МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Методические указания к выполнению лабораторной работы

15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2021

В методических указаниях изложены основные сведения об интерполяции в таблицах функций одной переменной и дано описание основных интерполяционных схем. Приведены правила реализации этих операций с помощью современных программных средств решения математических задач.

Составитель: *к. т. н., доцент Болдырев Д.В.*

Отв. редактор: *к. т. н., доцент В.М. Рейдер*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является усвоение студентом основных действий, выполняемых над таблично заданными функциями, изучение основных методов интерполяции в таблицах функций одной переменной и получение навыков реализации этих операций с помощью современных программных средств решения математических задач.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Основные сведения об интерполяции

Табличная форма задания функции $y(x)$ обычно используется, когда её формула неизвестна, или применение таблицы более рационально. В этом случае упорядоченному набору входных значений $\{x_i,\ i=0,1,...\ n\}$ (не обязательно равноотстоящих) ставится в соответствие набор выходных значений $\{y_i,\ i=0,1,...\ n\}$. На практике может потребоваться восстановить значения функции при значениях аргумента $x_0<x<x_n$, не входящих в множество $\{x_i\}$. В этом случае решается задача *интерполяции*, т. е. поиска значений y внутри множества $\{y_i\}$.

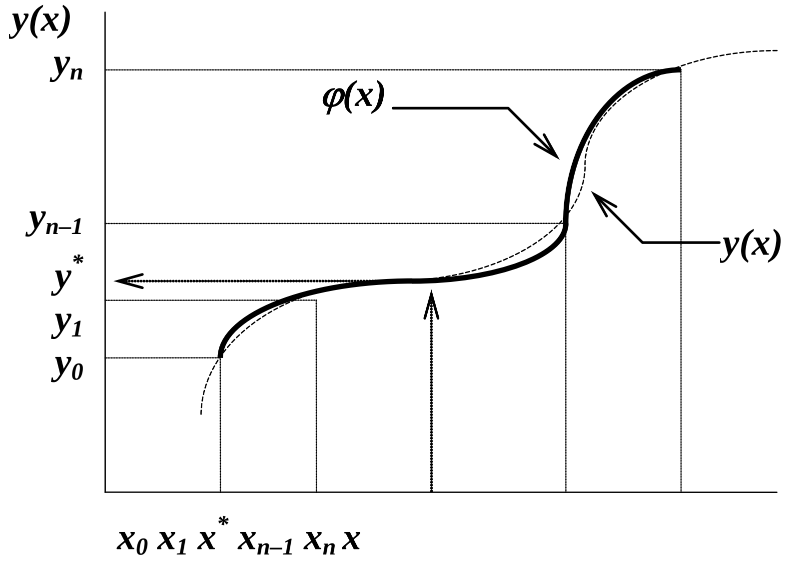


Рисунок 1 – Интерполирование функции

Интерполяция заключается в следующем. Для набора точек $\{x_i, y_i\}$, называемых *узлами*, строится функция $\varphi(x)$ – *интерполянта* (не обязательно гладкая). В точках $\{x_i\}$ она принимает те же значения, что и функция $y(x)$, т. е. $\varphi(x_i)=y_i$. Искомым значением $y(x^*)$ считается значение функции $\varphi(x^*)$ (см. рисунок 1). Разность между $y(x^*)$ и $\varphi(x^*)$ составляет *погрешность интерполяции*.

Если для всего набора $\{x_i, y_i\}$ строится единая функция $\varphi(x)$, то интерполяция является *глобальной*. Если функции $\varphi_i(x)$ строятся для каждого отрезка $[x_{i-1},x_i]$, то интерполяция является *локальной*.

1.2 Методы локальной интерполяции

При такой интерполяции функция $y(x)$ заменяется набором локальных функций $\varphi_i(x)$, которые обычно имеют вид полиномов заданной степени.

Одним из популярных является метод *линейной интерполяции* (или метод первого порядка). Согласно его схеме, узлы должны соединяться отрезками прямых линий. Если $x\in[x_{i-1},x_i]$, то искомое значение $y(x)$ определяют по уравнению прямой, проходящей через точки (x_{i-1},y_{i-1}) и (x_i,y_i):

$$y(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1}) \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Несмотря на простоту, метод даёт большую погрешность при определении результата. Поэтому в настоящее время вместо него рекомендуется применять *метод кубических сплайнов*.

Сплайн – это специальным образом подобранная гладкая кривая, имитирующая форму деформированного упругого стержня, закреплённого между двумя неподвижными опорами с заданными углами наклона в каждой (см. рисунок 2).

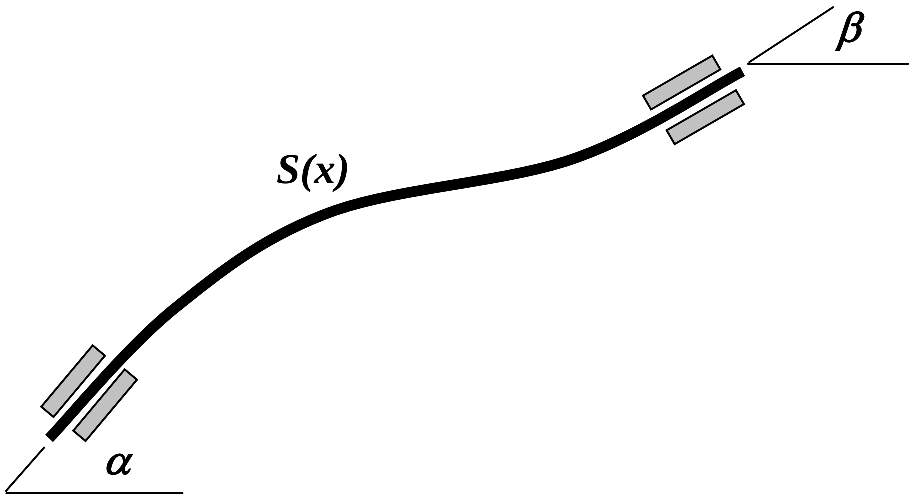


Рисунок 2 – Иллюстрация понятия «сплайн»

Форма сплайна определяется уравнением $\boldsymbol{S(x)}$. Согласно теории изгиба при малых деформациях, условие свободного равновесия стержня имеет вид $\boldsymbol{S^{(IV)}_x(x)=0}$, поэтому уравнение $\boldsymbol{S(x)}$ должно иметь вид полинома третьей степени. Общая интерполяционная кривая представляется набором состыкованных кубических полиномов, которые моделируются так, чтобы при их стыковке («сшивке») в узлах интерполяции выполнялись условия непрерывности функции $\boldsymbol{S(x)}$, её первой и второй производных $\boldsymbol{S'_x(x)}$ и $\boldsymbol{S''_x(x)}$.

Если $\boldsymbol{x\in[x_{i-1},x_i]}$, то можно определить уравнение $\boldsymbol{i}$–го сплайна и его производных:

$$\begin{aligned}
\underset{i}{S}(x) &= a_i + b_i\cdot(x-x_{i-1}) + c_i\cdot(x-x_{i-1})^2 + d_i\cdot(x-x_{i-1})^3\\
\underset{i}{S'_x}(x) &= b_i + 2\cdot c_i\cdot(x-x_{i-1}) + 3\cdot d_i\cdot(x-x_{i-1})^2\\
\underset{i}{S''_x}(x) &= 2\cdot c_i + 6\cdot d_i\cdot(x-x_{i-1})^3
\end{aligned}$$

Условия непрерывности функций $\boldsymbol{S(x)}$, $\boldsymbol{S'_x(x)}$ и $\boldsymbol{S''_x(x)}$ в точках $\boldsymbol{\{x_i,\ i=1,\ 2,\ldots\ n-1\}}$ имеют вид:

$$\underset{i}{S}(x_i) = \underset{i+1}{S}(x_i)$$

$$a_i + b_i\cdot(x_i-x_{i-1}) + c_i\cdot(x_i-x_{i-1})^2 + d_i\cdot(x_i-x_{i-1})^3 = a_{i+1}$$

$$\underset{i}{S}{}'_x(x_i) = \underset{i+1}{S}{}'_x(x_i)$$

$$b_i + 2\cdot c_i\cdot(x_i - x_{i-1}) + 3\cdot d_i\cdot(x_i - x_{i-1})^2 = b_{i+1}$$

$$\underset{i}{S}{}''_x(x_i) = \underset{i+1}{S}{}''_x(x_i)$$

$$2\cdot c_i\cdot(x_i - x_{i-1}) + 6\cdot d_i\cdot(x_i - x_{i-1}) = 2\cdot c_{i+1}$$

Значения производной $S''_x(x)$ в граничных точках x_0 и x_n, которым соответствуют коэффициенты c_0 и c_{n+1} (фиктивное значение для несуществующего узла $n+1$), обычно выбираются из условия наименьшей (нулевой) кривизны сплайна.

$$\underset{1}{S}{}''_x(x_0) = c_1 = 0$$

$$\underset{n}{S}{}''_x(x_n) = 2\cdot -_n + 6\cdot d_n\cdot(x_n - x_{n-1}) = 0$$

Обозначив шаг интерполяции $h_i=x_i-x_{i-1}$, из условий непрерывности можно получить систему из $4\cdot n$ линейных уравнений, путём решения которой определяются неизвестные коэффициенты локальных сплайнов a_i, b_i, c_i, d_i для каждого отрезка $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,..n)$.

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1} & ,i=1,...n \quad (1) \\ a_i + b_i\cdot h_i + c_i\cdot h_i^2 + d_i\cdot h_i^3 = a_{i+1} & ,i=1,...n-1 \quad (2) \\ b_i + 2\cdot c_i\cdot h_i + 3\cdot d_i\cdot h_i^2 = b_{i+1} & ,i=1,...n-1 \quad (3) \\ c_i + 3\cdot d_i\cdot h_i = c_{i+1} & ,i=1,...n-1 \quad (4) \\ c_1 = 0 & \\ c_n + 3\cdot d_n\cdot h_n = 0 & \end{cases}$$

Из четвёртой группы уравнений системы определяются d_i.

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3 \cdot h_i}, \quad i = 1,\dots n-1$$

$$d_n = -\frac{c_n}{3 \cdot h_n}$$

Подставив эти соотношения, а также значения $a_i = y_{i-1}$ во вторую группу уравнений, можно найти значения b_i.

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3} \cdot (c_{i+1} + 2 \cdot c_i), \quad i = 1,\dots n-1$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3} \cdot h_n \cdot c_n$$

Исключая из третьей группы уравнений величины b_i, получим систему $n-1$ линейных уравнений для определения коэффициентов $c_2 \dots c_n$ (значение c_1, принятое равным нулю, считается известным заранее).

$$\begin{cases} h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = 3 \cdot \left[\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right], \\ i = 2,\dots n \\ c_1 = 0 \\ c_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Эта система, имеющая трёхдиагональную матрицу коэффициентов в левой части, решается методом прогонки.

После определения значений c_i, $i=1,\dots n$, используя приведённые выше соотношения, находятся остальные коэффициенты семейства локальных кубических сплайнов. Для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ значение $y(x)$ вычисляется по уравнению i–го сплайна.

1.3 Методы глобальной интерполяции

При глобальной интерполяции функция $y(x)$ приближённо представляется полиномом степени n, который проходит через все точки $\{x_i, y_i, i=0, 1,\dots n\}$. В общем случае его уравнение имеет вид:

$$y(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\dots+a_n\cdot x^n=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i\,.$$

Из условия прохождения полинома через все узлы интерполяции можно получить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0+a_1\cdot x_0+a_2\cdot x_0{}^2+\dots+a_n\cdot x_0{}^n=y_0 \\ a_0+a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_1{}^2+\dots+a_n\cdot x_1{}^n=y_1 \\ \dots \\ a_0+a_1\cdot x_n+a_2\cdot x_n{}^2+\dots+a_n\cdot x_n{}^n=y_n \end{cases}$$

Если среди узлов нет совпадающих (т. е. $x_i \neq x_j$, если $i \neq j$), то такая система имеет единственное решение. Однако, при большом числе узлов его получение требует большого объёма вычислений. Поэтому рационально использовать специализированные расчётные схемы.

При использовании *метода Лагранжа* глобальный полином ищется в виде линейной комбинации локальных интерполяционных полиномов:

$$L(x)=y_0\cdot l_0(x)+y_1\cdot l_1(x)+\dots+y_n\cdot l_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\cdot l_i(x).$$

Каждый полином $l_i(x)$ обращается в нуль во всех узлах интерполяции, исключая узел с номером i, т. е.

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_i}{x_i-x_j}$$

Тогда выражение для глобального полинома Лагранжа будет иметь вид

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

При числе узлов $n=1$ формула Лагранжа преобразуется в формулу линейной интерполяции, при $n=2$ – квадратичной.

Достоинство метода – простая адаптация к наборам данных с разным шагом изменения значений аргумента x. Недостатком является возрастание погрешности интерполяции на граничных участках отрезка $[x_0,x_n]$. Этот эффект проявляется особенно сильно при большом числе узлов, когда форма интерполяционного полинома существенно отклоняется от формы зависимости $y(x)$.

При использовании *метода Ньютона–Грегори для интерполирования вперёд* глобальный интерполяционный полином строится в виде

$$\begin{aligned} N(x)&=c_0+c_1\cdot(x-x_0)+c_2\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)+\dots\\ &+c_n\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})=\\ &=\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j<i}}^{i-1} x-x_j \end{aligned}$$

Используя условия $N(x_i)=y_i$, $i=0, 1,\dots n$, можно сформировать систему с треугольной матрицей, решая которую, можно определить коэффициенты c_i.

$$\begin{cases} c_0=y_0\\ c_0+c_1\cdot(x_1-x_0)=y_1\\ c_0+c_1\cdot(x_2-x_0)+c_2\cdot(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)=y_2\\ \dots\\ c_0+\dots+c_n\cdot(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})=y_n \end{cases}$$

Схему Ньютона–Грегори удобно применять для интерполирования одной и той же функции с различным числом узлов.

1.4 Рациональная интерполяция

В ряде случаев (например, для функций с нерегулярным характером поведения) большей точности приближения можно достигнуть, используя интерполяционную функцию следующей формы:

$$R(x)=\frac{b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+\ldots+b_p\cdot x^p}{a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_q\cdot x^q}.$$

Коэффициенты a_i и b_i находятся из совокупности условий $R(x_i)=f(x_i), i=0,1,\ldots n$, которые образуют систему уравнений:

$$f(x_i)\cdot\sum_{j=0}^{q}a_j\cdot x_i^j-\sum_{j=0}^{p}b_j\cdot x_i^j=0,\quad i=0,1,\ldots n.$$

Если n – чётное и $p–q=1$, или n – нечётное и $p=q$, то функция $R(x)$ может быть представлена в явном виде. Для этого используются т. н. обратные разделённые разности, определяемые условием

$$f^-(x_l,x_k)=\frac{x_l-x_k}{f(x_l)-f(x_k)}$$

и рекуррентным соотношением

$$f^-(x_k,\ldots x_l)=\frac{x_l-x_k}{f^-(x_{k+1},\ldots x_l)-f^-(x_k,\ldots x_{l-1})}.$$

Интерполяционная функция записывается в виде цепной дроби

$$R(x)=f(x_0)+\cfrac{x-x_0}{f^-(x_0,x_1)+\cfrac{x-x_1}{f^-(x_0,x_1,x_2)+\ldots+\cfrac{x-x_{n-1}}{f^-(x_0,\ldots x_n)}}}$$

2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В СИСИТЕМЕ MathCAD

Массивы исходных данных ***x*** и ***y*** равной длины представляются в виде векторов, создание которых производится по общим правилам (массив ***x*** должен быть упорядочен в порядке возрастания). В свободном месте рабочего поля документа указывается имена объектов со знаком присваивания. Через пункты меню ***Математика|Матрицы... (Math|Matrices...)*** вызывается диалог, в котором определяются количество ***Строк (Rows)***, ***Столбцов (Columns)*** (которое равно единице) и выбирается действие ***Создать (Create)***. Здесь же можно ***Удалить (Delete)*** или ***Вставить (Insert)*** нужное число строк и столбцов. (Доступ к диалогу производится также нажатием клавиш **[*Ctrl*]*M***.). Необходимые операции над векторами приведены в таблице.

Операция	Обозначение	Клавиши	Описание
Присваивание	**:=**	**:**	Присваивание значений элементам вектора или матрицы.
Нижний индекс вектора	V_n	**[**	Элемент вектора с номером ***n***.

По умолчанию вектора нумеруются с нулевого элемента. Чтобы изменить этот порядок, необходимо определить начальное значение встроенной переменной ***ORIGIN*** через пункт меню ***Математика|Встроенные переменные... (Math|Built–In Variables...)***. Можно также задать глобальное значение ***ORIGIN*** в рабочем поле документа. Например, чтобы установить этот параметр равным ***1***, необходимо напечатать ***ORIGIN~1*** (в документе отобразится ***ORIGIN≡1***).

Для выполнения линейной интерполяции используется функция ***linterp***.

Имя функции	Возвращается...
linterp(x, y, z)	Линейно интерполируемое значение, соответствующее аргументу ***z***.

Если значение ***z*** находится вне диапазона x_0 **..** x_n, то будет выполнена линейная экстраполяция в нужную область. Пример использования функции ***linterp*** показан в приложении Б.

Для выполнения интерполяции кубическими сплайнами используются функции ***lspline***, ***pspline*** и ***pspline***, которые различаются формой сплайна в граничных точках. Они возвращают вектор вторых производных интерполяционной кривой в узлах. Значения этого вектора используются для нахождения интерполируемого значения в произвольных точках с помощью функции ***interp***.

Имя функции	Возвращается...
lspline(x, y)	Вектор вторых производных кривой сплайна, которая приближается в граничных точках к прямой линии.
pspline(x, y)	Вектор вторых производных кривой сплайна, которая приближается в граничных точках к параболе.
cspline(x, y)	Вектор вторых производных кривой сплайна, которая приближается в граничных точках к кубическому полиному.
interp(S, x, y, z)	Интерполируемое значение, соответствующее аргументу ***z***. ***S*** – вектор вторых производных, определяемый функциями ***lspline***, ***pspline*** и ***cspline***.

Пример интерполяции кубическими сплайнами приведён в приложении Б.

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Работа заключается в нахождении значений функции одной переменной ***y(x)***, заданной таблично, в точках, которые не являются с узлами интерполяции. Она выполняется студентом индивидуально по заданию, выданному преподавателем. Варианты заданий приведены в приложении А.

Работа выполняется в следующем порядке.

1. Формируются вектора ***x*** и ***y***.
2. Задаётся набор точек, в которых необходимо выполнить интерполяцию, в виде диапазона изменения аргумента ***z***. Границы диапазона совпадают с начальным и конечным значением ***x***. Шаг

изменения аргумента ***z*** выбирается в соответствии с вариантом.

3. Выполняется линейная интерполяция с помощью функции ***linterp***.

4. Выполняется интерполяция кубическими сплайнами при различных граничных условиях с помощью функций ***lspline***, ***pspline*** и ***cspline***.

5. Выполняется интерполяция методами Лагранжа и Ньютона.

6. Строится график, на который наносятся результаты интерполяции и график погрешности различных методов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём заключается сущность интерполяции?
2. Что такое интерполяционная кривая? Какова её особенность?
3. Что такое локальная интерполяция? В чём сущность методов линейной интерполяции и интерполяции кубическими сплайнами?
4. Что такое глобальная интерполяция? В чём сущность методов Лагранжа и Ньютона–Грегори?
5. Как решаются задачи интерполяции средствами системы MathCAD?

ЛИТЕРАТУРА

1. Вержбицкий В.М. Численные методы: в 2–х кн. – М.: Высшая школа, 2000.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 2003.
4. Канахен Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
5. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994.

6. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCAD 2000. Математический практикум. – М.: Финансы и статистика, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

№ варианта																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Шаг изменения переменной *x*																			
0.1	0.2	0.3	0.2	0.3	0.1	0.3	0.2	0.1	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2	0.3	0.1	0.2
Значения переменной *y*																			
2.23	12.6	1.22	1.06	1.00	0.00	0.53	0.90	1.01	0.02	1.03	0.56	0.08	4.61	0.55	0.97	1.11	0.16	10.2	3.04
2.65	11.1	0.85	0.83	1.41	0.69	0.57	0.81	1.32	0.32	0.99	0.36	0.16	5.22	0.30	1.07	1.02	0.11	8.54	3.61
3.11	10.3	0.51	0.68	1.73	1.09	0.61	0.74	1.11	0.12	0.96	0.29	0.23	3.62	0.13	1.22	0.85	0.08	9.61	4.68
3.54	9.32	0.27	0.31	2.00	1.38	0.65	0.67	0.74	0.28	0.92	0.24	0.31	3.45	0.07	1.34	0.93	0.08	8.26	4.24
4.26	9.25	0.21	0.11	2.23	1.60	0.69	0.60	0.76	0.28	0.87	0.22	0.38	4.86	0.04	1.52	0.94	0.07	5.79	4.35
4.38	10.0	0.19	0.00	2.44	1.79	0.72	0.54	1.13	0.12	0.83	0.20	0.45	5.05	0.01	1.14	0.95	0.07	10.9	4.47
4.52	11.5	0.21	0.12	2.64	1.94	0.75	0.49	1.32	0.32	0.78	0.18	0.51	5.24	0.00	1.22	0.81	0.08	9.35	4.77
4.27	14.4	0.28	0.53	2.82	2.07	0.78	0.45	0.84	0.18	0.74	0.17	0.57	4.80	0.71	1.36	0.63	0.12	9.41	4.83
4.47	11.3	0.89	0.18	3.00	2.19	0.81	0.40	0.89	0.18	0.69	0.16	0.63	4.42	0.50	1.48	1.03	0.35	9.57	3.59
4.35	10.2	0.98	0.25	3.16	2.30	0.84	0.37	0.42	0.58	0.15	0.15	0.68	3.65	0.32	1.63	0.96	0.16	8.11	4.54
4.24	8.54	0.87	0.38	3.31	2.39	0.86	0.33	0.31	0.68	0.96	0.14	0.73	4.07	0.22	0.28	0.97	0.15	6.36	4.61
4.12	9.61	0.31	0.21	3.46	2.48	0.88	0.30	0.36	0.68	1.82	0.13	0.77	4.23	0.16	0.35	0.98	0.15	10.3	4.15
4.00	9.81	0.24	0.44	3.60	2.56	0.90	0.27	0.64	0.38	4.74	0.12	0.80	4.41	0.10	0.46	0.82	0.35	9.62	3.55
3.87	9.68	0.34	0.63	3.74	2.63	0.91	0.25	0.39	0.54	3.72	0.11	0.84	5.62	0.05	0.58	0.57	0.48	9.71	3.82
3.74	9.64	0.39	0.86	3.87	2.70	0.93	0.22	0.54	0.48	4.76	0.10	0.87	5.22	0.68	0.74	0.95	0.47	9.88	3.71

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПРИМЕРЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ (документ MathCAD)

Массивы исходных данных:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.31 \\ 0.45 \\ 0.37 \\ 0.68 \\ 0.47 \end{pmatrix}$$

Количество интервалов интерполяции:

$$N := last(x) \qquad i := 0 .. N$$

Шаг интерполяции:

$$\Delta := 0.1$$

Коэффициенты кубических сплайнов, близких в граничных точках соответственно к прямой линии, параболе и кубической параболе:

$$S_l := lspline(x, y)$$

$$S_p := pspline(x, y)$$

$$S_c := cspline(x, y)$$

Функция для локальной линейной интерполяции:

$$F_l(\xi) := linterp(x, y, \xi)$$

Уравнения локальных кубических сплайнов:

$$F_{Sl}(\xi) := interp(S_l, x, y, \xi)$$

$$F_{Sp}(\xi) := interp(S_p, x, y, \xi)$$

$$F_{Sc}(\xi) := interp(S_c, x, y, \xi)$$

Уравнение глобального интерполяционного полинома Лагранжа:

$$L(\xi) := \sum_{i=0}^{N} y_i \cdot \prod_{j=0}^{N} if\left(i \neq j, \frac{\xi - x_j}{x_i - x_j}, 1\right)$$

Коэффициенты глобального интерполяцинного полинома Ньютона-Грегори:

$$c_0 := y_0$$

$$k := 1 .. N$$

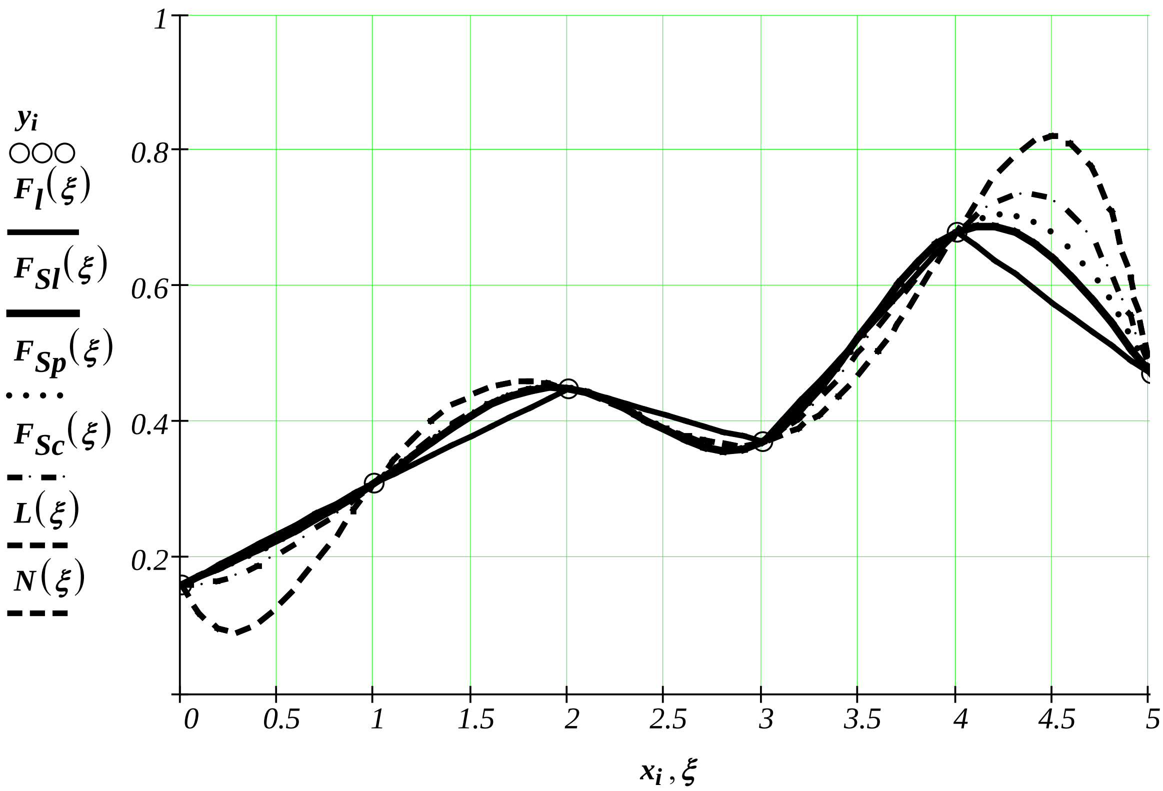
$$c_k := \frac{y_k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i \cdot if\left[i = 0, 1, \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j)\right]}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)}$$

Уравнение глобального интерполяционного полинома Ньютона-Грегори:

$$N(\xi) := \sum_{i=0}^{N} c_i \cdot if\left[i > 0, \prod_{j=0}^{i-1} (\xi - x_j), 1\right]$$

Интерполяция различными методами (результаты, полученные по формулам Лагранжа и Ньютона-Грегори совпадают):

$$\xi := x_0, x_0 + \Delta .. x_{last(x)}$$



Погрешность интерполяции (в качестве критерия сравнения выбран сплайн, близкий в граничных точках к прямой линии; погрешность методов Лагранжа и Ньютона-Грегори одинаковая):