

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал)

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Методические указания к выполнению лабораторной работы

15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2021

В методических указаниях изложены основные сведения о численном интегрировании функций и дано описание основных классов и методов реализации этих операций. Рассмотрены правила численного интегрирования с помощью современных программных средств решения математических задач.

Составитель: *к. т. н., доцент Болдырев Д.В.*

Отв. редактор: *к. т. н., доцент В.М. Рейдер*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	4
1.1 Основные сведения о численном интегрировании	4
1.2 Методы Ньютона–Котеса	6
1.3 Методы Гаусса	9
1.4 Сравнительная характеристика методов численного интегрирования	11
1.5 Особые случаи численного интегрирования	12
1.6 Расчёт кратных интегралов	13
1.7 Расчёт определённых интегралов методом статистических испытаний	15
2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ MathCAD	17
3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	18
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	19
ЛИТЕРАТУРА	19
ПРИЛОЖЕНИЯ	20

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является усвоение студентом основных правил расчёта определённых интегралов численными методами и получение навыков реализации этих операций с помощью современных программных средств решения математических задач.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Основные сведения о численном интегрировании

Задача нахождения определённых интегралов является в инженерной практике одной из самых распространённых. Если исходная функция $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a, b]$ непрерывна и имеет первообразную $F(x)$, аналитическое определение которой не вызывает затруднений, то значение интеграла вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

При решении реальных задач применить эту схему не всегда возможно по следующим причинам:

- аналитическое нахождение первообразной функции $f(x)$ приводит к получению громоздких выражений или вообще невозможно;
- на отрезке интегрирования функция $f(x)$ имеет точки разрыва первого или второго рода;
- функция $f(x)$ задана таблично.

В таких случаях используют численные методы. Логика их работы обычно основана на замене непрерывной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом, проходящим через множество точек $\{x_i, i=0, 1, \dots, n\}$, которые находятся внутри отрезка интегрирования (т. е.

$a \leq x_i \leq b$). Сам определённый интеграл приближённо заменяется выражением

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot f(x_i),$$

которое называют конечной *квадратурной формулой*. Точки x_i называют *узлами*, а c_i – *коэффициентами квадратурной формулы*.

Разность

$$\Psi_n = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n c_i \cdot f(x_i)$$

составляет погрешность метода. Её величина зависит от числа и расположения узлов x_i и значений коэффициентов c_i .

Если на отрезке $[a, b]$ введена сетка с (не обязательно равным) расстоянием между узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, \dots, n$, то искомый определённый интеграл представляется в виде суммы

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Таким образом, для построения схемы численного интегрирования достаточно получить квадратурную формулу для каждого из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.

Геометрическая интерпретация методов численного интегрирования следующая. Определённому интегралу соответствует площадь S фигуры, ограниченной функцией $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. рисунок 1). Разбивая отрезок $[a, b]$ вертикальными линиями на участки $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$, получаем множество элементарных криволинейных трапеций. Каждую из них можно заменить близкой по форме фигурой, площадь которой S_i вычисляется аналитически. Тогда

$$S \approx \sum_{i=1}^n S_i.$$

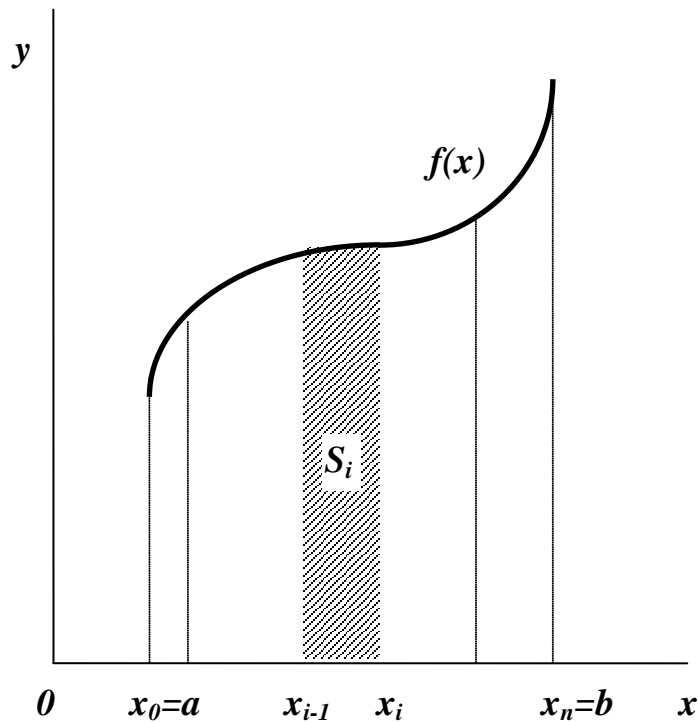


Рисунок 1 Геометрическая интерпретация определённого интеграла

Различают два подхода к построению квадратурных формул. В методах Ньютона–Котеса положение узлов x_i фиксируется до начала расчётов. В методах Гаусса положение узлов подбирается для достижения наивысшей точности при заданном числе интервалов интегрирования.

1.2 Методы Ньютона–Котеса

Эти методы используют интерполяционные полиномы различного порядка, которые строятся на множестве точек, принадлежащих отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$.

В *методе прямоугольников* строится семейство линий нулевого порядка (параллельных оси абсцисс), которые проходят через средние точки отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$. Геометрически это означает, что каждая элементарная криволинейная трапеция заменяется прямоугольником. Формулы метода для переменного расстояния меж-

ду узлами и для равноотстоящих узлов будут иметь вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i - h_i / 2) \cdot h_i$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i - h / 2)$$

В *методе трапеций* строится непрерывный интерполяционный полином первого порядка, проходящий через точки $\{(x_i, f(x_i)), i=0, 1, \dots, n\}$, что означает замену гладкой кривой $f(x)$ на секущую. Каждая элементарная криволинейная трапеция заменяется прямолинейной. Формулы метода для переменного расстояния между узлами и для равноотстоящих узлов имеют вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot h_i$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

В *методе парабол (Симпсона)* строится непрерывная (и в общем случае негладкая) интерполяционная функция, составленная из полиномов второго порядка. При этом на каждом двух соседних отрезках интегрирования функция $f(x)$ заменяется параболой, которая однозначно проходит через три точки $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$. Каждая пара элементарных криволинейных трапеций заменяется фигурой, ограниченной сверху линией второго порядка. Площадь её можно определить с помощью интерполяционной формулы Лагранжа

$$L_i(x) = f(x_{i-1}) \cdot \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} +$$

$$+ f(x_i) \cdot \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} +$$

$$+ f(x_{i+1}) \cdot \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)}$$

$$\begin{aligned}
 L_i(x) = & f(x_{i-1}) \cdot \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} - \\
 & - f(x_i) \cdot \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{h_i \cdot h_{i+1}} + \\
 & + f(x_{i+1}) \cdot \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{h_{i+1} \cdot (h_i + h_{i+1})}
 \end{aligned}$$

Функция Лагранжа интегрируется аналитически, что даёт возможность получить выражения для расчёта интеграла при переменном расстоянии между узлами и при равноотстоящих узлах. Так как любой локальный интерполяционный полином строится на двух отрезках интегрирования, то значение n в методе Симпсона должно быть чётным.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx & \approx \sum_{\substack{i=1 \\ i=i+2}}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_i(x) dx = \\
 & = \frac{1}{6} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i=i+2}}^{n-1} \left[\begin{aligned}
 & f(x_{i-1}) \cdot \frac{(h_i + h_{i+1}) \cdot (2 \cdot h_i - h_{i+1})}{h_i} + \\
 & + f(x_i) \cdot \frac{(h_i + h_{i+1})^3}{h_i \cdot h_{i+1}} + \\
 & + f(x_{i+1}) \cdot \frac{(h_i + h_{i+1}) \cdot (2 \cdot h_{i+1} - h_i)}{h_{i+1}}
 \end{aligned} \right], \\
 \int_a^b f(x) dx & \approx \frac{h}{3} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i=i+2}}^{n-1} [f(x_{i-1}) + 4 \cdot f(x_i) + f(x_{i+1})].
 \end{aligned}$$

Одним из методов численного интегрирования, особенно эффективным при ограниченном числе узлов, является метод сплайнов. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $f(x)$ интерполируется сплайном вида

$$S_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3,$$

коэффициенты которого определяются по общим правилам [1, 2].
Выражение для определённого интеграла представляется в виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_i(x) dx.$$

Обозначив $x_i - x_{i-1} = h_i$, можно записать:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \left[a_i \cdot h_i + \frac{1}{2} \cdot b_i \cdot h_i^2 + \frac{1}{3} \cdot c_i \cdot h_i^3 + \frac{1}{4} \cdot d_i \cdot h_i^4 \right].$$

Учитывая, что $a_i = y_{i-1}$, и то, что все остальные коэффициенты сплайна определяются через значения c_i , можно представить эту формулу в виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot h_i - \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^n [c_{i-1} + c_i] \cdot h_i^3.$$

В правой части первое слагаемое соответствует схеме метода трапеций. Второе слагаемое можно рассматривать как поправку к этому методу, которую даёт использование сплайнов.

1.3 Методы Гаусса

В этих методах расположение узлов x_i на отрезке $[a, b]$ подбирается так, чтобы достичь наивысшей точности интегрирования. Математическая формулировка задачи следующая. Пусть необходимо построить квадратурную формулу следующего вида:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n c_i \cdot f(\xi_i),$$

где неизвестными являются не только коэффициенты c_i , но и узлы ξ_i . Если считать, что $f(\xi) = \xi^m$, то квадратурная формула будет точна для всех полиномов степени $m = 0, \dots, 2n-1$. Тогда можно составить систему уравнений

$$c_1 \cdot \xi_1^m + c_2 \cdot \xi_2^m + \dots + c_n \cdot \xi_n^m = \int_{-1}^1 \xi^m d\xi, \quad m = 0, 2, \dots, 2 \cdot n - 1,$$

решением которой являются n коэффициентов c_i и n узлов ξ_i . Определять их рационально следующим образом. Значения аргумента ξ_i являются корнями интерполяционного полинома Лежандра

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n,$$

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \cdot \frac{(2 \cdot n - 2 \cdot m)!}{m! \cdot (n - m)! \cdot (n - 2 \cdot m)!} \cdot \xi^{n-2 \cdot m},$$

где символы $\lfloor \rfloor$ означают операцию деления нацело (число узлов n должно быть чётным). Коэффициенты c_i находятся по соотношению

$$c_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2) \cdot \left[\frac{d}{d\xi} P_n(\xi_i) \right]^2}.$$

При расчёте определённого интеграла отрезок $[-1, 1]$ масштабируется в диапазоне $[a, b]$ путём соответствующей замены переменных x . В результате схема Гаусса принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot f(x_i),$$

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cdot \xi_i + \frac{a+b}{2}.$$

Частным случаем метода Гаусса является квадратурная формула Чебышева, в которой оптимальное расположение узлов выбирается из предположения, что их веса равны. В этом случае

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i).$$

Из условия точности формулы для $f(\xi) = \xi, \xi^2, \dots, \xi^n$ можно получить систему из n уравнений для определения n узлов

$$\xi_1^m + \xi_2^m + \dots + \xi_n^m = \int_{-1}^1 \xi^m d\xi, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Эта система имеет решения при $n=1, 2, \dots, 7, 9$. При $n=8$ и $n>9$ она не имеет вещественных корней.

1.4 Сравнительная характеристика методов численного интегрирования

Для гладких функций (имеющих непрерывные производные достаточно высокого порядка) при одинаковом числе узлов n метод Гаусса даёт значительно более точные результаты, чем метод Симпсона, а последний – более точные результаты, чем методы прямоугольников и трапеций. Количество операций, которые необходимо выполнить для получения одной и той же точности, возрастает в той же последовательности. Для функций малой гладкости (имеющих только первую или вторую производные) и для функций с разрывами производных простые методы могут обеспечивать приблизительно равную погрешность со схемой Гаусса. Точность методов сплайнов и Симпсона приблизительно одинакова.

Формула Гаусса обеспечивает высокую точность для малого числа узлов, поэтому её рационально применять для интегрирования сложных функций, на вычисление значений которых затрачивается много времени. При росте числа n (30–40 и более) метод становится очень сложным, а на конечный результат начинают сильно влиять погрешности округления.

Если интегрируются таблично заданные функции, то метод Гаусса применим только при соответствующем расположении узлов, что на практике встречается редко. Для таких задач преимущества имеют методы сплайнов и Симпсона. Они также будут точными для любого полинома соответственно третьего и второго поряд-

ка.

1.5 Особые случаи численного интегрирования

Если подынтегральная функция $f(x)$ или её производные в некоторых внутренних точках ξ_j ($j=1, 2, \dots, k$) отрезка интегрирования $[a, b]$ терпят разрыв, то интеграл численно определяется для каждого отрезка непрерывности, и результаты складываются.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\xi_1} f(x) dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x) dx + \dots + \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x) dx + \int_{\xi_k}^b f(x) dx.$$

Проблема вычисления несобственных интегралов (имеющих хотя бы одну бесконечную границу интегрирования) обычно решается путём замены переменных. Например, подстановка $t=(x-a)/x$ соответствует преобразованию интегралов

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 \eta(t) dt.$$

При этом подынтегральная функция и её производные до некоторого порядка должны быть ограниченными.

Бесконечную границу можно заменить некоторым значением b .

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \Psi(b).$$

Величина b подбирается так, чтобы выполнялось условие $|\Psi(b)| < \varepsilon$.

Если в некоторой точке $\xi \in [a, b]$ функция $f(x)$ обращается в бесконечность, то её представляют в виде $f(x) = \mu(x) + \nu(x)$. Функция $\mu(x)$ должна быть ограниченной. Точка ξ является особой для функции $\nu(x)$, несобственный интеграл от которой должен вычисляться аналитически. Численный метод в этом случае используется только для интегрирования функции $\mu(x)$.

1.6 Расчёт кратных интегралов

Кратные интегралы можно вычислять повторным применением рассмотренных выше методов. При этом область интегрирования разбивают на части с помощью декартовой сетки координатных линий или поверхностей.

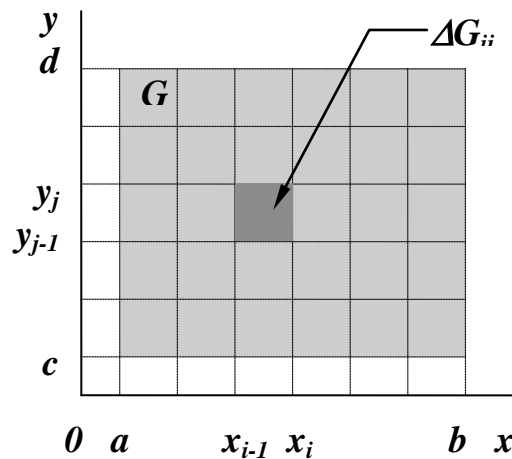


Рисунок 2 – Схема расчёта двойного интеграла

Если рассчитывается двойной интеграл

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy,$$

то обычно областью интегрирования G является прямоугольник $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. В ряде случаев её можно свести к прямоугольному виду. Если область G задана криволинейным четырёхугольником $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, то такое преобразование выполняется с помощью замены переменных

$$\zeta = \frac{y - \varphi_1(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Метод ячеек – одним из простейших методов определения кратных интегралов. Его схема предусматривает разбиение прямоугольной области интегрирования G на элементарные участки с по-

мощью сетки $x_i, i=0, \dots, n$ и $y_j, j=0, \dots, m$, площади которых равны

$$\Delta G_{ij} = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

По теореме о среднем значении функции $f(x, y)$ для каждой ячейки определяется соотношением

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{\Delta G_{ij}} \cdot \iint_{\Delta G_{ij}} f(x, y) dx dy.$$

Если считать значение $\bar{f}(x, y)$ приближённо равным величине функции в центре ячейки, то можно получить формулу

$$\iint_{\Delta G_{ij}} f(x, y) dx dy \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j,$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2},$$

$$\bar{y}_j = \frac{y_{j-1} + y_j}{2}.$$

После суммирования аналогичных выражений для всех ячеек получается выражение для расчёта двойного интеграла

$$\iint_{\Delta G} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j.$$

Эта схема легко распространяется на интегралы более высокой кратности.

Для повышения точности метода ячеек используют технологию *сгущения узлов сетки*, которая заключается в одновременном уменьшении шагов изменения каждой переменной при сохранении неизменным отношения m/n .

Решение задачи определения кратного интеграла можно свести к *последовательному вычислению определённых интегралов*. Например

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx,$$

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Для вычисления кратных интегралов возможна замена подынтегральной функции многомерным интерполяционным полиномом. Например, при постоянном шаге интегрирования по всем переменным h для соседних ячеек используются следующие формулы

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} f(x, y) dx dy \approx \frac{2}{3} \cdot h^2 \cdot (2 \cdot f_{00} + f_{10} + f_{01} + f_{-10} + f_{0,-1}),$$

$$f_{lm} = f(x_i + l \cdot h, y_j + m \cdot h).$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f(x, y, z) dx dy dz \approx$$

$$\approx \cdot h^3 \cdot (f_{100} + f_{010} + f_{001} + f_{-1,00} + f_{0,-1,0} + f_{00,-1}),$$

$$f_{lmn} = f(x_i + l \cdot h, y_j + m \cdot h, z_k + n \cdot h).$$

1.7 Расчёт определённых интегралов методом статистических испытаний

Сущность метода статистических испытаний (метода Монте-Карло) заключается в следующем. Пусть имеется некоторая случайная величина η , равномерно распределённая на отрезке $[0, 1]$. Плотность её распределения задаётся соотношением

$$P_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Пусть проводится n независимых испытаний, в результате ко-

торых генерируется последовательность равновероятных независимых случайных чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Математическое ожидание величины η определится по выражению

$$M\eta = M\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \eta_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Любая функция $\zeta=f(\eta)$ также будет случайной величиной, и её математическое ожидание равно

$$M\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot P_{\eta}(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

С учётом выражения для расчёта математического ожидания величины ζ можно получить формулу для расчёта определённого интеграла

$$M\zeta = M\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(\eta_i)\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(\eta_i),$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(\eta_i).$$

Если необходимо вычислить интеграл на другом отрезке, то выполняется соответствующая замена переменных.

Аналогично могут быть вычислены кратные интегралы. Например

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i),$$

где G – область, определяемая условиями $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$; η_i, ξ_i – независимые реализации случайных величин η и ξ , равномерно распределённых на отрезке $[0, 1]$.

Для корректного использования метода Монте–Карло значение n должно быть достаточно большим (порядка нескольких тысяч). Необходимо также обеспечить качественную генерацию последовательности случайных чисел с заданным законом распределения.

2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ MathCAD

MathCAD располагает встроенным оператором численного интегрирования в заданных пределах.

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Интегрирование	$\int_a^b f(x)dx$	&	Вычисление определённого интеграла на отрезке $[a, b]$.

Пределы интегрирования должны быть вещественными. Переменная интегрирования не может иметь индексов. Кроме неё, все переменные в подынтегральной функции должны быть определены ранее в другом месте документа. При расчёте кратных интегралов оператор & используется нужное число раз.

Для определения интеграла MathCAD использует алгоритм Ромберга, основанный на методе трапеций. Шаг интегрирования уменьшается, пока погрешность расчёта не станет меньше установленного порогового значения. Точность интегрирования зависит от вида подынтегральной функции. Если она имеет особенности, разрывы или быстро осциллирует, решение, найденное MathCAD, будет очень грубым или вообще не будет найдено.

При самостоятельной реализации алгоритмов используют операторы суммирования.

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Суммирование	$\sum_{i=m}^n X$	[Ctrl] \$	Суммирование X при заданных значениях $i = m, m+1, \dots, n$. m и n должны быть целыми числами.
Суммирование по дискретному аргументу	$\sum_i X$	\$	Суммирование X при всех значениях i . Дискретный аргумент должен быть определён заранее.

Для вычисления производной полинома Лежандра используется встроенный оператор численного дифференцирования.

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Производная	$\frac{d}{dx} f(x)$?	Вычисление производной функции $f(x)$ по x .

Расчёт корней полинома Лежандра производится с помощью функции *polyroots*.

Имя функции	Возвращается...
<i>polyroots(v)</i>	Корни полинома степени n , коэффициенты которого по степеням $0, \dots, n$ находятся в векторе v длиной $n+1$.

Примеры численного интегрирования разными методами показаны в приложении Б.

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Работа заключается в нахождении значений определённого интеграла функции одной переменной $f(x)$ разными методами и оценке погрешности этих методов. Она выполняется студентом индивидуально по заданию, выданному преподавателем. Варианты заданий приведены в приложении А. Работа выполняется в следующем порядке.

1. Задаются выражения для функции $f(x)$, её первообразной и пределы интегрирования a и b .
2. Находится точное значение определённого интеграла по формуле Ньютона–Лейбница.
3. Определяется число интервалов n в соответствии с заданием.
4. Находятся значения определённого интеграла методами прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса и оцениваются погрешности методов.
5. Число интервалов интегрирования уменьшается вдвое, и п. 5 повторяется до тех пор, пока значение n не станет **4...6** (необходимо

следить, чтобы это значение оставалось чётным).

6. Строится график зависимостей погрешности методов от числа интервалов интегрирования и даётся оценка точности различных алгоритмов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём заключается сущность численного интегрирования? Что такое квадратурные формулы?

2. Какие особенности имеют методы Ньютона–Котеса? В чём заключается сущность методов прямоугольников, парабол, Симпсона, сплайнов?

3. Какие особенности имеют методы Гаусса?

4. Как численно определить интеграл от разрывной функции, несобственный или кратный интеграл?

5. Как численно определить интеграл методом статистических испытаний?

6. Как решаются задачи интегрирования средствами системы MathCAD?

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 2003.
3. Канахен Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994.
5. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCAD 2000. Математический практикум. – М.: Финансы и статистика, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

№ варианта	Подынтегральная функция $f(x)$	Первообразная функция $F(x)$	$[a, b]$	n
1	$\frac{x}{(x+3)^2}$	$\frac{3}{x+3} + \ln(x+3)$	$[0, 2]$	40
2	$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$	$\sqrt{4-x^2} - 2 \cdot \ln \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$	$[2, 3]$	80
3	$x \cdot \sin(2 \cdot x)$	$\frac{\sin(2 \cdot x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2}$	$[0, 1]$	30
4	$2^{3 \cdot x}$	$\frac{2^{3 \cdot x}}{3 \cdot \ln 2}$	$[0, 1]$	50
5	$\frac{\ln^2 x}{x}$	$\frac{\ln^3 x}{3}$	$[1, 5]$	50
6	$\exp(2 \cdot x) \cdot \sin x$	$\frac{\exp(2 \cdot x)}{5} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x)$	$[0, 2]$	30
7	$\frac{x^2}{2 \cdot x + 3}$	$\frac{2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 9 \cdot \ln(2 \cdot x + 3)}{8}$	$[1, 3]$	80
8	$x^2 \cdot \sqrt{x+2}$	$\frac{2 \cdot (15 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 32)}{105} \cdot \sqrt{(x+2)^3}$	$[1, 4]$	50
9	$\frac{x}{\sin^2(3 \cdot x)}$	$-\frac{x}{3} \cdot \operatorname{ctg}(3 \cdot x) + \frac{1}{9} \cdot \ln(\sin(3 \cdot x))$	$[1, 3]$	40
10	$x \cdot \exp(0.8 \cdot x)$	$\frac{\exp(0.8 \cdot x)}{0.64} \cdot (0.8 \cdot x - 1)$	$[0, 2]$	40

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ А

№ варианта	Подынтегральная функция $f(x)$	Первообразная функция $F(x)$	$[a, b]$	n
11	$\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 + 0.25}}$	$-2 \cdot \ln \left(\frac{0.5 + \sqrt{x^2 + 0.25}}{x} \right)$	$[1, 2]$	60
12	$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot x)$	$[0, 2]$	50
13	$\frac{x}{0.5 \cdot x + 0.1}$	$\frac{4 \cdot x - 1.6}{3} \cdot \sqrt{0.5 \cdot x + 0.1}$	$[3, 5]$	40
14	$x^2 \cdot \sin x$	$2 \cdot x \cdot \sin x - (x^2 - 2) \cdot \cos x$	$[0, 1]$	80
15	$\frac{1}{x \cdot \ln x}$	$\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$	$[2, 3]$	60
16	$\frac{\ln^2 x}{x}$	$\frac{1}{3} \cdot \ln^3 x$	$[1, 4]$	40
17	$\frac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - \ln 3$	$[0, 2]$	60
18	$\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x}$	$\cos \frac{1}{x} - \cos 1$	$[1, 3]$	80
19	$x^x \cdot (1 + \ln x)$	$x^x - 1$	$[1, 3]$	50
20	2^{3x}	$\frac{1}{3 \cdot \ln 2} \cdot (2^{3x} - 1)$	$[0, 1]$	30

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(документ MathCAD)

Подинтегральная и первообразная функции:

$$f(x) := x \cdot 2^{3 \cdot x}$$

$$F(x) := \frac{x \cdot 2^{3 \cdot x}}{3 \cdot \ln(2)} - \frac{2^{3 \cdot x}}{9 \cdot \ln(2)^2}$$

Пределы интегрирования:

$$a := 1 \quad b := 4$$

Точное значение интеграла:

$$I_0 := F(b) - F(a)$$

$$I_0 = 6929.7873$$

Значение, вычисленное MathCAD методом Ромберга:

$$\int_a^b f(x) dx = 6929.7873$$

Формула для расчёта интеграла методом прямоугольников (в зависимости от числа интервалов интегрирования):

$$I_1(n, h) := h \cdot \sum_{i=1}^n f \left[a + \left(i - \frac{1}{2} \right) \cdot h \right]$$

Формула для расчёта интеграла методом трапеций (в зависимости от числа интервалов интегрирования):

$$I_2(n, h) := \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [f[a + (i-1) \cdot h] + f(a + i \cdot h)]$$

Формула для расчёта интеграла методом Симпсона (в зависимости от числа интервалов интегрирования):

$$I_3(n, h) := \frac{h}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \text{if}[\text{mod}(i, 2) \neq 0, [f[a + (i-1) \cdot h] + 4 \cdot f(a + i \cdot h) + f[a + (i+1) \cdot h]], 0]$$

Расчёт интеграла методом Гаусса.

Выражения для полинома Лежандра $P_n(\xi)$, его производной $Q_n(\xi)$ по вспомогательной переменной ξ и коэффициентов квадратурной формы:

$$P_n(\xi, n) := \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m \cdot \frac{(2 \cdot n - 2 \cdot m)!}{m! \cdot (n - m)! \cdot (n - 2 \cdot m)!} \cdot \xi^{n-2 \cdot m}$$

$$Q_n(\xi, n) := \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^m \cdot \frac{(2 \cdot n - 2 \cdot m)!}{m! \cdot (n - m)! \cdot (n - 2 \cdot m - 1)!} \cdot \xi^{n-2 \cdot m-1}$$

$$c(\xi, n) := \frac{2}{(1 - \xi^2) \cdot (Q_n(\xi, n))^2}$$

Функция для расчёта интеграла методом Гаусса (в зависимости от числа интервалов интегрирования):

$$I_4(n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \frac{n}{2} \\ \\ v \leftarrow \frac{(-1)^i}{2^n} \cdot \frac{(2 \cdot n - 2 \cdot i)!}{i! \cdot (n - i)! \cdot (n - 2 \cdot i)!} \\ \frac{n}{2} - i \\ \\ u \leftarrow \text{polyroots}(v) \\ \text{for } i \in 0.. n - 1 \\ \\ \xi_i \leftarrow \text{if} \left(i < \frac{n}{2}, -\sqrt{\frac{u}{\frac{n}{2} - i - 1}}, \sqrt{\frac{u}{i - \frac{n}{2}}} \right) \\ \\ \frac{b - a}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} c(\xi_i, n) \cdot f\left(\frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2} \cdot \xi_i\right) \end{array} \right.$$

Зависимость погрешности расчёта интеграла различными методами от числа интервалов интегрирования:

$$i := 0..8$$

$$N_i := i \cdot 2 + 4$$

