}(x)]. \quad (1.2)$$

Решение дифференциального уравнения может быть общим и частным. **Общее решение** на плоскости с декартовой системой координат определяет бесконечное множество кривых, отличающихся только параметрами (постоянными) интегрирования. **Частному решению** соответствует единственная кривая этого семейства, проходящая через точку, определяемую начальными условиями. Соотношение общего и частного решений дифференциального уравнения показано на рисунке 1.1.

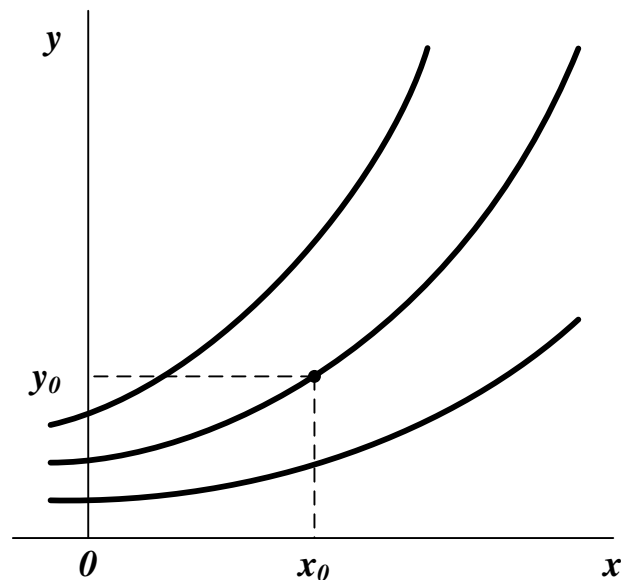


Рисунок 1.1 — Общее и частное решение дифференциального уравнения

Различают аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений.

Аналитические методы находят общее и частное решение, осуществляя специальные преобразования (например, разделяя переменные). Они неприменимы в следующих случаях:

- составляющие уравнения (1.1) являются существенно нелинейными функциями;
- составляющие уравнений (1.1) заданы таблично;
- уравнение (1.1) вообще не имеет аналитического решения.

Численные методы определяют только одно частное решение для заданных начальных условий. Большинство из них основано на *теории конечных разностей*, согласно которой область непрерывного изменения аргумента x заменяется конечным дискретным множеством точек $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$, которые называются *узлами*. Искомая непрерывная функция $y(x)$ приближенно заменяется дискретной *сеточной функцией* $\{x_i, y_i, i=0, \dots, n\}$. Исходное дифференциальное уравнение заменяется *разностным уравнением*, использующим в качестве первого приближения производной функции $y'(x)$ соотношение:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \quad (1.3)$$

Это выражение называется *аппроксимацией (приближением) производной с помощью отношения конечных разностей* (приращения $\Delta y(x)$ и Δx здесь конечны в отличие от их бесконечно малых значений в определении производной).

Можно получить различные формулы для аппроксимации производных в одной и той же точке y_i с помощью левых, правых и центральных разностей:

$$y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (1.4)$$

Геометрическая интерпретация разностных схем приведена на рисунке 1.2. Очевидно, что наименьшую «угловую» погрешность дает центральная разность.

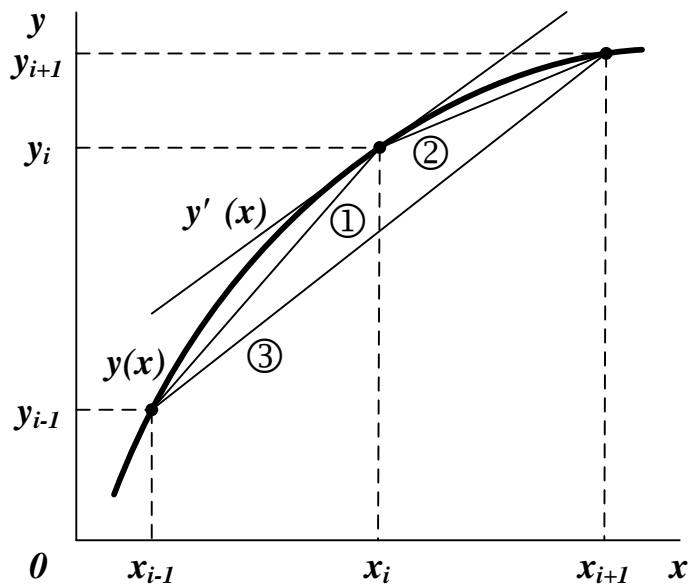


Рисунок 1.2 — Разностная аппроксимация производной: 1) с помощью левых разностей; 2) с помощью правых разностей; 2) с помощью центральных разностей;

Производные порядка выше первого аппроксимируются аналогичными разностными схемами, например:

$$y_i'' \approx \frac{y_i' - y_{i-1}'}{x_i - x_{i-1}} \approx \frac{y_{i+1}' - y_i'}{x_{i+1} - x_i} \approx \frac{y_{i+1}' - y_{i-1}'}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (1.5)$$

Использование конкретной разности зависит от вида дифференциального уравнения. На практике выбирается схема, обеспечивающая численную устойчивость процесса решения. Использование разностного представления производных высших порядков ограничено ростом погрешности аппроксимации.

Решение дифференциального уравнения численным методом сводится к отысканию значений сеточной функции при $x = x_i$, $i = 0, \dots, n$. Для упрощения расчетов расстояние между узлами сетки выбирают одинаковым. Пример численного решения методом Эйлера (см. п. 1.2) показан на рисунке 1.3.

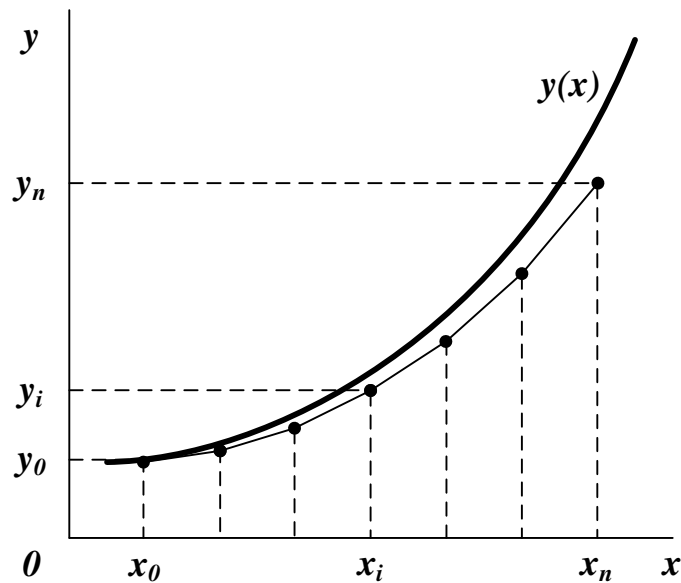


Рисунок 1.3 — Численное решение дифференциального уравнения

Очевидно, что в процессе численного решения дифференциального уравнения накапливается погрешность, которая тем больше, чем больше расстояние между узлами сетки.

1.2 Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Для решения дифференциальных уравнений первого порядка (широко распространенная на практике задача) вида:

$$y'(x) = f[x, y(x)] , \quad (1.6)$$

используются методы двух групп.

1. Одноступенчатые методы. Они позволяют найти последующее значение сеточной функции на основании ее единственного предыдущего значения.

Метод Эйлера основан на разложении функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестностях узлов $\{x_i\}$, из которого исключаются все составляющие со степенями производных выше первой:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i). \quad (1.7)$$

Заменяя $y(x)$ значениями сеточной функции, считая расстояние между узлами сетки $x_{i+1} - x_i = h$ постоянным и определяя производную по формуле (1.2), можно получить рекуррентную формулу метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \quad (1.8)$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера заключается в замене искомой функции $y(x)$ касательной в точке (x_i, y_i) . Следующим значением решения y_{i+1} считают координату точки пересечения этой касательной с ординатой x_{i+1} (см. рисунок 1.4, а).

Единственное достоинство схемы Эйлера — простота. Вместе с тем, она обладает относительно большой погрешностью, которая пропорциональна h (говорят, что метод имеет первый порядок точности: для снижения погрешности в **10** раз необходимо уменьшить h во столько же раз).

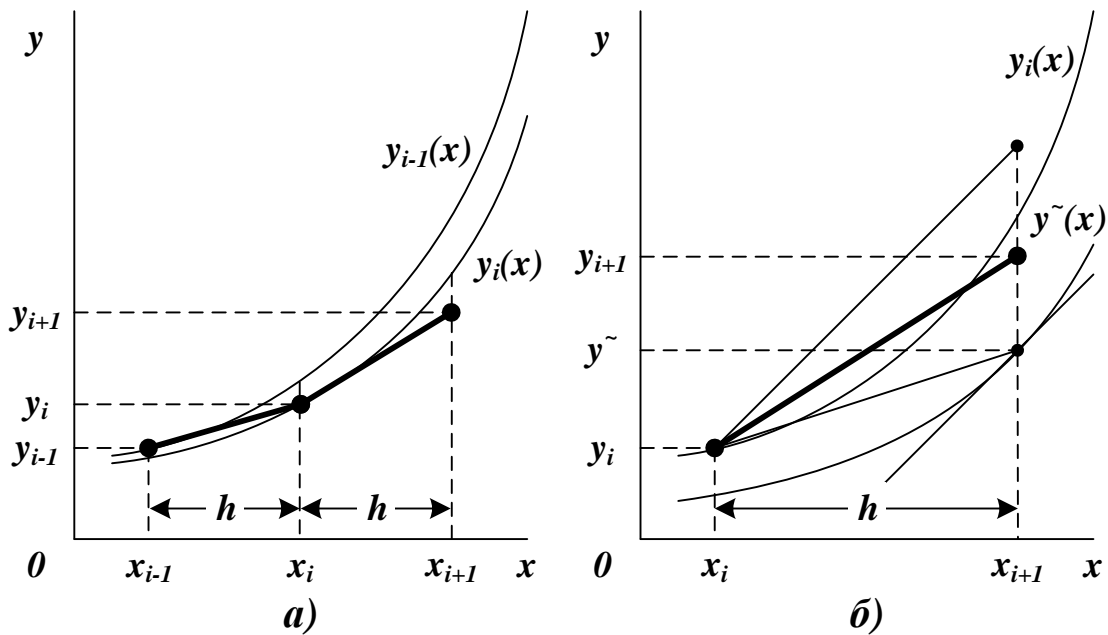


Рисунок 1.4 — Геометрическая интерпретация одношаговых методов решения дифференциальных уравнений: а) метода Эйлера; б) модифицированного метода Эйлера

Для повышения точности метода Эйлера разложение в ряд Тейлора дополняется составляющими со степенями производных до второй включительно:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (1.9)$$

Вторая производная $y''(x_i)$ может быть представлена в виде правой разности (счет возможен только вперед):

$$y''(x_i) = \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{x_{i+1} - x_i}. \quad (1.10)$$

Используя (1.10) и переходя к значениям сеточной функции, можно получить:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) — неявная. Неизвестное значение y_{i+1} в ее правой части заменяется приближенным значением \tilde{y} , определяемым по формуле Эйлера (1.8):

$$y_{i+1} \approx \tilde{y} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \quad (1.12)$$

Рекуррентная формула **модифицированного метода Эйлера** представляется выражением:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left\{ f(x_i, y_i) + f[x_{i+1}, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)] \right\}. \quad (1.13)$$

Геометрический смысл модифицированного метода Эйлера состоит в том, что через точку (x_i, y_i) проводится прямая с углом наклона, средним между углами наклона касательных к искомой функции в точках (x_i, y_i) и (x_{i+1}, \tilde{y}) . Точка пересечения этой прямой с ординатой x_{i+1} определяет следующее значение решения (см. рисунок 1.4, б).

Модифицированный метод Эйлера имеет второй порядок точности. Это достигается за счет роста объема вычислений.

Семейство методов Рунге-Кутты использует значения функции $f(x, y)$ не только в узлах сетки, но и в промежуточных точках. Их обобщенная рекуррентная формула имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^q \sigma_i \cdot k_i, \quad (1.14)$$

где $q < 6$ — порядок метода. Сомножители k_i рассчитываются с помощью формулы (1.2):

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2 &= h \cdot f(x_i + \alpha_2 \cdot h, y_i + \beta_{21} \cdot k_1), \\ k_3 &= h \cdot f(x_i + \alpha_3 \cdot h, y_i + \beta_{31} \cdot k_1 + \beta_{32} \cdot k_2), \\ k_4 &= h \cdot f(x_i + \alpha_4 \cdot h, y_i + \beta_{41} \cdot k_1 + \beta_{42} \cdot k_2 + \beta_{43} \cdot k_3), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Коэффициенты σ_i , α_i и β_{ij} выбираются так, чтобы обеспечивалась требуемая точность решения. Обычно требуют соблюдения условия $\sum \sigma_i = 1$.

При $q = 1$, $\sigma_1 = 1$ (1.14) преобразуется в метод Эйлера (1.8).

При $q = 2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$, $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$ (1.14) преобразуется в модифицированную схему Эйлера (1.13).

Наибольшее практическое применение имеет **метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности** со следующими значениями коэффициентов:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{6}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2}, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = 0, \quad \beta_{32} = \frac{1}{2}, \\ \sigma_4 &= \frac{1}{6}, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 0, \quad \beta_{43} = 1.\end{aligned}$$

Погрешность этого метода незначительна, хотя на каждом шаге функцию (1.2) приходится вычислять четыре раза.

2. Многоступенчатые методы. Для определения нового значения решения они используют информацию о значениях искомой функции на нескольких предыдущих шагах, что существенно сокращает объем вычислений. Особенностью методов этой группы является то, что с их помощью *нельзя начать решение*. Получение необходимого числа начальных значений функции выполняют одним из одноступенчатых методов.

Многоступенчатые методы называют также **методами прогноза и коррекции**. Поиск решения они выполняют в два этапа. Сначала определяется предварительное значение искомой функции (этап прогноза), затем оно уточняется до достижения заданной точности (этап коррекции).

Для начала работы **метода Адамса** второго порядка точности необходим один этап разгона. Прогнозируемое значение решения определяется по формуле:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_{i-1} + 2 \cdot h \cdot f(x_i, y_i). \quad (1.16)$$

Геометрическая интерпретация этапа следующая. Через точку с координатами (x_{i-1}, y_{i-1}) проводится прямая, параллельная касательной к искомой функции в точке (x_i, y_i) . Предварительным значением решения считается точка пересечения этой прямой с ординатой x_{i+1} (см. рисунок 1.5, а).

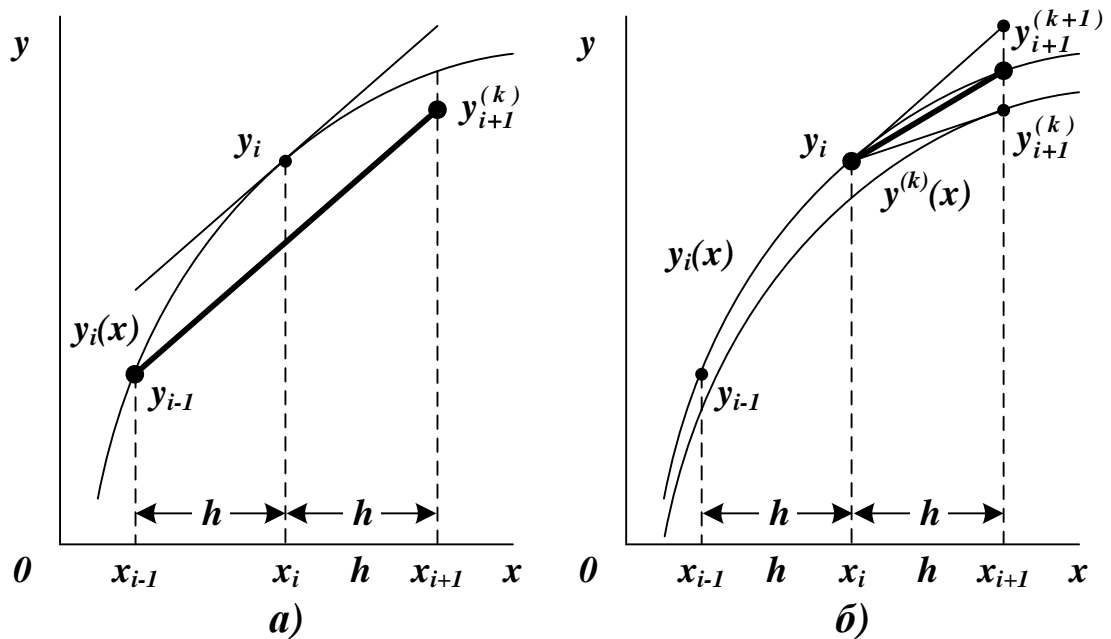


Рисунок 1.5 — Геометрическая интерпретация многошагового метода Адамса: а) этап прогноза; б) этап коррекции

На этапе коррекции полученное с помощью (1.16) значение уточняется по схеме:

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Геометрически это означает, что через точку (x_i, y_i) проводится прямая с углом наклона, средним между углами наклона касательных к искомой функции в точках (x_i, y_i) и $(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$. Скорректированным решением считается точка пересечения этой прямой с ординатой x_{i+1} (см. рисунок 1.5, б).

Коррекция продолжается, пока не будет выполнено условие:

$$\left| y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad (1.18)$$

где ε — заданная точность.

На практике применяют метод Адамса четвертого порядка точности, который использует следующую зависимость для прогноза:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24} \cdot \left[\begin{array}{l} 55 \cdot f(x_i, y_i) - 59 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \\ + 37 \cdot f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9 \cdot f(x_{i-3}, y_{i-3}) \end{array} \right], \quad (1.19)$$

и корректирующую формулу:

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{24} \cdot \left[\begin{array}{l} 9 \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) + 19 \cdot f(x_i, y_i) - \\ - 5 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2}) \end{array} \right], \quad (1.20)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Для начала работы метода необходимы три этапа разгона, которые обычно выполняют методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

1.3 Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка

Системы дифференциальных уравнений первого порядка представляются в форме:

$$\Phi[x, Y(x)] = 0, \quad (1.21)$$

где

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_m(x) \end{bmatrix}, \quad \Phi[x, Y(x)] = \begin{bmatrix} F_1[x, Y(x)] \\ \dots \\ F_m[x, Y(x)] \end{bmatrix}.$$

Для решения системы (1.21) необходимо задание вектора начальных условий $Y(0)$.

Систему (1.21) можно представить в нормальной форме:

$$Y'(x) = \phi[x, Y(x)], \quad (1.22)$$

где

$$Y'(x) = \begin{bmatrix} y'_1(x) \\ \dots \\ y'_m(x) \end{bmatrix}, \quad \phi[x, Y(x)] = \begin{bmatrix} f_1[x, Y(x)] \\ \dots \\ f_m[x, Y(x)] \end{bmatrix}$$

Все рекуррентные формулы предыдущего раздела в матричной форме могут использоваться для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка. Например, схема метода Рунге-Кутты четвертого порядка примет вид:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6} \cdot K(x_i, Y_i) \cdot \sigma, \quad (1.23)$$

где $\sigma^T = [1, 2, 2, 1]$ — вектор коэффициентов:

Столбцы матричной функции $K(x_i, Y_i)$ размерностью $m \times 4$ на каждом шаге вычислений находятся по формулам (1.15):

$$\begin{aligned} K^{<1>} &= h \cdot \phi(x_i, Y_i), \\ K^{<2>} &= h \cdot \phi\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, Y_i + \frac{1}{2} \cdot K^{<1>}\right), \\ K^{<3>} &= h \cdot \phi\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, Y_i + \frac{1}{2} \cdot K^{<2>}\right), \\ K^{<4>} &= h \cdot \phi(x_i + h, Y_i + K^{<3>}). \end{aligned}$$

1.4 Решение дифференциальных уравнений высших порядков

Для решения такой задачи **разностными методами** (или методами Штёрмера) используют разностную аппроксимацию производных (1.4), (1.5) и т. п. Выбор конкретной разностной схемы, за-

висящий от вида дифференциального уравнения, производится из условия численной устойчивости решения.

Пример: получение разностной схемы для решения дифференциального уравнения второго порядка

$$a_2 \cdot y''(x) + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x)$$

при известных начальных условиях y_0 и y'_0 .

Для равного шага изменения аргумента h находятся разностные аппроксимации производных:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h},$$

$$y'' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = \frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Дифференциальное уравнение записывается в разностной форме:

$$a_2 \cdot \frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}}{h^2} + a_1 \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h} + a_0 \cdot y_i = f(x_i).$$

Находится рекуррентная формула решения, для чего из разностного дифференциального уравнения выражается величина y с наибольшим индексом:

$$y_{i+1} = \frac{2 \cdot h^2}{2 \cdot a_2 + a_1 \cdot h} \cdot f(x_i) + \frac{4 \cdot a_2 - 2 \cdot a_0 \cdot h^2}{2 \cdot a_2 + a_1 \cdot h} \cdot y_i + \frac{a_1 \cdot h - 2 \cdot a_2}{2 \cdot a_2 + a_1 \cdot h} \cdot y_{i-1}.$$

Определяется формальное значение y_{-1} (для $i = 0$) с помощью левой разностной аппроксимации для y'_0 :

$$y_{-1} = y_0 - h \cdot y'_0.$$

• • •

Решение дифференциального уравнения порядка выше первого можно также свести к **решению системы уравнений первого порядка** путем замены переменных:

$$\begin{cases} y = z_1, \\ y' = z_1' = z_2, \\ y'' = z_2' = z_3, \\ \dots \\ y^{(m)} = z_m' = f[x, z_1, z_2, \dots, z_m]. \end{cases} \quad (1.24)$$

Система (1.24) решается при начальных условиях $z_{10} = y_0$, $z_{20} = y_0', \dots, z_{m0} = y_0^{(m-1)}$.

Пример: получение системы уравнений первого порядка для решения дифференциального уравнения второго порядка

$$a_2 \cdot y''(x) + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x)$$

при известных начальных условиях y_0 и y_0' .

$$\begin{cases} y = z_1, \\ z_1' = z_2, \\ z_2' = \frac{1}{a_2} \cdot [f(x) - a_1 \cdot z_2 - a_0 \cdot z_1]. \end{cases}$$

• • •

Пусть x и y — функции некоторого параметра t , а дифференциальное уравнение является линейным и однородным:

$$\begin{aligned} a_m \cdot y_t^{(m)} + \dots + a_1 \cdot y_t' + a_0 \cdot y &= \\ = b_m \cdot x_t^{(m)} + \dots + b_1 \cdot x_t' + b_0 \cdot x, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где $a_m \neq 0$. Если какие-либо слагаемые отсутствуют, то соответствующие коэффициенты a_i и b_i заменяются нулями.

При переходе от дифференциального уравнения (1.25) порядка m к системе m дифференциальных уравнений первого порядка необходимо учесть влияние производных от x по t . Это достигается заменой переменных.

$$\begin{aligned}
 z_m &= a_m \cdot y - b_m \cdot x, \\
 z_{m-1} &= (z_m)'_t + a_{m-1} \cdot y - b_{m-1} \cdot x = \\
 &= [a_m \cdot y'_t + a_{m-1} \cdot y] - [b_m \cdot x'_t + b_{m-1} \cdot x], \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= (z_2)'_t + a_1 \cdot y - b_1 \cdot x = \\
 &= [a_m \cdot y_t^{(m-1)} + \dots + a_1 \cdot y] - [b_m \cdot x_t^{(m-1)} + \dots + b_1 \cdot x].
 \end{aligned}$$

Из последнего уравнения и (1.25) можно получить:

$$\begin{aligned}
 &(z_1)'_t + a_0 \cdot y - b_0 \cdot x = \\
 &= [a_m \cdot y_t^{(m)} + \dots + a_0 \cdot y] - [b_m \cdot x_t^{(m)} + \dots + b_0 \cdot x] = 0.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

По (1.26) и (1.27) строится система дифференциальных уравнений первого порядка, соответствующая уравнению (1.25):

$$\begin{cases}
 (z_1)'_t = -a_0 \cdot y + b_0 \cdot x \\
 (z_2)'_t = z_1 - a_1 \cdot y + b_1 \cdot x \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \\
 (z_m)'_t = z_{m-1} - a_{m-1} \cdot y + b_{m-1} \cdot x \\
 y = \frac{1}{a_m} \cdot [z_m + b_m \cdot x].
 \end{cases} \tag{1.28}$$

Система (1.28) решается при заданных начальных условиях относительно переменной z_m , по значению которой вычисляется выходной параметр y .

Пример: получить систему дифференциальных уравнений первого порядка по заданному дифференциальному уравнению:

$$2 \cdot y_t''' + 3 \cdot y_t'' + 4 \cdot y_t' + y = 2 \cdot x_t'' + 3 \cdot x_t' + x.$$

Искомая функция:

$$y = \frac{1}{a_3} \cdot [z_3 + b_3 \cdot x] = \frac{1}{2} \cdot z_3.$$

Система уравнений (с учетом подстановки y):

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{1}{2} \cdot z_3 + x \\ \dot{z}_2 = z_1 - 2 \cdot z_3 + 3 \cdot x \\ \dot{z}_3 = z_2 - \frac{3}{2} \cdot z_3 + 2 \cdot x \end{cases}$$

• • •

2 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ MathCAD

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем могут использоваться встроенные функции *MathCAD*, основанные на методе Рунге-Кутты четвертого порядка.

| Имя функции | Возвращается... |
|--|---|
| <i>rkfixed</i> (y_0, x_1, x_2, N, D) | решение дифференциального уравнения. |
| <i>rkadapt</i> (y_0, x_1, x_2, N, D) | y_0 — вектор начальных условий размерности m . x_1 и x_2 — границы интервала, на котором ищется решение. N — число точек (не считая начальной), в которых ищется решение. $D(x, y)$ — функция, возвращающая вектор размерности m , содержащий первые производные неизвестных функций. |

Функции возвращают матрицу, первый столбец которой — значения x , второй столбец — значения $y(x)$, оставшиеся столбцы — значения $y'(x)$, $y''(x), \dots, y^{(m-1)}(x)$. Порядок, в котором представляются решение и его производные, соответствует их порядку в функции $D(x, y)$ и векторе начальных условий.

В отличие от *rkfixed*, которая использует схему с равноотстоящими узлами, *rkadapt* вычисляет решение с более мелким шагом в тех областях, где оно меняется быстро, и с более крупным шагом там, где оно меняется медленно. Это позволяет повысить точность и сократить время вычислений. Решение все равно будет возвращено на равномерной сетке. Примеры использования функций показаны на рисунках 2.1 и 2.2.

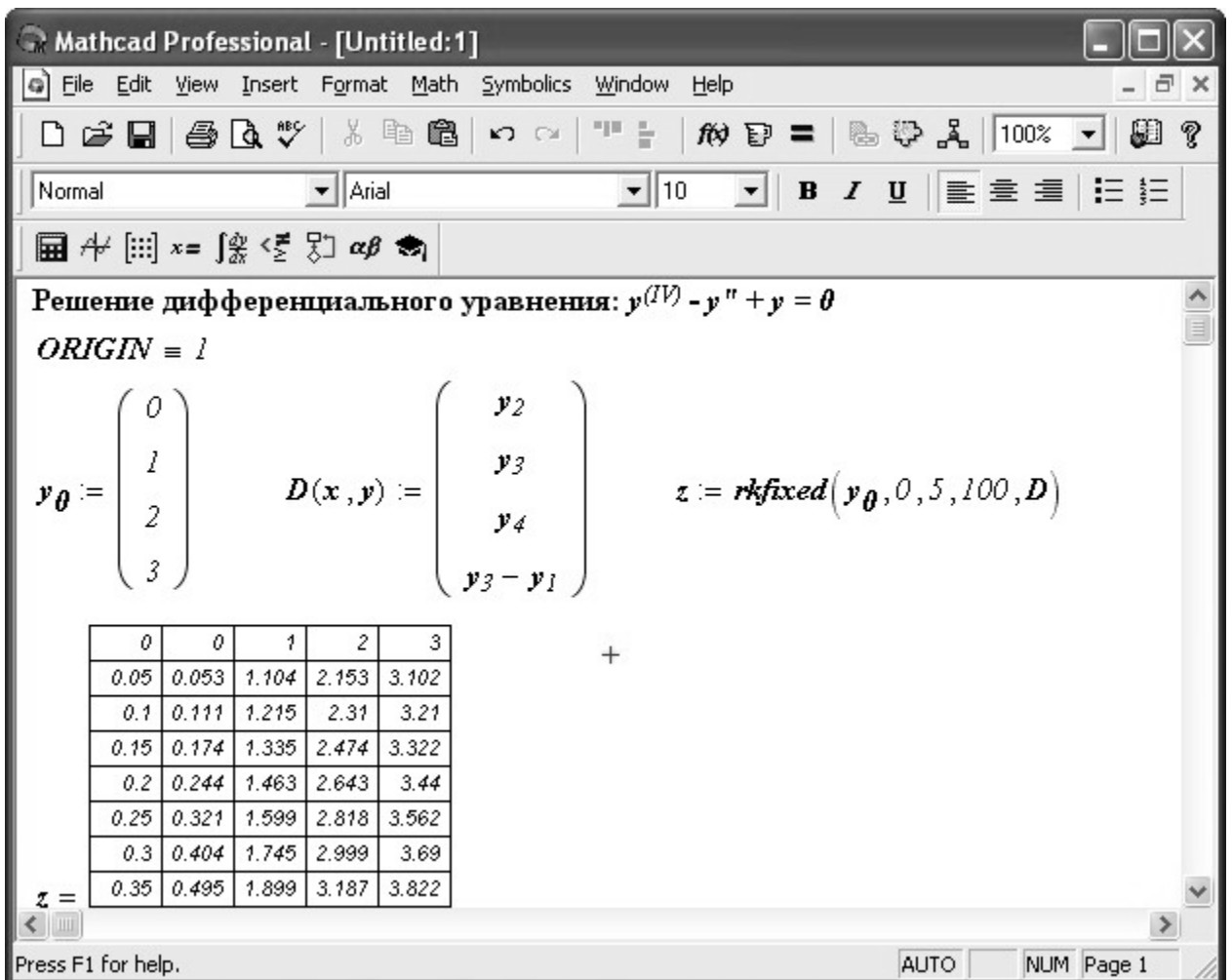


Рисунок 2.1 — Решение дифференциального уравнения

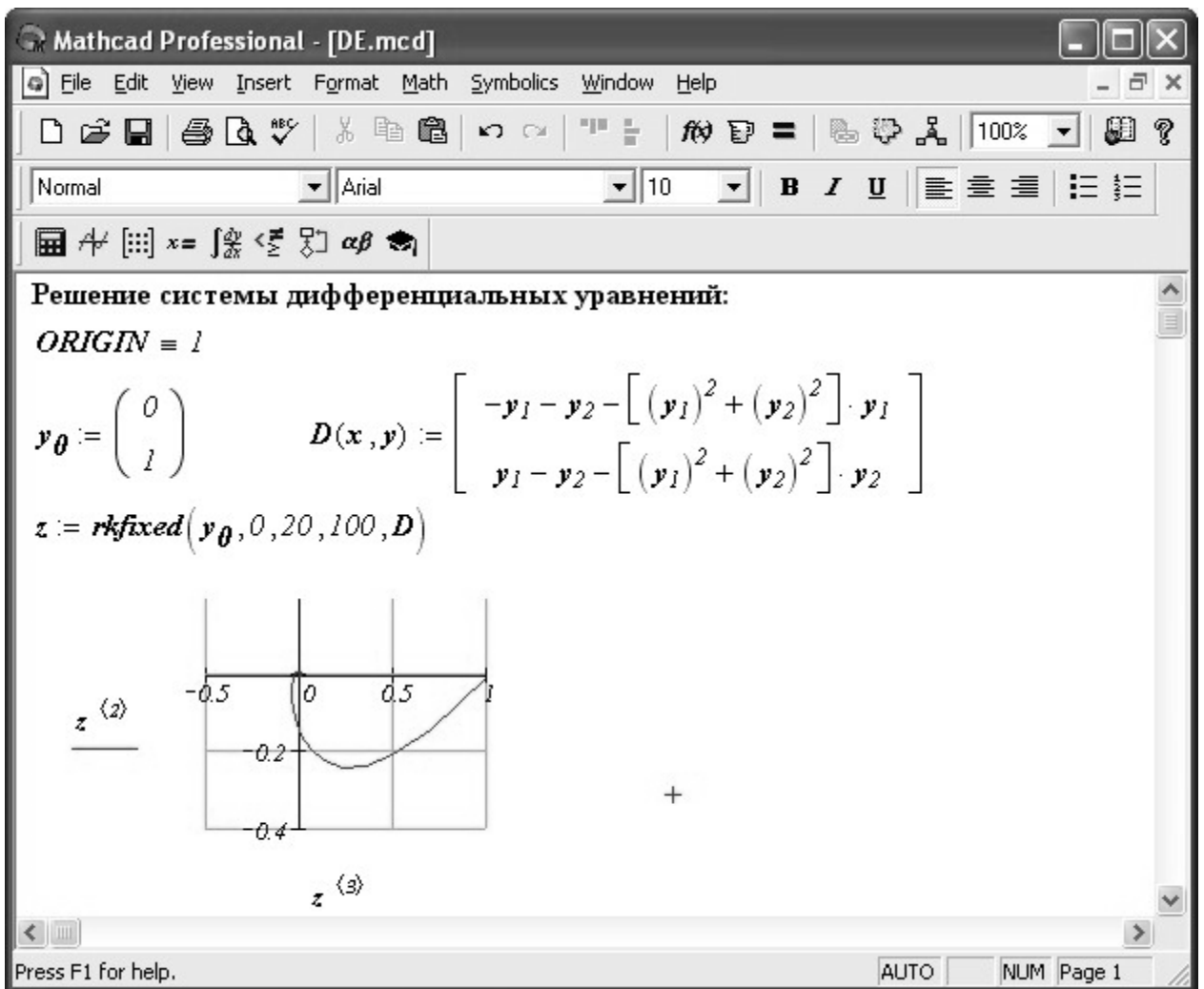


Рисунок 2.2 — Решение системы дифференциальных уравнений

В ряде случаев для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных относительно старшей производной, удобно использовать функцию *odesolve*.

| Имя функции | Возвращается... |
|--------------------------|---|
| <i>odesolve(x, X, h)</i> | функция, являющаяся решением дифференциального уравнения. <i>x</i> — вещественная переменная интегрирования дифференциального уравнения. <i>X</i> — правая граница интервала интегрирования. <i>h</i> — величина шага поиска решения уравнения (необязательный параметр). |

Функция *odesolve* работает совместно с решающим блоком *Given*, внутри которого размещается дифференциальное уравнение и заданные в форме логических выражений начальные или граничные условия, число которых должно быть равно порядку уравнения. Пример использования *odesolve* показан на рисунке 2.3 (для ввода символа производной $y'(x)$ используется комбинация клавиш [Ctrl] F7).

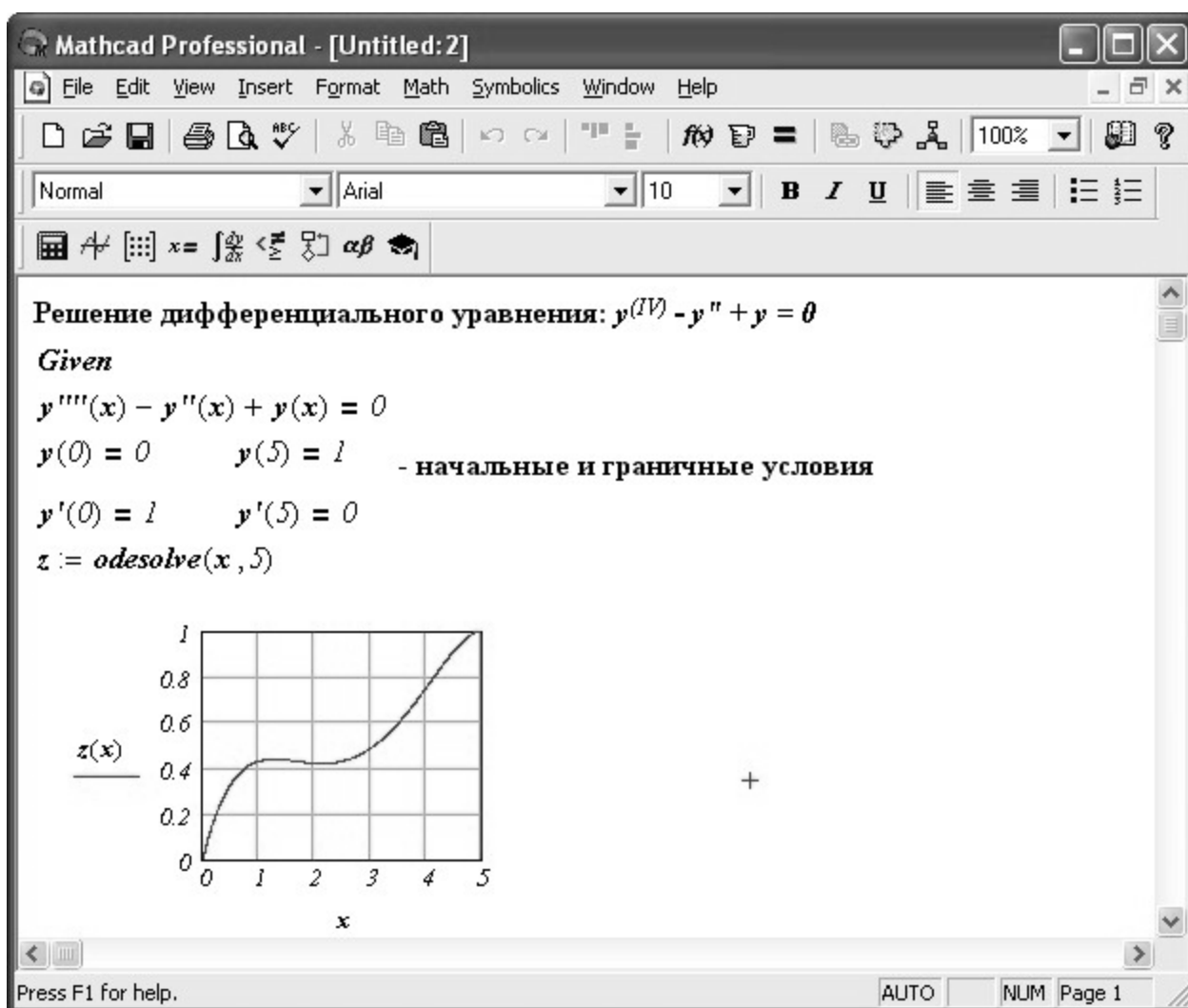


Рисунок 2.3 — Решение дифференциального уравнения с помощью функции *odesolve*

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Работа заключается в получении решения дифференциального

уравнения средствами системы *MathCAD* и указанным численным методом и оценке погрешности вычислительной схемы. Работа выполняется в следующем порядке.

1. Находится решение заданного дифференциального уравнения средствами *MathCAD* при числе узлов $n = 100$, которое в дальнейшем будет использоваться в качестве точного.

2. Заданным численным методом находится решение дифференциального уравнения при числе узлов $n = 10, 20, 50, 100$ (для метода Адамса точность выбирается в пределах $10^{-3} \dots 10^{-4}$).

3. Строятся графики решений, полученных различными способами, дается оценка влияния шага интегрирования уравнения на погрешность результатов.

Правила самостоятельной реализации алгоритмов приведены в [5]. Примеры выполнения задания представлены в приложении Б.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие существуют методы решения дифференциальных уравнений? Как строятся разностные аппроксимации производных?

2. На чем основывается работа одноступенчатых методов решения дифференциальных уравнений первого порядка? В чем сущность метода Эйлера, модифицированного метода Эйлера, метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности?

3. На чем основывается работа многоступенчатых методов решения дифференциальных уравнений первого порядка? В чем сущность методов Адамса второго и четвертого порядка точности?

4. Как численно решаются системы дифференциальных уравнений первого порядка?

5. Как численно решаются дифференциальные уравнения высших порядков?

6. Как решаются дифференциальные уравнения и их системы средствами *MathCAD*?

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 2003.
3. Канахен Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
4. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCAD 2000. Математический практикум. – М.: Финансы и статистика, 2003.
5. Болдырев Д.В. Решение алгоритмических задач средствами системы MathCAD. — Невинномысск: изд-во НТИ (филиала) ГОУ ВПО «СевКавГТУ», 2005.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

| № | Уравнение | Начальные условия | Отрезок интегрирования | Метод решения |
|---|--|----------------------|------------------------|--------------------------------|
| 1 | $y'' + y = 1 + \exp(x)$ | $y_0 = 1, y'_0 = 0$ | $[0, 1]$ | Эйлера |
| 2 | $(1 + x^2) \cdot y'' + (y')^2 + 1 = 0$ | $y_0 = 1, y'_0 = 1$ | $[0, 2]$ | модифицированный Эйлера |
| 3 | $x^2 \cdot y'' - 2 \cdot y = 0$ | $y_0 = 1, y'_0 = 0$ | $[0, 3]$ | Рунге-Кутта четвертого порядка |
| 4 | $y'' + x \cdot y' - x^2 \cdot y = 8 \cdot x$ | $y_0 = 0, y'_0 = -4$ | $[0, 1]$ | Адамса второго порядка |
| 5 | $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' = 0$ | $y_0 = 1, y'_0 = -1$ | $[0, 2]$ | Эйлера |
| 6 | $x^2 \cdot y'' + 2 \cdot x \cdot y' - y = 0$ | $y_0 = 2, y'_0 = -1$ | $[0, 3]$ | модифицированный Эйлера |
| 7 | $4 \cdot x \cdot y'' + 2 \cdot y' + y = 0$ | $y_0 = 2, y'_0 = 1$ | $[0, 1]$ | Рунге-Кутта четвертого порядка |

| № | Уравнение | Начальные условия | Отрезок интегрирования | Метод решения |
|----|---|----------------------|------------------------|--------------------------------|
| 8 | $x^2 \cdot y'' - 4 \cdot x \cdot y' + 6 \cdot y = 0$ | $y_0 = 1, y'_0 = 2$ | $[0, 2]$ | Адамса второго порядка |
| 9 | $y'' - 3 \cdot y = e^x \cdot [\sin(x) + \cos(x)]$ | $y_0 = 2, y'_0 = -1$ | $[0, 3]$ | Эйлера |
| 10 | $y'' - 2 \cdot y' + 3 \cdot y = x^3 \cdot e^{-x}$ | $y_0 = 1, y'_0 = 2$ | $[0, 1]$ | модифицированный Эйлера |
| 11 | $y'' + y' + y = e^{-x} \cdot \cos(x) + x$ | $y_0 = -1, y'_0 = 3$ | $[0, 2]$ | Рунге-Кутта четвертого порядка |
| 12 | $y'' - y = e^{2 \cdot x} \cdot (x - 1)$ | $y_0 = 1, y'_0 = -1$ | $[0, 3]$ | Адамса второго порядка |
| 13 | $y'' - 4 \cdot y' + 5 \cdot y = e^x + x^2$ | $y_0 = 1, y'_0 = 1$ | $[0, 1]$ | Эйлера |
| 14 | $y'' - \sin(x) \cdot y' - 6 \cdot y = 2 \cdot e^{4 \cdot x}$ | $y_0 = 0, y'_0 = 0$ | $[0, 2]$ | модифицированный Эйлера |
| 15 | $y'' + 2 \cdot y' + 2 \cdot y = 2 \cdot e^x \cdot \cos(x)$ | $y_0 = 5, y'_0 = 4$ | $[0, 3]$ | Рунге-Кутта четвертого порядка |
| 16 | $y'' - 2 \cdot y' - 3 \cdot y = x \cdot \cos(x) + e^x$ | $y_0 = 3, y'_0 = 1$ | $[0, 1]$ | Адамса второго порядка |
| 17 | $y'' - 2 \cdot y' + x \cdot y = x \cdot e^{2 \cdot x} + e^{-x}$ | $y_0 = 4, y'_0 = 4$ | $[0, 2]$ | Эйлера |

| № | Уравнение | Начальные условия | Отрезок интегрирования | Метод решения |
|----|--|----------------------|------------------------|--------------------------------|
| 18 | $y'' = (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x}$ | $y_0 = 5, y'_0 = -1$ | $[0, 3]$ | модифицированный Эйлера |
| 19 | $y'' + y = x^2 \cdot e^{-x} \cdot \sin(x)$ | $y_0 = 1, y'_0 = 2$ | $[0, 1]$ | Рунге-Кутта четвертого порядка |
| 20 | $y'' + y = x^2 - x + 2$ | $y_0 = 2, y'_0 = 3$ | $[0, 2]$ | Адамса второго порядка |

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(документ MathCAD)

Решение дифференциального уравнения $y''(x) + y'(x) + y(x) = \exp(-x)$.

Преобразование к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \exp(-x) - y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Границы области интегрирования дифференциального уравнения:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Начальные условия:

$$y_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение уравнения средствами MathCAD (аналог точного решения):

$$z := rkfixed(y_0, x_0, x_1, 100, D)$$

Процедура решения уравнения методом Эйлера:

$$Euler(N) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{x_1 - x_0}{N} \\ x_0 \leftarrow x_0 \\ y^{(0)} \leftarrow y_0 \\ \text{for } k \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_k \leftarrow x_{k-1} + h \\ y^{(k)} \leftarrow y^{(k-1)} + h \cdot D(x_{k-1}, y^{(k-1)}) \end{array} \right. \\ \text{stack}(x^T, y) \end{array} \right.$$

Решение уравнения методом Эйлера для разного числа интервалов интегрирования:

$$(z_{100} \ z_{50} \ z_{20} \ z_{10}) := (Euler(100)^T \ Euler(50)^T \ Euler(20)^T \ Euler(10)^T)$$

Оценка точности метода Эйлера для разного числа интервалов интегрирования:

