

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал)

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Методические указания к выполнению лабораторной работы

15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2021

В методических указаниях изложены основные сведения о методах приближенного вычисления производных таблично заданных функций и рассмотрены методы решения задач численного дифференцирования с помощью современных программных средств.

Составитель: *к. т. н., доцент Болдырев Д.В.*

Отв. редактор: *к. т. н., доцент В.М. Рейдер*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	4
1.1 Понятие об аппроксимации производных	4
1.2 Численное дифференцирование с использованием интерполяционных полиномов	6
1.3 Численное дифференцирование с использованием метода неопределённых коэффициентов	10
1.4 Характеристика методов численного дифференцирования	11
1.5 Вычисление частных производных	11
2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ MathCAD	12
3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	14
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	15
ЛИТЕРАТУРА	15
ПРИЛОЖЕНИЯ	16

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является усвоение студентом основных понятий, связанных с определением производных функции одной переменной, заданной в табличной форме, и приобретение навыков решения задач численного дифференцирования с помощью современных программных средств.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Понятие об аппроксимации производных

Задача дифференцирования функций традиционно решается с помощью таблиц производных. В расчётах на ЭВМ это не всегда удобно (особенно, если аналитическое определение производных затруднено). Такой подход будет вообще непродуктивным, если функции заданы в табличной форме.

При численном дифференцировании в качестве первого приближения производной функции $y=f(x)$ используют соотношение:

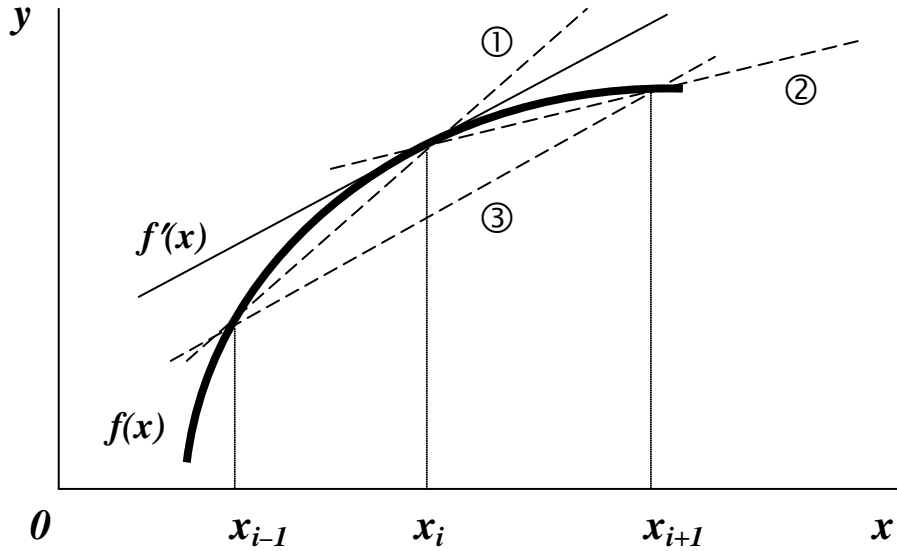
$$y' = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это выражение называется *аппроксимацией (приближением) производной с помощью отношения конечных разностей* (приращение $\Delta f(x)$ и Δx здесь конечны в отличие от их бесконечно малых значений в определении производной).

Пусть функция $y=f(x)$ задана в виде набора значений $\{x_i, y_i, i=0, \dots, n\}$. Можно получить различные формулы для аппроксимации производных в одной и той же точке y_i с помощью левых, правых и центральных разностей:

$$y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

Геометрическая интерпретация разностных схем приведена на рисунке 1. Очевидно, что наименьшую «угловую» погрешность даёт аппроксимация производной с помощью центральной разности.



1 – левая разность; 2 – правая разность; 3 – центральная разность

Рисунок 1 – Разностная аппроксимация производной

Можно также получить выражения для производных более высокого порядка. Например,

$$\begin{aligned} y''_i &\approx \frac{y'_{i+1} - y'_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{(y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i) - (y_i - y_{i-1})/(x_i - x_{i-1})}{x_{i+1} - x_i} = \\ &= \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{y_i - y_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}. \end{aligned}$$

Разностные выражения можно составить для производных любых порядков. Однако, считать их корректными нельзя, так как обычно расстояние между соседними узлами x_{i-1} , x_i , x_{i+1} и т. д. не стремится к нулю (как этого требует определение производной), что является источником погрешности аппроксимации. С другой стороны, если зна-

чения y_i задаются с некоторой *погрешностью округления* (например, из-за приближённого представления в разрядной сетке ЭВМ), то уменьшение расстояния между узлами $h=x_i-x_{i-1}$ может привести к численной неустойчивости решения. К тому же, для хорошей аппроксимации необходимо использовать значения функции y_i во многих точках, а традиционные разностные схемы этого не предусматривают.

Примерная зависимость погрешности численного дифференцирования от величины h показана на рисунке 2. Очевидно, что наименьшая суммарная погрешность вычисления производных достигается, когда погрешности округления и аппроксимации имеют приблизительно один порядок.



Рисунок 2 – Погрешность численного дифференцирования

1.2 Численное дифференцирование с использованием интерполяционных полиномов

При таком подходе функция $y=f(x)$ заменяется интерполяционным полиномом, производные которого вычисляются аналитически.

Сам полином может строиться как глобально, так и локально. Количество узлов, включаемых в интерполяцию, определяется требуемым порядком производной. Для аппроксимации производной порядка k необходимы значения функции в $k+1$ узлах.

Используем полином Лагранжа для трёх узлов x_{i-1} , x_i и x_{i+1} .

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\ &+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\ &+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}. \end{aligned}$$

Обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{h_i \cdot h_{i+1}} \cdot y_i + \\ &+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{h_{i+1} \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{2 \cdot x - x_i - x_{i+1}}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{2 \cdot x - x_{i-1} - x_{i+1}}{h_i \cdot h_{i+1}} \cdot y_i + \\ &+ \frac{2 \cdot x - x_{i-1} - x_i}{h_{i+1} \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L''(x) &= \frac{2}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{2}{h_i \cdot h_{i+1}} \cdot y_i + \\ &+ \frac{2}{h_{i+1} \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i+1}. \end{aligned}$$

Для схемы с равноотстоящими узлами ($h_i = h_{i+1} = h$):

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{1}{2 \cdot h^2} \cdot [(2 \cdot x - x_i - x_{i+1}) \cdot y_{i-1} + (2 \cdot x - x_{i-1} - x_{i+1}) \cdot y_i + \\ &+ (2 \cdot x - x_{i-1} - x_i) \cdot y_{i+1}], \end{aligned}$$

Значения первых производных в узлах интерполяции:

$$L'(x_{i-1}) = \frac{1}{2 \cdot h} \cdot [-3 \cdot y_{i-1} + 4 \cdot y_i - y_{i+1}],$$

$$L'(x_i) = \frac{1}{2 \cdot h} \cdot [y_{i+1} - y_{i-1}],$$

$$L'(x_{i+1}) = \frac{1}{2 \cdot h} \cdot [y_{i-1} - 4 \cdot y_i + 3 \cdot y_{i+1}].$$

Используя полином Лагранжа, можно составить аналогичные схемы аппроксимации производных для большего числа узлов. Например, для четырёх узлов получим:

$$L'(x_{i-1}) = \frac{1}{6 \cdot h} \cdot [-11 \cdot y_{i-1} + 18 \cdot y_i - 9 \cdot y_{i+1} + 2 \cdot y_{i+2}],$$

$$L'(x_i) = \frac{1}{6 \cdot h} \cdot [-2 \cdot y_{i-1} - 3 \cdot y_i + 6 \cdot y_{i+1} - y_{i+2}],$$

$$L'(x_{i+1}) = \frac{1}{6 \cdot h} \cdot [y_{i-1} - 6 \cdot y_i + 3 \cdot y_{i+1} + 2 \cdot y_{i+2}],$$

$$L'(x_{i+2}) = \frac{1}{6 \cdot h} \cdot [-2 \cdot y_{i-1} + 9 \cdot y_i - 18 \cdot y_{i+1} + 11 \cdot y_{i+2}],$$

Для пяти узлов:

$$L'(x_{i-2}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [-25 \cdot y_{i-2} + 48 \cdot y_{i-1} - 36 \cdot y_i + 16 \cdot y_{i+1} - 3 \cdot y_{i+2}],$$

$$L'(x_{i-1}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [-3 \cdot y_{i-2} - 10 \cdot y_{i-1} + 18 \cdot y_i - 6 \cdot y_{i+1} + y_{i+2}],$$

$$L'(x_i) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [y_{i-2} - 8 \cdot y_{i-1} + 8 \cdot y_{i+1} - y_{i+2}],$$

$$L'(x_{i+1}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [-y_{i-2} + 6 \cdot y_{i-1} - 18 \cdot y_i + 10 \cdot y_{i+1} + 3 \cdot y_{i+2}],$$

$$L'(x_{i+2}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [3 \cdot y_{i-2} - 16 \cdot y_{i-1} + 36 \cdot y_i - 48 \cdot y_{i+1} + 25 \cdot y_{i+2}].$$

С помощью интерполяционных полиномов Лагранжа можно получить схемы аппроксимации старших производных. Например, для трёх узлов:

$$L''(x_{i-1}) = L''(x_i) = L''(x_{i+1}) = \frac{1}{h^2} \cdot [y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1}].$$

Для четырёх узлов:

$$L''(x_{i-1}) = \frac{1}{h^2} \cdot [2 \cdot y_{i-1} - 5 \cdot y_i + 4 \cdot y_{i+1} - y_{i+2}],$$

$$L''(x_i) = \frac{1}{h^2} \cdot [y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1}],$$

$$L''(x_{i+1}) = \frac{1}{h^2} \cdot [y_i - 2 \cdot y_{i+1} + y_{i+2}],$$

$$L''(x_{i+2}) = \frac{1}{h^2} \cdot [-y_{i-1} + 4 \cdot y_i - 5 \cdot y_{i+1} + 2 \cdot y_{i+2}].$$

Для пяти узлов:

$$L''(x_{i-2}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [35 \cdot y_{i-2} - 104 \cdot y_{i-1} + 114 \cdot y_i - 56 \cdot y_{i+1} + 11 \cdot y_{i+2}],$$

$$L''(x_{i-1}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [11 \cdot y_{i-2} - 20 \cdot y_{i-1} + 6 \cdot y_i + 4 \cdot y_{i+1} - y_{i+2}],$$

$$L''(x_i) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [-y_{i-2} + 16 \cdot y_{i-1} - 30 \cdot y_i + 16 \cdot y_{i+1} - y_{i+2}],$$

$$L''(x_{i+1}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [-y_{i-2} + 4 \cdot y_{i-1} + 6 \cdot y_i - 20 \cdot y_{i+1} + 11 \cdot y_{i+2}],$$

$$L''(x_{i+2}) = \frac{1}{12 \cdot h} \cdot [11 \cdot y_{i-2} - 56 \cdot y_{i-1} + 114 \cdot y_i - 104 \cdot y_{i+1} + 35 \cdot y_{i+2}].$$

Достаточно эффективно, особенно при ограниченном числе узлов, численное дифференцирование *методом сплайнов*. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $f(x)$ интерполируется сплайном вида

$$S_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3,$$

коэффициенты которого определяются по общим правилам [1, 2]. Для $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f'(x) \approx S'_i(x) = b_i + 2 \cdot c_i \cdot (x - x_{i-1}) + 3 \cdot d_i \cdot (x - x_{i-1})^2,$$

$$f''(x) \approx S''_i(x) = 2 \cdot c_i + 6 \cdot d_i \cdot (x - x_{i-1}),$$

$$f'''(x) \approx S'''_i(x) = 6 \cdot d_i.$$

Основной недостаток – невозможность получить значения производных выше третьего порядка.

1.3 Численное дифференцирование с использованием метода неопределённых коэффициентов

Этот метод обычно применяется для схемы с произвольным расположением узлов в том случае, когда число узлов достаточно велико, что затрудняет аналитическое дифференцирование интерполяционного полинома. Он заключается в следующем. Искомое выражение для производной порядка k в некоторой точке $x=x_i$ представляется в виде линейной комбинации значений функции в узлах x_0, x_1, \dots, x_n

$$y_i^{(k)} = c_0 \cdot y_0 + c_1 \cdot y_1 + \dots + c_n \cdot y_n.$$

Предполагается, что эта формула применима для полиномов вида $y=1, y=x_i-x_j, \dots, y=(x_i-x_j)^n$, производные от которых вычисляются аналитически. Подставляя последовательно эти соотношения в выражение для производной, получим систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_n .

$$c_0 \cdot (x_0 - x_j)^m + \dots + c_n \cdot (x_n - x_j)^m = m \cdot (x_i - x_j)^{m-1}, m = 0, \dots, n.$$

Если необходимо определить значение первой производной в точке (x_2, y_2) для трёх узлов x_0, x_1 и x_2 , то система примет вид (в качестве x_j принято значение x_0):

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 0 \\ c_0 \cdot (x_0 - x_0) + c_1 \cdot (x_1 - x_0) + c_2 \cdot (x_2 - x_0) = 1 \\ c_0 \cdot (x_0 - x_0)^2 + c_1 \cdot (x_1 - x_0)^2 + c_2 \cdot (x_2 - x_0)^2 = 2 \cdot (x_2 - x_0) \end{cases} .$$

Для равноотстоящих узлов:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \cdot h + c_2 \cdot 2 \cdot h = 1 \\ c_1 \cdot h^2 + c_2 \cdot 4 \cdot h^2 = 4 \cdot h \end{cases} .$$

Решением будут значения $c_0=1/(2 \cdot h)$, $c_1=-2/h$, $c_2=3/(2 \cdot h)$. Выражение для первой производной:

$$y'_2 = \frac{1}{2 \cdot h} \cdot [y_0 - 4 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2].$$

1.4 Характеристика методов численного дифференцирования

Для гладких функций, производные которых меняются в относительно узких диапазонах, дифференцирование любым из перечисленных методов даёт примерно равные по точности результаты. В общем случае погрешность операции снижается с увеличением порядка схемы (числа используемых узлов) и уменьшением расстояния между узлами. При относительно небольшом числе равноотстоящих узлов более простым является дифференцирование с помощью интерполяционных многочленов. Для функций малой гладкости (имеющих только первую или вторую производные) и для функций с точками разрыва производных методы обычно работают ненадёжно.

1.5 Вычисление частных производных

Используя понятие частной производной, для малых значений приращений аргументов функции $f(x, y)$ можно записать:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta_y) - f(x, y)}{\Delta_y}.$$

Для расчёта частных производных строятся разностные схемы (предпочтение имеют центральные разности). Обозначим $f_{ij}=f(x, y)$, $f_{i\pm 1,j}=f(x \pm \Delta_x, y)$, $f_{i,j\pm 1}=f(x, y \pm \Delta_y)$. Тогда

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta_x} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{4 \cdot \Delta_x},$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta_y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{4 \cdot \Delta_y},$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2 \cdot f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta_x^2},$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2 \cdot f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta_y^2},$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4 \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y}.$$

Используя разностные схемы с большим числом узлов, можно получить более точную аппроксимацию частных производных.

2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ MathCAD

MathCAD располагает встроенными операторами численного дифференцирования.

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Производная	$\frac{d}{dx} f(x)$?	Вычисление производной функции $f(x)$ по x .
Производная порядка n	$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	[Ctrl]?	Вычисление производной порядка n функции $f(x)$ по x .

Все переменные в дифференцируемой функции должны быть предварительно определены. Переменная, по которой выполняется дифференцирование, и функция должны иметь скалярные значения. Порядок производной должен быть в диапазоне $0...5$.

Для определения интеграла MathCAD использует алгоритм Рундера, использующего разностную аппроксимацию производных. Шаг построения разностей уменьшается, пока погрешность расчёта не станет меньше установленного порогового значения. Точность дифференцирования зависит от вида функции и обычно составляет 7–8 значащих цифр, если точка, в которой вычисляется производная, не слишком близка к какой-либо особенности функции. С увеличением порядка производных точность алгоритма убывает.

Для расчёта производной с помощью кубических сплайнов используются функции *lspline*, *pspline* и *cspline*, которые различаются формой сплайна в граничных точках. Они возвращают вектор вторых производных интерполяционной кривой в узлах. Значения этого вектора используются для нахождения интерполируемого значения в произвольных точках с помощью функции *interp*.

Имя функции	Возвращается...
<i>lspline</i> (x, y)	Вектор вторых производных кривой сплайна, которая приближается в граничных точках к прямой линии.
<i>pspline</i> (x, y)	Вектор вторых производных кривой сплайна, которая приближается в граничных точках к параболе.
<i>cspline</i> (x, y)	Вектор вторых производных кривой сплайна, которая приближается в граничных точках к кубическому полиному.

Имя функции	Возвращается...
$interp(S, x, y, z)$	Интерполируемое значение, соответствующее аргументу z . S – вектор вторых производных, определяемый функциями $lspline$, $pspline$ и $cspline$.

Примеры численного дифференцирования приведены в приложении Б.

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Работа заключается в нахождении значений производной функции переменной $f(x)$ разными методами и оценке погрешности этих методов. Она выполняется студентом индивидуально по заданию, выданному преподавателем. Варианты заданий даны в приложении А.

Работа выполняется в следующем порядке.

1. Задаются выражения для функции $F(x)$ и её производной.
2. Задаются пределы изменения аргумента a и b .
3. Рассчитываются неопределённые коэффициенты для построения аппроксимации производной по заданному числу узлов k .
4. Задаётся число точек на отрезке $[a, b]$, в которых будет вычисляться производная.
5. Рассчитываются значения производной функции с разностной схемы при заданном числе узлов.
6. Рассчитываются значения производной с помощью кубических сплайнов и интерполяционного полинома Лагранжа.
7. Значение n уменьшается в два раза, и п. п. 5–6 повторяются до тех пор, пока n не станет равным **4...6**.
8. Строится график зависимостей погрешности методов от числа узлов и даётся оценка точности различных алгоритмов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём заключается сущность численного дифференцирования? Что такое разностные схемы? В чём заключается некорректность разностных схем?
2. Как строятся схемы численного дифференцирования с помощью интерполяционных полиномов для различного числа узлов?
3. Как выполняется численное дифференцирование методом неопределённых коэффициентов?
4. Как вычисляются частные производные функций нескольких переменных?
5. Как выполняется дифференцирование средствами системы MathCAD?

ЛИТЕРАТУРА

1. Вержбицкий В.М. Численные методы: в 2-х кн. – М.: Высшая школа, 2000.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 2003.
4. Канахен Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
5. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994.
6. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCAD 2000. Математический практикум. – М.: Финансы и статистика, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

№ варианта	Исходная функция $F(x)$	Производная функция $f(x)$	$[a, b]$	n	k
1	$\frac{3}{x+3} + \ln(x+3)$	$\frac{x}{(x+3)^2}$	$[0, 2]$	40	4
2	$\sqrt{4-x^2} - 2 \cdot \ln \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$	$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$	$[2, 3]$	80	5
3	$\frac{\sin(2 \cdot x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2}$	$x \cdot \sin(2 \cdot x)$	$[0, 1]$	30	4
4	$\frac{2^{3x}}{3 \cdot \ln 2}$	2^{3x}	$[0, 1]$	50	5
5	$\frac{\ln^3 x}{3}$	$\frac{\ln^2 x}{x}$	$[1, 5]$	50	4
6	$\frac{\exp(2 \cdot x)}{5} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x)$	$\exp(2 \cdot x) \cdot \sin x$	$[0, 2]$	30	5
7	$\frac{2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 9 \cdot \ln(2 \cdot x + 3)}{8}$	$\frac{x^2}{2 \cdot x + 3}$	$[1, 3]$	80	4
8	$\frac{2 \cdot (15 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 32)}{105} \cdot \sqrt{(x+2)^3}$	$x^2 \cdot \sqrt{x+2}$	$[1, 4]$	50	5
9	$-\frac{x}{3} \cdot \operatorname{ctg}(3 \cdot x) + \frac{1}{9} \cdot \ln(\sin(3 \cdot x))$	$\frac{x}{\sin^2(3 \cdot x)}$	$[1, 3]$	40	4
10	$\frac{\exp(0.8 \cdot x)}{0.64} \cdot (0.8 \cdot x - 1)$	$x \cdot \exp(0.8 \cdot x)$	$[0, 2]$	40	5

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ А

№ варианта	Исходная функция $F(x)$	Производная функция $f(x)$	$[a, b]$	n	k
11	$-2 \cdot \ln \left(\frac{0.5 + \sqrt{x^2 + 0.25}}{x} \right)$	$\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 + 0.25}}$	$[1, 2]$	60	4
12	$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot x)$	$\sin^2 x$	$[0, 2]$	50	5
13	$\frac{4 \cdot x - 1.6}{3} \cdot \sqrt{0.5 \cdot x + 0.1}$	$\frac{x}{0.5 \cdot x + 0.1}$	$[3, 5]$	40	4
14	$2 \cdot x \cdot \sin x - (x^2 - 2) \cdot \cos x$	$x^2 \cdot \sin x$	$[0, 1]$	80	5
15	$\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$	$\frac{1}{x \cdot \ln x}$	$[2, 3]$	60	4
16	$\frac{1}{3} \cdot \ln^3 x$	$\frac{\ln^2 x}{x}$	$[1, 4]$	40	5
17	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - \ln 3$	$\frac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$	$[0, 2]$	60	4
18	$\cos \frac{1}{x} - \cos 1$	$\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x}$	$[1, 3]$	80	5
19	$x^x - 1$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$	$[1, 3]$	50	4
20	$\frac{1}{3 \cdot \ln 2} \cdot (2^{3x} - 1)$	2^{3x}	$[0, 1]$	30	5

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ (документ MathCAD)

Исходная функция и точное значение производной:

$$F(x) := \sin(x) \quad f(x) := \cos(x)$$

Пределы дифференцирования:

$$b := 4$$

Расчёт неопределённых коэффициентов для схемы из трёх узлов:

$$x_1 := x_0 + h \quad x_2 := x_0 + 2 \cdot h$$

$$C(\xi, x_0, x_1, x_2) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ (x_0 - x_0)^2 & (x_1 - x_0)^2 & (x_2 - x_0)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \cdot (\xi - x_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C(x_0, x_0, x_1, x_2)^T \\ C(x_1, x_0, x_1, x_2)^T \\ C(x_2, x_0, x_1, x_2)^T \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{(2 \cdot h)} & \frac{2}{h} & \frac{-1}{(2 \cdot h)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{-1}{(2 \cdot h)} & 0 & \frac{1}{(2 \cdot h)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{(2 \cdot h)} & \frac{-2}{h} & \frac{3}{(2 \cdot h)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Процедура расчёта первых производных методом конечных разностей для схемы и трёх узлов:

$$\Delta f(N) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{N} \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ \Delta_0 \leftarrow -3 \cdot F(x_0) + 4 \cdot F(x_1) - F(x_2) \\ \text{for } i \in 1..N - 1 \\ \quad \Delta_i \leftarrow -F(x_{i-1}) + F(x_{i+1}) \\ \Delta_N \leftarrow F(x_{N-2}) - 4 \cdot F(x_{N-1}) + 3 \cdot F(x_N) \\ \frac{\Delta}{2 \cdot h} \end{array} \right.$$

Процедуры расчёта первых производных с помощью интерполяционных схем (трёх видов сплайнов и интерполяционного полинома Лагранжа):

$$df(\xi, N) := \left(\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N \\ \quad x_i \leftarrow a + i \cdot \frac{b-a}{N} \\ \quad \left(\begin{array}{l} \text{interp}(\text{lspline}(x, F(x)), x, F(x), \xi) \\ \text{interp}(\text{pspline}(x, F(x)), x, F(x), \xi) \\ \text{interp}(\text{cspline}(x, F(x)), x, F(x), \xi) \\ \sum_{i=0}^N F(x)_i \cdot \prod_{j=0}^N \text{if}\left(i \neq j, \frac{\xi - x_j}{x_i - x_j}, 1\right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$D(\xi, N) := \left(\begin{array}{l} \frac{d}{d\xi} df(\xi, N)_0 \\ \frac{d}{d\xi} df(\xi, N)_1 \\ \frac{d}{d\xi} df(\xi, N)_2 \\ \frac{d}{d\xi} df(\xi, N)_3 \end{array} \right)$$

Функции расчёта среднего квадрата погрешности численного дифференцирования для разностной и интерполяционных схем для разного числа узлов:

$$P(N) := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^N \left(f\left(x \leftarrow a + i \cdot \frac{b-a}{N}\right) - \Delta f(N)_i \right)^2$$

$$Q(N) := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^N \left(f\left(x \leftarrow a + i \cdot \frac{b-a}{N}\right) - D(x, N) \right)^2$$

Зависимость погрешности численного дифференцирования различными методами от числа узлов:

$$k := 0..8$$

$$N_k := k \cdot 2 + 4$$

