МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

к практическим занятиям по дисциплине

Корректирующий курс по математике

Направление	09.03.02 Информационные системы и технологии
Направленность (профиль)	Информационные системы и технологии в бизнесе
Форма обучения	Очная
Год начала обучения	2022
Реализуется в 4 семестре	

Невинномысск, 2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшие задачи обучения в курсе математика – это сообщение знаний и развитие умений решать задачи, проводить анализ результатов, наблюдений и экспериментов, а также вести самостоятельно работу по освоению всех разделов курса.

В сложившейся схеме университетского образования теоретические знания сообщаются студентам на лекциях, умение решать задачи отрабатывается на практических занятиях, а развитие навыков самостоятельной работы, анализа ее результатов происходит в процессе внеаудиторных занятий.

Цель данных методических указаний – помочь студенту в успешном освоении практических занятий по математике посредством решения характерных простейших математических примеров с последовательным их усложнением и выявлением проблемных моментов.

Цель: Целью данных методических указаний (тема 1-12) является формирование профессиональной компетенции ПК-1 будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 путем приобретения следующих знаний и умений:

Знать:

-математический язык;
-математическую символику и базовые знания для освоения последующих математических дисциплин;
-как используются математические формулы, уравнения и неравенства; примеры их применения для решения математических и практических задач в профессиональной области ;
-как математически определенные функции могут описывать реальные зависимости в своей профессиональной области;
-приводить примеры такого описания

Уметь:
- вычислять значения корня, степени, логарифма;
- находить значения тригонометрических выражений;
-выполнять тождественные преобразования тригонометрических, иррациональных, показательных, логарифмических выражений;
-решать тригонометрические, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения, неравенства,
- строить графики элементарных функций, проводить преобразования графиков, используя изученные методы описывать свойства функций и уметь применять их при решении задач, -применять аппарат математического анализа к решению простейших задач в области проектирования систем;
- решать различные типы задач с использованием арифметической и геометрической прогрессий;
- уметь соотносить процент с соответствующей дробью;
- производить прикидку и оценку результатов вычислений;
- при вычислениях сочетать устные и письменные приемы, использовать приемы, рационализирующие вычисления.
- решать типовые математические задачи в области в своей профессиональной области

Владеть:
- элементарными математическими методами решения простейших типовых задач в своей профессиональной области

Практическое занятие №1

Тема: Алгебра множеств

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение отображения из X в Y, X в Y, X на Y. Приведите примеры таких отображений.

2. Что такое область задания отображения? Что такое область отправления отображения? Всегда ли они совпадают?

3. Что такое образ элемента $x \in X$ при отображении f из X в Y? Что такое полный прообраз элемента $y \in Y$ при отображении f?

4. Какое множество называется множеством значений отображения?

5. Какое отображение называется обратимым? Приведите пример обратимого отображения X в Y; обратимого отображения X на Y; необратимого отображения X на Y.

6. Какое соответствие между множествами X и Y называется взаимно однозначным?

7. Что вы можете сказать об образе элемента $x \in X$ при следующих отображениях: а) из X в Y; б) X в Y; в) X на Y?

8. Что вы можете сказать о полном прообразе элемента $y \in Y$ при следующих отображениях *f:* а) из X в Y; б) X в Y; в) X на Y; г) X в Y, где f обратимо; д) X на Y, где f обратимо?

9. Дайте определение обратного отображения.

10. Что называется композицией отображения? Приведите примеры.

Упражнения

1. Задайте отображения множества треугольников в множество окружностей.

2. Пусть X – множество неотрицательных, а – Y множество действительных чисел. Каждому $x \in X$ поставим в соответствие такое $y \in Y$, что $y^2 = x$. Является ли это соответствие отображением? Будет ли это соответствие отображением, если Y – множество неотрицательных чисел?

3. Пусть X - множество неотрицательных рациональных чисел Y и $= X$. Каждому $x \in X$ поставим в соответствие такое $y \in Y$, что $y^2 = x$. Является ли это соответствие отображением X в Y?

4. Пусть X – множество всех окружностей на плоскости, а Y – множество точек этой плоскости. Каждой окружности поставим в соответствие её центр. а) Является ли это соответствие отображением X на Y? б) Является ли оно взаимно однозначным?

5. Пусть X – множество всех точек плоскости, Y – множество точек оси ординат. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие её проекцию на ось ординат. Является ли это соответствие отображением X на Y? Является ли оно взаимно однозначным? Что является полным прообразом точки $y \in Y$?

6. Пусть X – множество всех точек плоскости и l – прямая на этой плоскости. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие поставим в соответствие точку $y \in Y$, симметричную x относительно прямой l. Является ли это соответствие отображением X на X ? Является ли оно биективным отображением? Что является образом квадрата, представленного на рисунке 2, при указанном отображении? Какие точки переходят сами в себя при этом отображении?

7. На рисунке 3 стрелки идут от x к $f(x)$. Найдите $f(X)$. Является ли это соответствие отображением X на Y? Является ли это отображение обратимым? Чему равен прообраз элемента y_1 из Y? а прообраз элемента y_2?

8. Пусть X – множество студентов в аудитории, Y – множество столов в аудитории. Каждому студенту ставим в соответствии стол, за которым он

сидит. Что является прообразом элемента $y \in Y$? Является ли это соответствие отображением X на Y? а обратимым? В каком случае $f : X \to Y$ – взаимно однозначное отображение X на Y?

9. Существует ли отображение, обратное отображению *f*, которое ставит в соответствие: а) каждому треугольнику описанную около него окружность; б) каждому квадрату описанную около него окружность; в) каждому квадрату, стороны которого параллельны осям координат, вписанную в него окружность?

10. Докажите, что если f – отображение X на Y, g – отображение Y на Z, то $g \circ f$ -отображение X на Z.

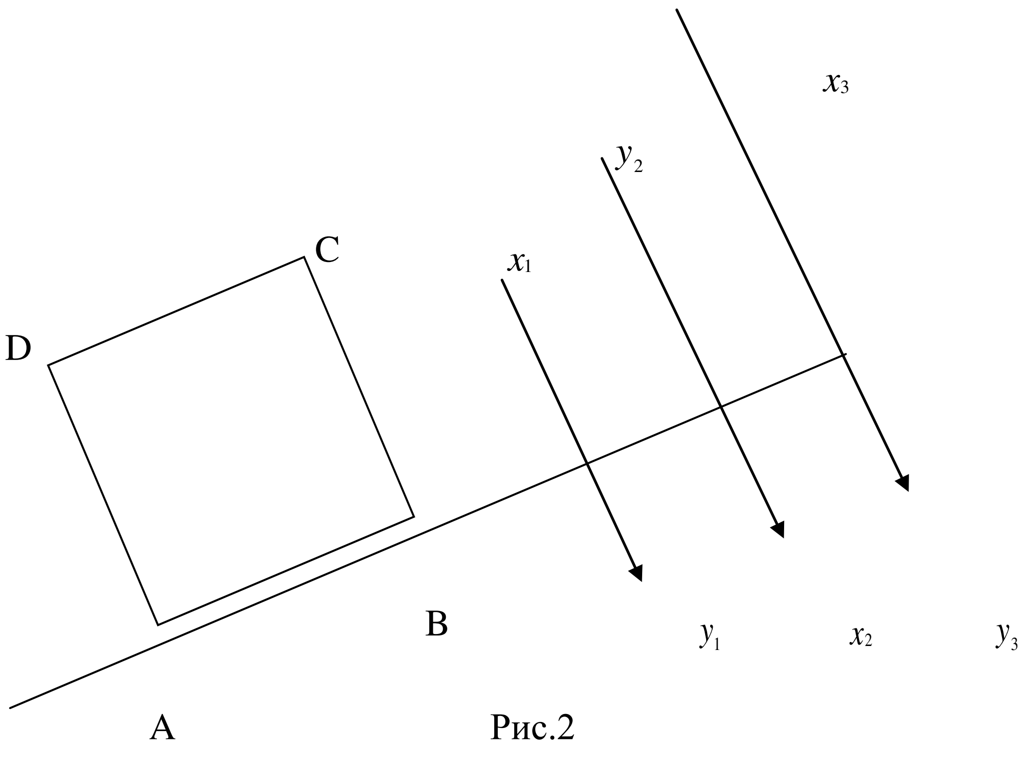

Рис.2

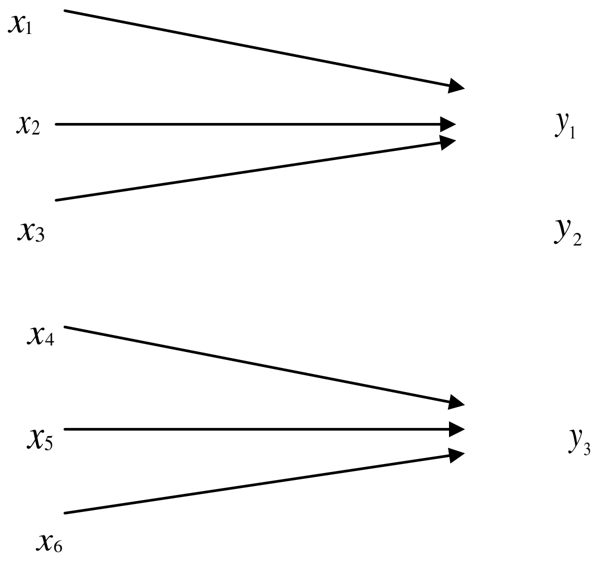

Рис. 3

Практическое занятие № 2

Тема: Действительные числа

Вопросы для самопроверки

1. Что означает неравенство $x < y$, где x, y – действительные числа?

2. Что значит, что одно числовое множество расположено левее другого? Приведите примеры.

3. Что такое разделяющее число? Приведите примеры, когда число, разделяющее два множества, единственно, и пример, когда таких чисел бесконечное много.

4. Множество X состоит из иррациональных чисел луча]-∞;4], а Y – из рациональных чисел отрезка [6;8]. Лежит ли Y справа от X ? Какие числа разделяют X и Y ? Какое наименьшее число разделяет X и Y ?

5. Множество X состоит из рациональных чисел отрезка [-2;3], а Y – из рациональных чисел отрезка [2;6]. Лежит ли Y справа от X? Есть ли числа, разделяющие множества X и Y ?

6. Для каких числовых множеств существует разделяющее их число?

7. Запишите с помощью кванторов утверждение, что множество Y лежит справа от множества X. Запишите отрицание этого утверждения.

8. Запишите с помощью кванторов утверждение, что число c разделяет множества X и Y. Запишите отрицание этого утверждение.

9. Пусть X лежит слева от Y. Могут ли X и Y иметь непустое пересечение? Могут ли X и Y иметь два общих чисел? Могут ли множества X и Y пересекаться, если они разделяются двумя различными числами?

10. Сформулируйте критерий единственности разделяющего числа.

11. Приведите примеры рациональных чисел; иррациональных чисел.

12. Каким множеством является объединение множеств рациональных и иррациональных чисел? а пересечение этих множеств?

13. Что происходит с приближениями по недостатку при увеличении числа оставленных десятичных знаков? а с приближением по избытку?

14. Какие вы знаете виды промежутков на координатной прямой? Что такое отрезок, интервал, полуинтервал, открытый луч, луч? Приведите примеры.

15. Что называется окрестностью точки, центром окружности, радиусом окрестности? Что такое проколотая окрестность?

16. Что называется модулем действительного числа? Может ли модуль быть отрицательным? а нулём?

17. Каков геометрический смысл записи $|x|$? $|x-a|$?

18. Изобразите на координатной прямой множество $\{x \in R \mid |x-a| < \delta\}$, где $\delta > 0$. Что это за множество?

19. Изобразите на координатной прямой множество $\{x \in R \mid 0 < |x-a| < \delta\}$. Что это за множество?

20. Что такое бесконечно удалённая точка и как определяется её окрестность?

21. Запишите с помощью кванторов определения следующих понятий: а) множества, ограниченные снизу, ограниченные сверху; б) множества, неограниченные сверху, неограниченные снизу.

22. Может ли числовое множество быть ограниченным сверху, но неограниченным снизу? Называется ли оно в этом случае ограниченным?

23. Является ли ограниченным множество R действительных чисел? Ограничен ли сверху луч $[0;+\infty[$? а открытый луч $]-\infty; 7[$? Ограничен ли числовой отрезок $[1;10]$? а интервал $]1;5[$?

24. Чем выделяется точная верхняя грань множества X среди остальных верхних граней этого множества?

25. При каком условии существует точная верхняя грань множества X ?

26. Имеет ли пустое множество точные верхнюю и нижнюю грань? Имеет ли точную верхнюю грань множество натуральных чисел?

27. Каковы точные грани множества однозначных натуральных чисел?

28. Для каких числовых множеств $\inf X = \sup X$?

29. Может ли выполнятся неравенство $\inf X < \sup X$?

30. Найдите $\inf X$ и $\sup X$, если: а) $X=[\alpha;\beta]$; б) $X=]\alpha;\beta[$; в) $X=]a;b]$; г) $X=[a;b[$. В каких случаях из этих случаев $\sup X \in X$, $\inf X \in X$?

Упражнения

11. Пусть числа c_1 и c_2 разделяют множества X и Y. Докажите, что

$$\frac{c_1+c_2}{2}$$

также является разделяющим числом для X и Y.

12. а) Докажите, что множества

$$X=\left\{x \mid x=\frac{2n}{n+1}, n\in N\right\} \text{ и } Y=\left\{x \mid x=\frac{2n+4}{n+1}, n\in N\right\}.$$

разделяются только одним числом 2.1

б) Докажите, что любое число отрезка [2,4] разделяет множества

$$X = \left\{ x \mid x = \frac{2n+1}{n+5}, n \in N \right\} \quad \text{и} \quad Y = \left\{ x \mid x = \frac{4n^2+1}{n^2}, n \in N \right\}.$$

13. Десятичное приближение по недостатку с точностью до 0,001 числа x равно 2,564. Чему равно его десятичное приближение с точностью до 0,001 по избытку? а с точностью до 0,1? Чему равны десятичные приближения числа x по недостатку и по избытку с точностью до 0,01?

14. Выпишите десятичные приближения $\sqrt{2}$ по недостатку и по избытку с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001 и найдите разности между числом 2 и квадратами этих приближений.

15. Известно, что $\sqrt{2}$=1,4112…, $\sqrt{3}$=1,7320… .

а) Найдите целую часть суммы $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и её первые три десятичных знака после запятой.

б) Найдите с точностью до 0,001 значение $\sqrt{6}$.

16. а) Укажите два иррациональных числа, суммы которых рациональна.

б) Укажите два иррациональных числа, произведение которых рационально.

17. а) Может ли сумма рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

б) Может ли произведение рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

18. Пусть α и β – иррациональные числа, такие, что $\alpha - \beta$ рационально. Докажите, что $\alpha + \beta$ *и* $\alpha + 3\beta$ иррациональны.

19. Пусть α и β – иррациональные числа, $r=0$ – рациональное число. Какие из следующих чисел могут оказаться рациональными:

а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha + r$; в) $\sqrt{\alpha}$, г) $\sqrt{r}$; д) $\alpha \cdot \beta$; е) $\alpha \cdot r$; ж) $\sqrt{\alpha + r}$; з) $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$; и) $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$?

20. Множество A – отрезок [1;5], множество B – отрезок [3;7], множество C – отрезок [-4;8], множество D – интервал]0;6[. Найдите множества:

а) $A \cap B \cap C \cap D$; б) $A \cup B \cup C \cup D$;

в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; г) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.

21.Укажите на координатной прямой множества, определяемые неравенствами:

а) $|x - 2|<3$; б) $|x + 2|\geq 2$;

в) $|x - 4|+|x + 4|\leq 10$; г) $|x|>10$.

22. а) Найдите непересекающиеся окрестности $x_1 = 0,99$ и $x_2 = 1,01$.

б) Докажите, что любая точка имеет окрестность, не пересекающуюся хотя бы с одной окрестностью бесконечно удалённой точки.

в) Докажите, что если $b \in U(\alpha, \delta)$, то существует окрестность $U(b, \varepsilon)$, такая, что $U(b, \varepsilon) \subset U(\alpha, \delta)$.

23.При каком условии выполняется неравенства:

а) $|x + y| = |x|+|y|$; б) $|x| + |y| = |x| - |y|$;

в) $|x - y| = |x|-|y|$; г) $|x| - |y| = |x| + |y|$;

д) $|x - y| = |y|-|x|$;

24. Укажите, какие из нижеследующих множеств являются ограниченным сверху, ограниченным снизу, ограниченными:

а) множество рациональных чисел $r = \frac{p}{q}$, для которых $0 < p < q$;

б) множество рациональных чисел $r = \frac{p}{q}$, для которых $0 < q < p$;

в) множество рациональных чисел $r = \frac{q}{p}$, для которых $-q < p < 0$

г) множество иррациональных чисел, лежащих в интервале]-1;1[;

д) множество объёмов правильных многогранников, вписанных в шар радиуса R;

е) множество десятичных приближений по недостатку действительного числа $\sqrt{5}$

ж) множество чисел вида $\frac{n^4}{2n^4+1}$, где $n \in N$;

з) множество чисел вида $\frac{n^2}{n+1}$, где $n \in N$;

25. Докажите, что любое конечное множество действительных чисел ограничено.

26. Докажите, что если числовые множества A и B ограниченны, то их пересечение и объединение – ограниченные множества. С помощью этого утверждения докажите, что объединение любого конечного числа отрезков – ограниченное множество.

27. Пусть $X = \left\{ x \mid x = \frac{2n^2}{3n^2+1}, n \in N \right\}$. Докажите, что $sup\, X = \frac{2}{3}, inf\, X = \frac{1}{2}$.

28. Найдите точные верхние и точные нижние грани (либо докажите, что они не существуют) для множеств, о которых идёт речь в упражнении 24.

29. Докажите, что если X – ограниченное множество и $b_1 = inf\, X$, $b_2 = sup\, X$, то все множество X лежит в $[b_1;b_2]$, причём $[b_1;b_2]$ - наименьший из отрезков, обладающих этим свойством (т.е. что никакой отрезок $[b_1^{'};b_2^{'}] \subset [b_1;b_2]$ и отличный от нуля $[b_1;b_2]$ этим свойством не обладает).

Ответы

17. а) Нет; б) да (при $r = 0$). **19.** а), г), д), и). **20.** а) [3;5]; б) [-4;8]; в)]0;6[; г) 54ку[1;7]. **24.** а) Ограниченное; б) ограниченное снизу; в) ограниченное ; г) ограниченное; д) ограниченное; е) ограниченное; ж) ограниченное; з) ограниченное снизу.

Практическое занятие №3

Тема: Функции и выражения

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется числовая функция?

2. Что такое сужение функции на множестве X_1?

3. Как определяется сумма, произведение и частное функций?

4. Что называется множеством значений функции?

5. В каком случае таблица задает функцию?

6. Пусть функция задана выражением. Что называется её областью задания? Может ли область задания функции отличаться от области существования задающего её выражения?

7. Что такое рациональная функция? Иррациональная функция?

8. Как определяется композиция функций? Приведите пример композиции двух и трех функций.

9. Что называется графиком функции?

10. Любое ли множество точек плоскости может быть графиком некоторой функции? Является ли эллипс графиком некоторой функции?

11. Можно ли задать таблицей отображение конечного числового множества X в R (т.е. числовую функцию, заданную на конечном множестве)?

12. Чем отличается область существования выражения $\sqrt{x^2-16}$ от области существования выражения $\frac{1}{\sqrt{x^2-16}}$?

Упражнения

30. Дана функция f, где $f(x)=x^3-E(x)$. Вычислите: а) $f(2{,}5)$; б) $f\left(\sqrt{2}\right)$; в) $f(\pi)$.

31. Функция f задана так: для любого $x\in R_+ f(x)$ есть второй знак после запятой в записи числа x в виде бесконечной десятичной дроби. Вычислите: а) $f\left(\frac{1}{3}\right)$; б) $f\left(3\frac{1}{2}\right)$; в) $f\left(\sqrt{2}\right)$; г) $f(\pi)$; д) $f\left(\frac{3}{7}\right)$.

32. Дана функция f, где

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ x+1, & \text{если } 1< \text{x} \le 3.\end{cases}$$

Вычислите: а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $f(1)$; г) $f(2)$; д) $f(\pi-1)$. Постройте график функции.

33. Дана функция f, где

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, 0\le x<\pi,\\ x-\pi, \pi\le x\le 2\pi.\end{cases}$$

Вычислите: а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Постройте график функции. Существует ли $f(-\pi)$?

34. Дана функция f, где

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, -1\le x\le 0,\\ \cos^2 x, \quad 0\le x\le \pi,\\ \dfrac{x-1}{x+1}, \quad \pi<x\le 6.\end{cases}$$

Вычислите: а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f(\pi)$; г) $f(6)$; д) $f(3)$; е) $f(4)$.

35. Дана функция f, где $f(x)=|x|-1$. Вычислите: а) $f(-2)$; б) $f(0)$; в) $f(1)$. Постройте график функции.

36. Дана функция f, где

$$f(x)=\frac{|x|+|x-1|}{|x+2|}.$$

Вычислите: а) $f(-7)$; б) $f(-3)$; в) $f(-1)$; г) $f(0)$; д) $f(1)$.

37. Дана функция f, где

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если} |x|<1 \ \text{и} \, x\in Q, \\ -x^2, & \text{если} |x|<1 \, \text{и} \, x\in I, \\ x^2+4, & \text{если} |x|\ge 1 \, \text{и} \, x\in \mathrm{Q}, \\ -x^2-4, & \text{если} \ |x|\ge 1 \, \text{и} \, x\in I. \end{cases}$$

Вычислите: а) $f\left(\frac{5}{6}\right)$; б) $f(-1)$; в) $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;г) $f\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; д) $f(7{,}1)$; е) $f(\pi)$; ж) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

38. Не используя знаков модуля и радикала, запишите выражения для следующих функций:

а) $\frac{x+|x|}{2}$; б) $|2-3x|$; в) $|x-1|+|x-2|$; г) $|x^2-9|$; д) $||x-3|-1|$.

39. Постройте эскиз графика функции по следующей таблице её значений:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	3	5	2,5	2	1,5

Найдите приближенное значение $f(1{,}5)$. При каких значениях x имеем $f(x)=4$?

40. Функции f и g заданы таблицами:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	5	7	9
$g(x)$	-5	-5	-9	-13	-17

Составьте таблицу значений для функций: а) $f+g$; б) $f-g$; в) $f\cdot g$; г) $\frac{f}{g}$.

41. Прямоугольник, сторона которого равна x, вписан в окружность радиуса R. А) Найдите периметр P этого прямоугольника. б) Какова область задания функции P? в) Какова область существования выражения $P(x)$?

42. В равносторонний треугольник, сторона которого равна a, вписан прямоугольник с высотой x (рис. 1). а) Выразите площадь этого прямоугольника как функцию от x. б) Найдите область задания этой функции. в) Найдите область существования полученного выражения.

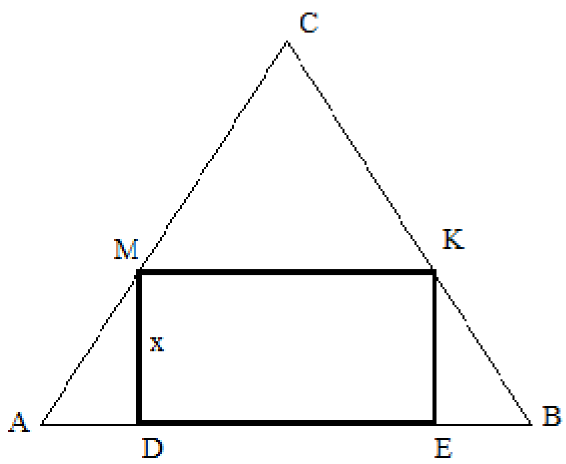

Рис.1

43. Два пункта *A* и *B* находятся в стороне от железной дороги (рис. 2). Строится шоссе из пункта *A* до станции *C* железной дорогой и от *C* до пункта *B*. Выразите длину шоссе как функцию расстояния x от *C* до *D*.

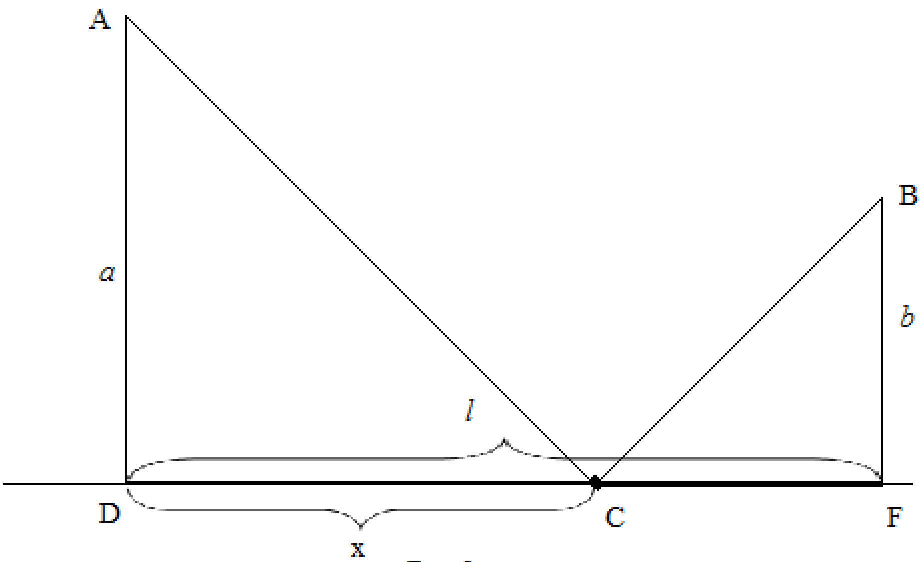

Рис.2

44. Геометрическая фигура состоит из прямоугольника со сторонами a и b, на сторону a поставлен равносторонний треугольник (рис. 3). Обозначим через $S(x)$ площадь фигуры, находящейся между нижним основанием прямоугольника и прямой, которая параллельна основанию и отстоит от него на расстоянии x. а) Напишите выражение для $S(x)$. б) Найдите область задания функции S и область существования выражения $S(x)$.

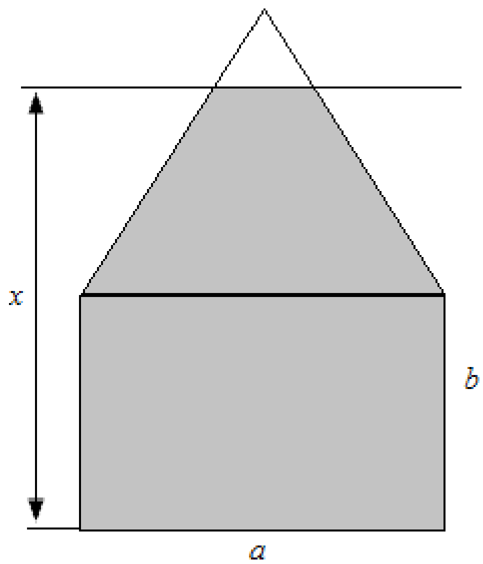

Рис.3

45. Найдите множество значений функции:

а) $x^2,\ -2 \le x \le 4$; б) $x^2 - 6x + 1,\ -\infty < x < \infty$; в) $2\sin x,\ -\infty < x < +\infty$;

г) $2\sin x,\ 0 \le x \le \pi$; д) $\sin^2 x + \cos^2 x,\ -\infty < x < +\infty$; е) $\sqrt{9 - x^2},\ -3 \le x \le 3$.

Найдите область существования следующих выражений:

46. а) $2x^3 + 3x^2 - 5x$; б) $\dfrac{7x-5}{x^2-9}$; в) $\dfrac{3x-1}{2x^2+5x+2}$; г) $\dfrac{x+2}{|x|-2}$ д) $\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$;

е) $\sqrt{9-4x}$; ж) $\sqrt{x^2-4}$; з) $\dfrac{E(x)}{x+1}$; и) $\dfrac{x+1}{E(x)}$.

47. а) $\dfrac{x+1}{\sin \pi x}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{\cos \pi x}$; в) $\dfrac{x+2}{2\sin x - 1}$.

48. а) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|+x}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; в) $\sin\dfrac{x^2+1}{x^2-6x+8}$.

49. а) $tgx + ctgx$; б) $\dfrac{tgx}{2\sin^2 x - 1}$.

50. а) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-8}}$; б) $\sqrt{x^2-5x+6}$; в) $\sqrt[4]{x^3-9x}$.

51. а) $\sqrt{\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}} + \sqrt[3]{x+5}$; б) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}} + \sqrt{12-x-x^2}$.

52. $\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-4x}} + \sqrt[6]{25-x^2}$.

53. $\sqrt{4-|x|} + \dfrac{1}{x^3-4x}$.

54. $\dfrac{1}{\sqrt{8-x}-1} + \sin 3x$.

55. а) $\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{16-x^2}$; б) $\sqrt{\sin x - \dfrac{1}{2}} + \sqrt{9x-x^2}$.

56. $\frac{1}{2}tg\,2x + x^3 + sin\,x + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

57. Придумайте пример функции, заданной выражением, область существования которого составляют следующие промежутки:

а)]1;3[; б) [-1;6]; в) [0;3]; г) [1;$+\infty$]; д)]0;$+\infty$[; е)]$-\infty$;-7[; ж) [1;5[$\cup$]6;8[.

58. Тождественны ли функции f è g, где $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1},\ g(x)=\sqrt{x(x-1)}$? На каком промежутке они тождественны?

59. Дана функция f, где $f(x)=(x-1)^4+4(x-1)^2+cos(x-1)$. Докажите, что $f(1-a)=f(1+a)$.

60. а) Дана функция f, где $f(x)=1+3x^4-\cos 2x$. Докажите, что $f(-x)=f(x)$. б) Дана функция f, где $f(x)=sin\frac{x}{2}-x+x^3$. Докажите, что $f(-x)=-f(x)$.

61. Известно, что $f(x)=cos^2 x,\ g(x)=cos\,x$. Докажите, что $g(2x)=2f(x)-1$.

62. Найдите $f(x)$, если: а) $f(1+2x)=x-x^3+1$; б) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

63. Составьте композицию функций $g\circ f$, если:

а) $f(x)=sin\,x,\ g(x)=x^3$; б) $f(x)=cos\,x,\ g(x)=\sqrt[3]{x+1}$;

в) $f(x)=x^2+5x+3,\ g(x)=tg\,2x$; г) $f(x)=\frac{1}{x^3},\ g(x)=x^2+5x+6$.

64. Составьте композицию функций $h\circ g\circ f$, если :

а) $f(x)=x^3$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=\sqrt[3]{x}-1$;

б) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $h(x)=tgx$.

65. Дана функция f, где $f(x)=ctg\,2x$. Найдите: а) $f^2(x)-3f(x)+2$;

б) $f(x^2-5x+1)$; в) $\sqrt[3]{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}$.

66. Даны функции f и g, где $f(x)=\sin x^2$, $g(x)=x^3+1$. Найдите: а) $f(x)+g(x)$; б) $f^2(x)\cdot g(x^2)$; в) $\sqrt{f(x)}+g\left(\sqrt{x}\right)$; г) $f(g(x))$; д) $g(f(x))$; е) $f(f(x))$; ж) $g(g(g(x)))$.

67. Даны функции f и g, где

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } |x|\le 1,\\ 0 & \text{при } |x|>1,\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{при } |x|\le 2,\\ 2 & \text{при } |x|>2.\end{cases}$$

Найдите: а) $f(g(x))$; б) $g(f(x))$; в) $f(f(x))$; г) $g(g(x))$.

68. Дана функция f, где $f(x)=\sin x$. Найдите:

а) $f(f(f(x)))$; б) $f(f^2(x-1))$; в) $f^2(f(x)-1)$.

Постройте графики следующих функций:

69. а) $x-1$; б) $2x-1$; в) $3-2x$; г) $5x-3$.

70. а) x^4; б) x^3; в) $\dfrac{1}{x^3}$; г) $\dfrac{1}{x^4}$; д) $-\dfrac{1}{x}$; е) $\dfrac{3}{x^2}$; ж) $-\dfrac{1}{2}x^6$.

71. а) x^2-4; б) $9-x^2$; в) x^2-6x+8; г) $2x^2-3x+1$.

72. а) x^3+1; б) $\sin x+x$; в) $x+\dfrac{4}{x^2}$.

73. а) $\dfrac{1}{x^2-6x+8}$;   б) $\dfrac{1}{\sin x}$;   в) $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$.

74. а) $x\cdot \sin x$;   б) $\dfrac{\cos x}{x}$.

75. а) $|x+3|-2x$; б) $|x^2-9|+x^2-9$; в) $|\sin x|-\sin x$; г) $\cos x+|\cos x|$.

76. Постройте график функции f, если:

а) $f(x)=\begin{cases} x-3, \ x\le 1, \\ x^2+4, \ x>1; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x, & x<1, \\ 1, -1\le x\le 1, \\ x, & x>1; \end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases} x, & x<-1, \\ 0. -1\le x\le 1, \\ x^{2,} & x>1; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ tgx, \ 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

77. Решите графически уравнение:

а) $x^3=5-x$; б) $4-3x=tgx,\ x\in]0;\dfrac{\pi}{2}[$; в) $x^2=\sin x$; г) $x^3=\cos x$;

д) $\cos x=\dfrac{1}{x},\ \pi\le x\le 2\pi$; е) $x^3+2x-15=0$; ж) $x^2=(1-x)^3$; з) $2\sin\dfrac{x}{2}=2-x$;

и) $x-\cos\dfrac{x}{2}=0$.

Ответы

30. а) 13,625; б) $2\sqrt{2}-1$; в) π^3-3. **31.** а) 3; б) 0; в) 1; г) 4; д) 2. **32.** а) 0; б) $\dfrac{1}{4}$; в) 1; г) 3; д) π. **33.** а) 0; б) 1; в) $\dfrac{\pi}{2}$; $f(-\pi)$ не существует. **34.** а) 1;

б) 1; в) 1; г) $\frac{5}{7}$; д) $cos^2 3$; е) $\frac{3}{5}$. **35.** а) 1; б) -1; в) 0. **36.** а) $\frac{13}{5}$; б) 7; в) 3; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{3}$. **37.** а) $\frac{25}{36}$; б) 5; в) $-\frac{3}{4}$; г) $-5\frac{1}{4}$; д) 54,41; е) $-\pi^2-4$; ж) $-\frac{\pi}{16}$.

38. а) $\begin{cases} x,\ x\ge 0, \\ 0,\ x<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2-3x, x\le\frac{2}{3} \\ 3x-2,\ x>\frac{2}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3-2x, & x<1, \\ 1, & 1\le x<2, \\ 2x-3, & x\ge 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-9, & x<-3, \\ 9-x^2, & -3\le x<3, \\ x^2-9, & x\ge 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2-x, & x<2, \\ x-2, & 2\le x\le 3, \\ 4-x, & 3\le x\le 4, \\ x-4, & x>4. \end{cases}$ **41.** а) $P=2x+2\sqrt{4R^2-x^2}$; б) $]0;2R[$; в) $[-2R;2R]$.

42. а) $ax-\frac{2x^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\left]0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right[$; в) $]-\infty;+\infty[$.

43. $s=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(l-x)^2+b^2}$. **44.** а) $S(x)=\begin{cases} ax-\frac{(x-b)^2}{\sqrt{3}}, b<x\le b+\frac{a\sqrt{3}}{2}; \\ ax,\ 0\le x\le b \end{cases}$

б) $\left[0;b+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$. **45.** а) [0;16] б) [-8; + ∞ [; в)[-2;2]; г)[0;2]; д{1}; е)[0;3].

46. а) $]-\infty;+\infty[$; б) $]-\infty;-3[\cup]-3;3[\cup]3;+\infty[$; в) $]-\infty;-2[\cup\left]-2;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$;

г) $]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$; д) $]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$; е) $\left]-\infty;\frac{9}{4}\right]$; ж) $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$; з) $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$; и) $]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$.

47. а) $\{x\,|\,x\ne k, k\in Z\}$; б) $\{x\,|\,x\ge 0,\ x\ne n-\frac{1}{2},\ n\in N\}$; в) $\{x\,|\,x\ne(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z\}$. **48.** а) $]0;+\infty[$; б) $]-\infty;0[$; в) $]-\infty;2[\cup]2;4[\cup]4;+\infty[$. **49.** а) $\left\{x\,|\,x\ne\frac{\pi k}{2}, k\in Z\right\}$; б)

$\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\, x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k \in Z\right\}$. **50.** а) $]-\infty;1]\cup]8;+\infty[$; б) $]-\infty;2]\cup[3;+\infty[$;

в) $[-3;0]\cup[3;+\infty[$. **51.** а) $]4;5]\cup]6;+\infty[$; б) $[-4;1]\cup]2;3]$. **52.** $[-5;0]\cup[4;5]$. **53.** $[-4;-2[\cup]-2;0[\cup]0;2[\cup]2;4]$. **54.** $]-\infty;7[\cup]7;8]$. **55.** а) $[-4;-\pi]\cup[0;\pi]$; б) $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{13\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right]$. **56.** $\left]-5;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{4};5\right]$. **58.** Нет. На $[1;+\infty[$. **62.** а) $\frac{1}{4}(-x^2+4x+1)$; б) x^2-2. **63.** а) $\sin^3 x$; б) $\sqrt[3]{\cos x+1}$; в) $tg(2x^2+10x+6)$; г) $1+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^6}$. **64.** а) $\sqrt[3]{\sin x^2-1}$; б) $tg\left(\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right)$. **65.** а) $ctg^2 2x-3ctg 2x+2$; б) $ctg(2x^2-10x+2)$; в) $\sqrt[3]{ctg 2x}+tg 2x$. **66.** а) $\sin x^2+x^3+1$; б) $\sin^2 x^2\cdot(x^6+1)$; в) $\sqrt{\sin x^2}+x\sqrt{x}+1$; г) $\sin(x^3+1)^2$; д) $\sin^3 x^2+1$; е) $\sin(\sin^2 x^2)$; ж) $((x^3+1)^3+1)^3+1$.

67. а) $\begin{cases}1,\ x\in[-\sqrt{3};\ -1]\cup[1;\sqrt{3}],\\ 0, x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]-1;1[\cup]\sqrt{3};+\infty[;\end{cases}$ б) $\begin{cases}1,|x|\le 1,\\ 2,|x|>1;\end{cases}$ в) 1; г) $2-x^2$.

68. а) $sin(sin(sin\, x))$; б) $sin(sin^2(x-1))$; в) $sin^2(sin\, x-1)$.

Практическое занятие №4

Тема: Свойства функций

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется ограниченной на множестве X сверху? снизу? Какая функция называется ограниченной на множестве X?

2. Постройте пример функции, заданной на $[a;b]$ и ограниченной на нем; ограниченной сверху, но не ограниченной снизу на $[a;b]$; ограниченной снизу, но не ограниченной сверху на $[a;b]$.

3. Из приведенных ниже функций выделите ограниченные, неограниченные, ограниченные только сверху, ограниченные только снизу: x^2, x^3, $\sin x$, $\cos x$, tgx, $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$.

4. Какие вы знаете свойства ограниченных функций?

5. Какая функция называется возрастающей на множестве X? убывающей? невозрастающей? неубывающей? монотонной?

6. Какие вы знаете свойства монотонных функций?

7. Приведите пример функции, возрастающей на R; убывающей на R; немонотонной на R.

8. Какая функция называется четной? нечетной?

9. Приведите пример четной функции; нечетной функции; функции, не являющейся ни четной, ни нечетной.

10. Какой особенностью обладает область задания четной или нечетной функции?

11. Какой особенностью обладает график четной функции? график нечетной функции?

12. Какие вы знаете свойства четных и нечетных функций?

13. Какая функция называется периодической? Что такое основной период периодичности функции?

14. Приведите примеры периодических функций.

15. Какой особенностью обладает область задания периодической функции?

16. Что такое последовательность? ограниченная последовательность? монотонная последовательность?

17. Приведите пример монотонной последовательности; немонотонной последовательности; ограниченной последовательности; ограниченной сверху, но не ограниченной снизу; ограниченной снизу, но не ограниченной сверху.

18. Приведите пример последовательности, множество значений которой состоит из трех элементов.

19. Приведите пример ограниченной последовательности, принимающей наибольшее значение, но не принимающей наименьшего значения; принимающей наименьшее значение, но не принимающей ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Упражнения

78. Исследуйте, являются ли нижеприведенные функции ограниченными на заданном множестве. Для ограниченных функций найдите $sup\ f(x)$ и $inf\ f(x)$. Какие из функций ограничены только сверху или только снизу? Найдите для них $sup\ f(x)$ и $inf\ f(x)$:

а) $f(x)=x^2, -4 \le x \le 8$; б) $f(x)=x^2-7x+10, 0 \le x \le 10$;

в) $f(x)=x^2-7x+10,\ 0<x<+\infty$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}, -2<x<2$;

д) $f(x)=tgx, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{4}$; е) $f(x)=\{x\}, -\infty<x<+\infty$.

79. а) Докажите, что если функция f и g возрастают на X и при этом $f(x)>0, g(x)>0$ для всех $x \in X$, то функция $f \cdot g$ возрастает на X.

б) Докажите, что если функция f возрастает на X и не обращается в нуль, то функция $\dfrac{1}{f}$ убывает на X.

80. Докажите, что функция $\frac{1}{x^n}$ убывает на $[0;+\infty[$.

81. Исследуйте на монотонность следующие функции:

а) $\sqrt[n]{x}$; б) $2x-1$; в) $-3x+2$; г) tgx; д) $sin^3 x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$; е) $sin^3 x$;

ж) $E(x)$; з) $x+tgx$; и) $-x-tgx, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; к) x^5+x^3+x.

82. Найдите промежутки монотонности следующих функций:

а) x^2-4x+8; б) $6x-10-x^2$; в) $\frac{1}{x^3-1}$; г) $\frac{1}{sin\,x}$.

Определите, какие из нижеследующих функций четны, какие нечетны, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

83. а) $4-2x^2+6x^4$; б) $\frac{x-2}{x^2+4}$; в) $\frac{x^2+8}{x^2-9}$; г) $\sqrt{x}$.

84. а) $sin^2 x - cos^4 x + ctg^6 x$; б) $cos\,x + sin^4 x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

в) $\frac{x^3+sin\,x}{1+x^2}$; г) $\frac{x^3+sin\,x}{1+x^2}, -1 \le x \le 2$.

85. а) $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x \ge 0, \\ -x^2-4, & x<0; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x^2-4, & x<0; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} x^3+sin\,x, & x \ge 0, \\ -x^3-sin\,x, & x<0. \end{cases}$

86. Представьте нижеследующие функции в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $4x^2-x^3+3x^2-x+5$; б) $2\,sin\,x-4\,cos\,3x+1+tgx$.

87. Является ли четной функция а) $\sqrt{cos\,x}$; б) $cos\sqrt{x}$.

88. Может ли быть четной функция, заданная на числовом множестве:

а)]-6;6]; б) $\{x \| x| \le 3\}$; в) $\{x \| x-1| \le 4\}$; г) $\{x \mid x > 9\}$?

89. Используйте свойства четных и нечетных функций, исследуйте на четность и нечетность следующие функции:

а) $sin^2 x + \dfrac{5-x^2}{x^2} + x^4 - 6x^2 + 11$; б) $\dfrac{cos\,x^3 + 7x^{12}}{x^6 + sin^2 x^3}$; в) $tgx^3 + 4x^3$;

г) $sin^5 3x\,cos^2 6x$.

90. Функция f имеет период 2 и на [-1;1] совпадает с функцией x. а) найдите значения $f(4{,}5); f(3{,}2), f(-1{,}7)$. б) Начертите график функции. в) Какое выражение имеет f на $[2n-1; 2n+1]$, $n \in Z$?

91. Докажите, что если функция f имеет период T, то функция g, где $g(x) = f(ax+b)$, $a \ne 0$, тоже является периодической функцией. Чему равен ее период?

92. Найдите основные периоды следующих функций:

а) $\cos\dfrac{x}{3}$; б) $sin\,4x$; в) $2sin\,6x + sin\,5x$; г) $cos\,\pi x$; д) $tg^2 2x + 1$.

93. Докажите, что следующие функции не являются периодическими:

а) $sin\dfrac{1}{x}$; б) $cos\,x^2$; в) $sin\,x^3$.

94. а) Функцию $x+1$, $0 \le x < 4$, продолжите периодически на всю числовую прямую (с периодом 4). Постройте график полученной функции.

б) Функцию $x^2 + 3$, $-1 \le x < 1$, продолжите периодически на всю числовую прямую (с периодом 2). Постройте график полученной функции.

95. а) Функцию f, где $f(x)=\begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \quad \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi, \end{cases}$ продолжите на $]-\pi; 0]$ так, чтобы получилась нечетная функция, а потом периодически продолжите полученную функцию на всю числовую прямую (с периодом 2π).

б) Постройте график полученной функции F.

в) Вычислите $F\left(\frac{3}{2}\pi\right), F\left(-\frac{7}{6}\pi\right), F\left(21\frac{1}{3}\pi\right), F\left(-\frac{100}{3}\pi\right)$.

г) Существуют ли значения $F(\pi), F(3\pi)$?

96. Выпишите первые 5 членов последовательностей, заданных формулами:

а) $a_n = n!$; б) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n}$; в) $a_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$; г) $a_n = 2^n$.

97. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_n = a_{n=1} + 2a_{n-2}$. Найдите первые 5 членов последовательностей, если $a_1 = 0, a_2 = 1$.

98. Пусть $a_n = n^2 + 1$. Найдите: а) a_{2n}; б) a_{3+n}; в) a_{n^3}.

99. Найдите хотя бы по одной формуле общего члена для следующих последовательностей: а) 1, 3, 9, 27, 81, …; б) 2, 5, 10, 17, 26, …;

в) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} ...$; г) $\sqrt{1\cdot 2}, \sqrt{2\cdot 3}, \sqrt{3\cdot 4}, ...$;

д) $\dfrac{3}{2^2\cdot 3^2}, -\dfrac{5}{3^2\cdot 4^2}, \dfrac{7}{4^2\cdot 5^2}, -\dfrac{9}{5^2\cdot 6^2}$.

100. Докажите, что последовательность, общий член которой имеет указанный ниже вид , возрастает:

а) $a_n = n^3 + 2n$; б) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 10}$; в) $a_n = \left(1 + \dfrac{n^4}{n^4 + 8}\right)^3$.

101. Докажите, что последовательность, общий член которой имеет указанный ниже вид, убывает:

а) $a_n = \dfrac{n^2 + 16}{n^3 + 3}$; б) $a_n = \sqrt{1 + \dfrac{n^4 + 8}{n^4}}$.

102. Докажите, что последовательность , общий член которой указан ниже, ограничена:

а) $a_n = \dfrac{1}{n!}$; б) $a_n = \dfrac{n^4}{n^4 + 16}$.

103. Постройте график последовательности (a_n), если:

а) $a_n = \dfrac{n+2}{n}$; б) $a_n = \dfrac{n^2}{4}$; в) $a_n = 3n - 1$.

Ответы

78. а) $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 64$; б) $\inf f(x) = -\dfrac{9}{4}$; $\sup f(x) = 40$;

в) $\inf f(x) = -\dfrac{9}{4}$; г) $\sup f(x) = -\dfrac{1}{4}$; д) $\sup f(x) = 1$;

е) $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 1$.

81. а) Возрастает; б) возрастает; в) убывает; г) не монотонна; д) возрастает; е) не монотонна; ж) не убывает; з) не монотонна; и) убывает; к) возрастает.

82. а) На $]-\infty; 2]$ убывает, на $[2; +\infty[$ возрастает; б) на $]-\infty; 3]$ возрастает, на $]3; +\infty[$ убывает; в) на $]-\infty; 1[$ убывает и на $]1; +\infty[$ убывает; г) на $\left]2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k \in Z$, убывает; на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\right[, k \in Z$, возрастает; на $\left]\pi+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right], k \in Z$, возрастает; на $\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k; 2\pi+2\pi k\right[, k \in Z$, убывает;

83. а) Четна; б) ни четна, ни нечетна; в) четна; г) ни четна, ни нечетна.

84. а) Четна; б) четна; в) нечетна; г) ни четна, ни нечетна. **85.** а) Ни четна, ни нечетна; б) нечетна; в) четна. **87.** а) Да; б) нет. **89.** а) Четна; б) четна; в) нечетна; г) нечетна. **90.** а) 0,5; -0,8; 0,3; в) $x-2n$. **91.** $\frac{T}{a}$. **92.** а) 6π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 2π; г)2; д)$\frac{\pi}{2}$. **95.**в) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1;\ f\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=0;\ f\left(21\frac{1}{3}\pi\right)=0;\ f\left(-\frac{100\pi}{3}\right)=0$; г) нет. **96.** а) 1,2,6,24,120; б)$0,\frac{3}{2},\frac{8}{3},\frac{15}{4},\frac{24}{5}$; в) 0,0,1,4,10; г) 2,4,8,16,32. **97.** 0,1,1,3,5. **98.** а) $4n^2+1$; б) $n^2+6n+10$; в) n^6+1. **99.** а) $a_n=3^{n-1}$; б) n^2+1; в) $\frac{n}{n+1}$; г) $\sqrt{n(n+1}$; д) $\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Практическое занятие №5

Тема: Предел функции на бесконечности

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется бесконечно малой при $x \to +\propto$? при $x \to -\propto$? при $x \to \propto$?

2. Приведите пример функции, бесконечно малой при $x \to +\propto$, но не являющейся бесконечно малой при $x \to -\propto$; бесконечно малой при $x \to -\propto$, но не являющейся бесконечно малой $x \to +\propto$.

3. Может ли постоянная функция быть бесконечно малой? В каком случае?

4. Сформулируйте теорему о сравнении с бесконечно малой функцией.

5. Перечислите основные свойства бесконечно малых функций.

6. Если функция $f+g$ бесконечно мала при $x \to +\propto$, то означает ли это что f и g бесконечно малы? Верно ли это утверждение?

7. Сформулируйте определение предела функции f при $x \to +\propto$ «на языке бесконечно малых».

8. Сформулируйте определение предела функции f «на языке $\varepsilon - M$»:

9. Пусть доказано, что, начиная с некоторого значения M, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\frac{1}{10^{100}}$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b?$

10. Приведите пример функции, имеющей при $x \to +\propto$ своим пределом число 1; - 1; 0; 5.

11. В чём состоит физический смысл предела функции при $x \to +\propto$? В чём состоит физический смысл чисел ε и M в определении предела функции $x \to +\propto$?

12. В чём состоит геометрический смысл равенства $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b,$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b?$ Сделайте соответствующие рисунки.

13. Перечислите свойства пределов функции при $x \to +\propto$.

14. Сформулируйте и докажите теоремы из п.30 для случая, когда $x \to -\propto$.

15. В каком случае говорят, что число b не является пределом функции f при $x \to +\propto$? Запишите это утверждение с помощью кванторов.

16. Сформулируйте определение предела функции «на языке окрестностей» при $x \to +\propto$; при $x \to -\propto$; при $x \to \propto$.

17. Верно ли утверждение: если функция f ограниченна на луче $]M;+\infty[$, то она имеет предел при $x \to +\propto$? Верна ли обратная теорема?

18. Какая функция называется бесконечно большой при $x \to +\propto$? при $x \to -\propto$? при $x \to \propto$?

19. Приведите пример функции, бесконечно большой при $x \to +\propto$, но не являющейся бесконечно большой при $x \to \propto$; не являющейся бесконечно большой ни при $x \to +\propto$, ни при $x \to -\propto$.

20. Какая связь между бесконечно большой и бесконечно малой функциями?

21. Запишите с помощью кванторов, что означают утверждения:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;   б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;   в) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

г) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;   д) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$;   е) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

Сделайте соответствующие рисунки.

22.Запишите с помощью кванторов отрицание утверждений:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;   б) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

23.Всякая ли бесконечно большая функция является неограниченной? А всякая ли неограниченная функция является бесконечно большой?

Упражнения

104. Докажите, что если функция α бесконечно мала при $x\to+\propto$, то функции: а) $2\alpha^2(x)+\alpha(x)\cdot\sin 4x$; б) $|\alpha(x)|$; в) $\alpha^3(x)+5\alpha(x)$ бесконечно малы.

105. Докажите, что следующие функции бесконечно малы при $x\to+\propto$:

а) $\dfrac{1}{x^4+1}$; б) $\dfrac{6x^3-3x^2+\sqrt{x+1}}{x^5}$; в) $\dfrac{sin^2 x+3cos 2x}{x^4}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

106. Докажите, что если функции α и β бесконечно малы при $x\to+\propto$, то: а) функция $|\alpha|+|\beta|$ бесконечна мала при $x\to+\propto$; б) функция γ, где $\gamma(x)=\max(\alpha(x),\beta(x))$, бесконечна мала при $x\to+\propto$.

107. а) Исходя из определения предела, докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+9}=1$.

б) Найдите значение M, такое, что при $x>M$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2+9}-1\right|<\frac{1}{1000}.$$

108.Докажите неравенства:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+2}=2;$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{3x+1}=\dfrac{1}{3};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+6x+1}{3x^4}=\dfrac{8}{3};$ г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+16}-x)=0;$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}=0;$ е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+\cos x}{x^3}=2;$

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+9}+x)=0;$

109. а) Докажите, что число b=0 не является пределом функции $\cos x$ при $x\to+\propto$.

б) Докажите, что число b не является пределом функции $\cos x$ при $x\to+\propto$ (т.е. докажите, что эта функция не имеет предела при $x\to+\propto$).

110. Докажите, что число b не является пределом функции x^3: а) при $x\to+\propto$; б) при $x\to-\propto$; в) при $x\to\propto$.

111. а) Студент сформулировал определение предела функции f при $x\to+\propto$ так: «… найдётся такое $\varepsilon>0$, что для всех x выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$». Покажите, что при таком «определении» любая ограниченная функция (в том числе и $\cos x$) имеет предел при $x\to+\propto$.

б) Студент сформулировал определение предела функции f при $x\to+\propto$ так: «для любых $\varepsilon>0$ и M найдётся такое $x>M$, что $|f(x)-b|<\varepsilon$». Покажите, что при таком «определении» предел функции $\cos x$ при $x\to+\propto$ может равняться любому числу от -1 до 1.

112. В чём ошибочно следующее «определение» предела функции f при $x \to +\propto$: «… для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое M, что для всех $x > M$ выполняется неравенство $f(x) - b < \varepsilon$»?

113. Постройте график такой функции f, что:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (функция возрастает на всей числовой прямой);

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, а при $x \to -\propto$ функция неограниченно возрастает;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, а при $x \to +\propto$ функция колеблется -1 до 1;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, но $f(x) < 1$ для всех x.

114. а) Найдите приближённое значение функции $\frac{2x^4+1}{x^4+1}$ при x=10,156 и x=-12,367. Покажите, что допущенная ошибка не превосходит 0,0001.

б) Оцените ошибку при x=3647,105.

115. а) Докажите, что имеют место равенства:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+9}{x^2+4} = 1; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8}{2x^2+3} = \frac{1}{2}.$$

б) Сравните значения функций $\frac{x^2+9}{x^2+4}$ и $\frac{x^2+8}{2x^2+3}$ при достаточно больших значения x. Найдите такое $M > 0$, что при $x > M$ выполняется неравенство:

$$\frac{x^2+9}{x^2+4} > \frac{x^2+8}{2x^2+3}.$$

116.Докажите, что функция $x\sin\pi x$ является неограниченной на $[0;+\infty[$, но не является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

117. Докажите, что функция f является бесконечно большой при $x \to +\infty$, если:

а) $f(x) = 2x^3 - 5x + 3$; б) $f(x) = x\sqrt{x^4+16}$; в) $f(x) = x^2(2+\sin x)$.

Практическое занятие № 6

Тема: Вычисление пределов функций при $x \to \infty$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над пределами функций.

2. Следует ли из существования предела существование пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (рассмотрите пример: $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}$, $g(x) = -\sin x$)?

3. Следует ли из существования предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = \tilde{n}$ существование пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?

4. Пусто $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. В каком случае $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=0$? В каком случае $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty$? Чему равен этот предел в случае, когда $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены одной и той же степени?

5. Что такое асимптота графика функций?

6. В каком случае график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y=b$? наклонную асимптоту $y=kx+b$?

7. Может ли кривая пересекать асимптоту?

8. Начертите график функции, имеющей горизонтальную асимптоту при $x\to\infty$ и такой, что при $x\to+\infty$ график приближался к асимптоте снизу, а при $x\to-\infty$ - сверху.

9. Может ли график функции иметь $x\to+\infty$ и горизонтальную и наклонную асимптоты?

10. Может ли график функции иметь горизонтальную асимптоту при $x\to+\infty$ и наклонную при $x\to-\infty$? Сделайте чертёж.

Упражнения

Вычислите пределы следующих пределов функций:

118.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-6x+8}{5x^3+6x^2+11}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7-1}{x^{10}+1}$;

119. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-2x+6}{5x^3+6x^2+11}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x+6}{x^3+7x^2-1}$;

120. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x+1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1(5x+1)(6x+1)}{(2x^3+3x^2-4x-1)^2}$;

121. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x^4+1}{9x^6+7}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{9x^2-x+3}}$;

122. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+1}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x-1}$;

123. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+3x\sqrt{x}+1}{2x^4-7x\sqrt[4]{x}+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-1}{x^2+6}$;

124. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+6x+1}{x^2-5x+1}}$;

125. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{3-\sqrt[3]{x}}+1\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x}-2\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$;

126. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$;

127. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$;

128. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-3x}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$;

129. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(1-x)^2}-x\right)$;

130. Найдите горизонтальные или наклонные асимптоты графиков следующих функций:

а) $\dfrac{4x^2-5x+1}{6x^2-7}$; б) $\dfrac{x^3}{x^2+7x+8}$; в) $\dfrac{3x^2-x-1}{x+2}$;

г) $\dfrac{x^2}{6x^2+x-1}$; д) $\dfrac{x^3-\sin^2 x}{x^2+9}$; е) $\sqrt{x^2+9}$;

ж) $\sqrt{x^2+9}-x$.

Ответы

118. а) $\frac{7}{5}$; б) 0. **119.** а) $+\infty$; б) $-\infty$. **120.** а) 2; б) 180. **121.** а) 0; б) $\frac{2}{3}$. **122.** а) 3; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **123.** а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 0. **124.** 2. **125.** а) 1; б) -2; в) 1. **126.** $-2{,}5$. **127.** а) $\frac{1}{6}$; б) $+\infty$. **128.** а) 8; б) 2 при $x\to+\infty$, -2 при $x\to-\infty$. **129.** $-\frac{2}{3}$. **130.** а) $y=\frac{2}{3}$; б) $y=x-7$; в) $y=3x-7$; г) $y=0$; д) $y=x$; е) $y=x$ при $x\to+\infty$, $y=-x$ при $x\to-\infty$; ж) $y=0$.

Практическое занятие №7

Тема: Предел последовательности

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение предела при $x \to +\infty$ функции, заданной на произвольном неограниченном сверху множестве X.

2. Сформулируйте определение предела при $x \to -\infty$ функции, заданной на произвольном неограниченном снизу множестве X.

3. Сформулируйте определение предела последовательности.

4. Какая последовательность называется бесконечно малой? Приведите примеры бесконечно малых последовательностей.

5. Какая последовательность называется бесконечно большой? Приведите примеры бесконечно больших последовательностей.

6. Сформулируйте для последовательностей две теоремы из п.30.

7. В чём состоит геометрический смысл понятия предела последовательности?

8. Найдите множество $\{a_n \mid n \in N\}$ для последовательности (a_n), где $(a_n) = (-1)^n$.

9. Приведите пример возрастающей неограниченной сверху последовательности. Имеет ли она конечный предел?

10. Приведите пример возрастающей последовательности, ограниченной сверху. Имеет ли она предел?

11. Может ли иметь предел немонотонная последовательность? а неограниченная последовательность?

12. Что является пределом ограниченной возрастающей последовательности? а неограниченной последовательности?

13. Какая система отрезков называется вложенной? стягивающейся?

14. Является ли вложенной система отрезков

$$[0;3],\left[\frac{1}{2};2\frac{1}{2}\right],\ \dots,\left[1-\frac{1}{n};2+\frac{1}{n}\right],\dots ?$$

Является ли она стягивающейся?

15. Является ли вложенной система отрезков

$$[2;3],\left[\frac{3}{2};2\frac{1}{2}\right],\ \dots,\left[1+\frac{1}{n};2+\frac{1}{n}\right],\dots ?$$

16. Какие множества разделяет общая точка стягивающейся системы отрезков?

17. Верна ли теорема 6.7, если вместо отрезков взять полуотрезки $[a_n;b_n[$? Приведите пример стягивающейся системы полуотрезков, не имеющих общей точки.

18. Пределом какой последовательности является число e?

19. На какие этапы разбивается доказательство существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

20.Отличаются ли пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ друг от друга?

21. Что такое сходящаяся последовательность? Расходящаяся последовательность?

22. Верно ли утверждение: если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся , то (a_n+b_n) и (a_nb_n) сходятся?

23. Верно ли утверждение: если последовательности (a_n) и (b_n) расходятся, то (a_n+b_n) и расходится? Рассмотрите пример: $(a_n)=(-1)^n$, и $(b_n)=(-1)^{n+1}$.

24. Придумайте пример двух таких расходящихся последовательностей (a_n) и (b_n), чтобы $(a_n b_n)$ была: а) сходящейся последовательностью; б) расходящейся последовательностью.

25. Последовательность (a_n) сходится, а (b_n) расходится. Может ли сходиться последовательность $(a_n + b_n)$? а $(a_n b_n)$?

26. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0$, а (b_n) - произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{x\to\infty} a_n b_n = 0$? Приведите примеры как подтверждающие, так и опровергающие это равенство.

27. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} a_n b_n = 0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0$, либо $\lim\limits_{x\to\infty} b_n = 0$?

28. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = +\infty$, то среди значений членов последовательности есть наименьшее.

Упражнения

131. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+2} = 2;$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+2} = \dfrac{3}{2};$ в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1} = 1;$

Вычислите предел последовательности (a_n):

132. а) $(a_n) = \dfrac{1-n-n^3}{(3n+1)^3};$ б) $(a_n) = \dfrac{3-n}{2n+1} - \dfrac{3n^2+2}{4n^2+1};$

в) $(a_n)=\dfrac{(-1)^n n}{2n-1}-\dfrac{n}{n^2+n+1}$;

133. а) $(a_n)=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}$; б) $(a_n)=\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3}$;

в) $(a_n)=\sqrt[3]{n^2-n^3}+n$;

134. $(a_n)=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$;

135. а) $(a_n)=\dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}$; б) $(a_n)=\dfrac{2n}{n^2+1}\sin\dfrac{n-1}{2n+1}+\dfrac{n}{2n-1}\cdot\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$;

136. Докажите, что последовательность с общим членом a_n имеет предел, если:

а) $(a_n)=1+\dfrac{1}{2\cdot 2!}+\dfrac{1}{3\cdot 3!}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot n!}$;

б) $(a_n)=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$;

в) $(a_n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$;

г) $(a_n)=\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\ldots+\dfrac{1}{2^n+1}$;

137. Докажите, что последовательность, определяемая соотношением $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+1\right)$, имеет предел при $|a_1|<1$, и найдите значение этого предела.

138. Докажите существование предела последовательности (P_n), где P_n - периметр правильного 2^n-угольника $(n \geq 2)$, описанного около круга радиуса R. Чему равен этот предел?

Ответы

132. а) $-\frac{1}{27}$; б) $-\frac{5}{4}$; в) 0. **133.** а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{3}$. **134.** $\frac{4}{3}$. **135.** а) 0; б) 0. **137.** 1. **138.** $2\pi R$**.**

Практическое занятие №8

Тема: Предел функции в точке

Вопросы для самопроверки

1. Что означает запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$? Сформулируйте определение предела функции f при $x \to a$ «на языке окрестностей», « на языке $\varepsilon \cdot \delta$ ».

2. Объясните, почему в определении предела «на языке $\varepsilon \cdot \delta$» пишут $0 < |x - a| < \delta$, а не $|x - a| < \delta$.

3. Сформулируйте свойства пределов функций при $x \to a$.

4. Как вычислить предел при $x \to a$ многочлена? Предел рациональной функции, у которой значение $x = a$ не является корнем знаменателя?

5. Какая функция называется бесконечно малой при $x \to a$?

6. Приведите примеры функций, бесконечно малых при $x \to 0$; при $x \to 1$; при $x \to -3$.

7. Что такое предельная точка множества X? Приведите пример предельной точки.

8. Что означает запись $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} = b$?

9. Что называется односторонним пределом функции в точке a?

10. В каком случае из существования односторонних пределов функции f при $x \to a$ следует существование $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

11.Дайте определение (с помощью кванторов) следующих утверждений и сделайте соответствующие рисунки:

а) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty;$ б) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty;$

в) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty;$ г) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty;$

д) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty;$ е) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty;$

Упражнения

139. Докажите с помощью определения предела функции в точке, что:

а) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2;$ б) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0;$

в) $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8;$ г) $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[2]{x} = 2;$

140. Докажите, что утверждение $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{\pi}{2x} = 1;$ неверно.

141. Докажите, что утверждение $\lim\limits_{x \to 0} D(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} D(x) = 0$, где $D(x)$ - функция Дирихле, являются неверными.

142. а) Формулируя определение предела функции в точке, студент вместо «для любого $\varepsilon > 0$» сказал «существует $\varepsilon > 0$». Докажите, что при таком «определении» $\lim\limits_{x \to 0} D(x) = 1$.

б) Студент дал следующую формулировку определения предела функции в точке: для любого ε найдётся такое $\delta > 0$, что на $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В чём ошибочность такой формулировки? Найдётся ли хоть одно $\delta > 0$, если взять $\varepsilon > -1$?

в) Можно ли в определении вместо $\varepsilon > 0$ написать $\varepsilon \geq 0$? Какие функции будут тогда иметь предел?

г) Студент в формулировке определения предела вместо «найдётся $\delta > 0$» сказал «длят всех $\delta > 0$». Какие функции имеют предел по такому «определению»?

143. Докажите, что если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$.

Вычислить следующие пределы:

144. а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^4 - 2x^2 + 1}{10x^5 - x^4 + 3};$ б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x^2 - 1};$

145. а) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x + 2}{x^3 + 1};$ б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 8};$ в) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x + 2}{x^3 - 8};$

146. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x+5}{x^2+x-2}$;

147. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

148. Найдите односторонние пределы в точке a функции f, если:

а) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2, \\ -2x+1, & x>2 \end{cases}$ $a=2$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$, $a=1$;

в) $f(x)=\dfrac{x}{(x-3)^2}$, $a=3$; г) $f(x)=\begin{cases} x^2-1,\ x<0 \\ x-1, 0\le x\le 1 \quad a=0; \\ (x-1)^2, x>1,\ a=1 \end{cases}$

Для каких из этих функций существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

149. Пусть $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}$, $a(n)=\dfrac{3n^3+5}{n^3+n^2-1}$. Найдите предел последовательности $(f(a_n))$.

150. Пусть $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$. Найдите пределы последовательностей $\left(f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)\right)$ и $\left(f\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right)$. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

151. В каких точках имеет бесконечный предел функция $\dfrac{x^3}{(x+1)(x^2-4)}$?

Исследуйте поведение функции слева и справа от этих точек.

152. Сделайте эскизы графиков следующих функций:

а) $\frac{x}{x^2-4}$; б) $\frac{x^2+4}{x^2-4}$; в) $\frac{x^2-9}{x^2-4}$; г) $\frac{x^2-4}{x^2-9}$;

Ответы

144. а) $\frac{1}{3}$; б) 0. **145.** а) ∞; б) 0; в) ∞. **146.** а) -2; б) -1,5; в) $-\frac{1}{4}$; г) -1. **147.** а) -3; б) $\frac{2}{3}$. **148.** а) $f(a-0)=3$, $f(a+0)=-3$; б) $f(a-0)=-3$, $f(a+0)=3$; в) $f(a-0)=+\infty$, $f(a+0)=+\infty$; г) $f(-0)=-1$, $f(+0)=-1$, $f(1-0)=0$, $f(1+0)=0$. **149.** 27. **150.** $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n}\right)=1$, $\lim\limits_{n\to 0} f(x)$-не существует. **151.** -2, -1, 2.

Практическое занятие № 9

Тема: Непрерывность функции в точке

Вопросы для самопроверки

1. Приведите два примера непрерывно меняющихся величин и два примера величин, меняющихся скачкообразно.

2. Пусть $V(t)$- объем воды как функция ее температуры. При каких значениях t эта функция меняется скачкообразно?

3. Как меняется сила тока в цепи при включении с помощью выключателя и с помощью реостата? В каком случае изменение плавно, а в каком скачкообразно?

4. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке «на языке бесконечно малых», «на языке пределов», «на языке $\varepsilon-\delta$», «на языке окрестностей».

5. Можно ли в определении непрерывности функции «на языке $\varepsilon - \delta$» заменить условие $\varepsilon > 0$ на $\varepsilon \geq 0$?

6. Можно ли в определении непрерывности функции заменить условие $\delta > 0$ на $\delta \geq 0$?

7. Можно ли в определении непрерывности функции заменить неравенства $|x - a| < \delta$ и $| f(x) - f(a) < \varepsilon$ на $|x - a| \leq \delta$ и $| f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$?

8. Можно ли в определении непрерывности вместо слов «для любого $\varepsilon > 0$» использовать слова «найдется $\varepsilon > 0$»? Ответ поясните примером.

9. Можно ли в определении непрерывности, вместо слов «найдется $\delta > 0$» сказать «для любого $\delta > 0$»? Ответ поясните примером.

10. В каком случае функция f считается непрерывной в точке a, если область задания функции не содержит никакой окрестности точки a?

11. Почему функция считается непрерывной в изолированной точке области задания?

12. Функция задана на отрезке $[a;b]$. В каком случае она считается непрерывной в точке a? непрерывной в точке b?

13. Что означает предложение «функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$»?

14. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями.

15. В каком случае справедливо равенство $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to a} f(x))$?

16. Сформулируйте теорему о непрерывности композиций функций.

17. Можно ли утверждать что-либо о знаке функции f в достаточно малой окрестности точки a, если в этой точке она непрерывна и равна нулю?

18. Можно ли утверждать что-либо о знаке функции f в достаточно малой окрестности точки a, если в этой точке она положительна и разрывна?

19. Можно ли утверждать что-либо о знаке функции f в достаточно малой окрестности точки a, если в этой точке она положительна и непрерывна?

20. Какие существуют типы точек разрыва?

21. Как устранить разрыв в точке устранимого разрыва?

22. Что называют скачком функции в точке a? Когда он существует?

Упражнения

153. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x-4| < \delta$ вытекало неравенство: а) $|x^2-16| < 20$; б) $|x^2-16| < 1$; в) $|x^2-16| < 0{,}001$; г) $|x^2-16| < \varepsilon$.

154. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x-2| < \delta$ вытекало неравенство $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| < 0{,}001$.

155. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x-a| < \delta$ вытекало неравенство $|x^3-a^3| < 0{,}01$. Рассмотрите случай $a=0,\ a=1$.

156. Найдите такое $\delta > 0$, чтобы при $|x-a| < \delta$ имело место неравенство $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| < \varepsilon$, если: а) $a=10,\ \varepsilon=0{,}001$; б) $a=1,\ \varepsilon=0{,}001$; в) $a=0{,}01,\ \varepsilon=0{,}01$.

157. Докажите непрерывность функции f, если

а) $f(x)=\dfrac{x+4}{3-2x}, x\in]-\infty;1[$; б) $f(x)=sin2x, x\in R$;

в) $f(x)=tg3x,\ x=\dfrac{\pi}{4}$; г) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4},\ x\in R$;

д) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-7x+10},\ x\in]2;5[$; е) $f(x)=cos(ax+b),\ x\in R$;

ж) $f(x)=\dfrac{x^2 cos\,x}{4+sin^2 x},\ x\in R$.

158. Вычислите предел и объясните, каким свойством тригонометрических функций при этом воспользовались:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} cos2x$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} (cos^3 x+sin^3 x)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{sin^4 x+cos^4 x}{sin\,x+cos\,x}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x^2\right)$.

159. Найдите и исследуйте точки разрыва функции:

а) $\dfrac{3}{x}$; б) $\dfrac{1}{x^2-4}$; в) $\dfrac{x^2-1}{x^3-8}$; г) $\dfrac{x-1}{|x-1|}$;

д) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; е) $\dfrac{x}{sin\,x-cos\,x}$; ж) $cos\dfrac{\pi}{x}$.

160. Докажите, что для функции Дирихле каждая точка является точкой разрыва второго рода.

161. Найдите окрестность точки $x=2$, в которой функция $x^2+4x-10$ имеет положительные значения. Почему до решения задачи можно быть уверенным, что такая окрестность существует?

162. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n^2}{n^3+1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n^4}{n^5+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n^3+1}{n^4+2}\right)$.

163. Найдите точки разрыва функции f, исследуйте их характер, изобразите график функции в окрестности точки разрыва, если:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2|x|}$; в) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$;

г) $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{1+x}}{4-x^2}$; д) $f(x)=\dfrac{\cos x}{|x|}$.

В следующих задачах исследуйте функции на непрерывность, найдите точки разрыва и установите их характер, постройте эскиз графика функции f, заданной своим выражением $f(x)$:

164. а) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 4, & x=1.\end{cases}$

165. а) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{2x-3}{|2x-3|}$.

166. а) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1,\\ x+2, & x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 1\\ x^2+4, & x>1.\end{cases}$

167. а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & 0\le x<1, \\ x^2+1, & x\ge 1, \\ x, & x<0; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ tgx+1, & x>0. \end{cases}$

168. а) $f(x)=\begin{cases} 2tgx, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4}, \\ 3, & x=\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{8x}{\pi}, & \dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<1, \\ -x^2+2x, & 1\le x<3, \\ 0, & x\ge 3. \end{cases}$

169. а) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x=\dfrac{\pi}{4}, \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4}<x\le\pi; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<\pi, \\ x-\pi, & \pi\le x<2\pi, \\ \cos x, & x\ge 2\pi. \end{cases}$

Ответы

153. а) $\delta<2$; б) $\delta<\sqrt{17}-4$; в) $\delta<\sqrt{16{,}001}-4$. **158.** а) $-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{8}$; в) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **159.** а) $x=0$ - точка разрыва 2-го рода; б) $x=-2,\ x=2$ -точки разрыва 2-го рода; в) $x=2$ - точка разрыва 2-го рода; г) $x=1$ - точка разрыва 1-го рода; д) $x=2$ - точка устранимого разрыва, $x=-2$ - точка разрыва 2-го рода; е) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z,$ - точки разрыва 2-го рода; ж) $x=0$ - точка разрыва 2-го рода. **162.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin e^2$; г) 1. **163.** а) $x=0,\ x=1$ - точки разрыва 2-го рода; б) $x=0$ - точка разрыва 1-го рода; в) $x=1$ - точка разрыва 1-го рода; г) $x=2$ - точка разрыва 2-го рода;

Основная литература

1. Сергеев И.Н. ЕГЭ. Математика. Задания типа С. –М.: Издательство «Экзамен», 2016, https://alleng.org/d/math/math312.htm

Дополнительная литература

1. Белошистая А.В. «Тематическое планирование уроков подготовки к экзамену», М.: «Экзамен», 2007
2. Гесева К.С., ЕГЭ. Математика: Раздаточный материал тренировочных тестов. СПб.: Тригон, 2006
3. Кочагин В.В. ЕГЭ-2009. Математика. Тематические тренировочные задания, М.: Эксмо, 2008
4. Кузнецова Л.В. и др. Алгебра, сборник заданий. Москва, «Дрофа» 2001
5. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра 7, Алгебра 8, Алгебра 9, Москва, «Просвещение»,2000
6. Пичурин Л.Ф. «За страницами алгебры», Москва: Просвещение, 1990.
7. Галицкий М.Л. и др. «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов». Учебное пособие для учащихся. Москва: Просвещение, 1999.
8. Глейзер Г.И. «История математики в школе VII –VIII Кл.». Пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1982