Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт

Кафедра информационных систем, электропривода и автоматики

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
для бакалавров направления подготовки 09.03.02 —
Информационные системы и технологии

Невинномысск 2026

Настоящие методические указания предназначены для студентов направления 09.03.02 — Информационные системы и технологии. Они разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом и образовательной программой направления.

В методических указаниях приведены сведения о порядке получения математического описания систем и о правилах получения математических моделей типовых технологических объектов. Даны варианты заданий для самостоятельного решения и приведен список рекомендуемых литературных источников.

Составитель *канд. техн. наук, доцент Д.В. Болдырев*

Отв. редактор *канд. техн. наук, доцент А.А. Евдокимов*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для исследования процессов, протекающих в системе, необходимо получить ее математическое описание, которое может быть аналитическим (в виде уравнений), графическим (в виде графиков) или графо-аналитическим (в виде структурных схем и графов). При отсутствии таких навыков эффективно моделировать и конструировать системы невозможно.

В методических указаниях приведены сведения о порядке получения математического описания систем и о правилах создания математических моделей типовых технологических объектов.

ТЕМА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ

1.1 Уравнения систем

Уравнение системы отражает зависимость между ее входными и выходными сигналами. Оно является **математической моделью**, и при его получении всегда делаются какие-либо допущения о характере протекающих в системе процессов. Это объясняется противоречивыми требованиями к модели: с одной стороны — максимальная простота, с другой — возможно более полное отражение свойств оригинала. В зависимости от цели исследования математические модели одной и той же системы могут (а в ряде случаев и должны) быть различными.

Если система сложная, то ее математическое описание получается в результате **объединения** математических моделей составляющих ее элементов.

Если свойства системы меняются только во времени, ее параметры считают **сосредоточенными**. Если эти свойства меняются во времени и в пространстве, параметры системы считаются **распределенными**.

Если система имеет один выходной сигнал, ее считают **одномерной**. Если таких сигналов несколько (более одного), система считается **многомерной** (многосвязной). Соответственно изменяется ее математическое описание.

С математической точки зрения преобразование **вектора входных воздействий *X(t)*** в **вектор состояния или фазовый вектор *Y(t)*** в течение времени ***t*** соответствует заданию функции

$$\boldsymbol{F\left[t, Y(t), X(t)\right] = 0}, \tag{1.1}$$

где

$$\boldsymbol{Y(t)} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X(t)} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F(t)} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Необходимо, чтобы выполнялись условия: $\boldsymbol{X(t) \in X^*}$ и $\boldsymbol{Y(t) \in Y^*}$ ($\boldsymbol{X^*}$ и $\boldsymbol{Y^*}$ — допустимые множества входных и выходных сигналов).

Если функция (1.1) определяет линейную зависимость выходных параметров от входных, система считается **линейной**. В противном случае ее считают **нелинейной**. Если в уравнение (1.1) явно не входит значение времени, систему считают **стационарной** (ее свойства с течением времени не меняются). В противном случае система является **нестационарной**.

Если функция (1.1) определяет изменение ***X(t)*** и ***Y(t)*** в зависимости от времени, она называется **динамической характеристикой**. Ее обычно представляют в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (для систем с сосредоточенными параметрами) или дифференциальных уравнений в частных производных (для систем с распределенными параметрами).

В инженерной практике уравнения динамики часто представляют **в нормальной форме** (или в форме Коши), для чего их разрешают относительно старших производных по времени. Для системы, описываемой дифференциальными уравнениями первого порядка, нормальная форма имеет вид:

$$\dot{Y}(t) = \Phi\left[t, Y(t), X(t)\right], \quad Y(0) = Y_0, \tag{1.2}$$

где $\dot{Y}(t)$ — вектор производных функции $Y(t)$ по времени,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t, Y(t), X(t)) \\ \ldots \\ \phi_n(t, Y(t), X(t)) \end{bmatrix}.$$

Выражение (1.2) называется **уравнением состояния системы** в матричной форме.

Если уравнение (1.1) определяет изменение входящих в него переменных вне зависимости от времени, его называют **статической характеристикой**. Эта характеристика определяет поведение системы в **установившемся режиме** при $t \to \infty$, когда $Y(t) = Y(\infty) = const$, $X(t) = X(\infty) = const$:

$$F\left[\infty, Y(\infty), X(\infty)\right] = 0. \tag{1.3}$$

Статическая характеристика естественным образом получается из уравнения динамики путем приравнивания нулю всех входящих в него производных по времени.

Для одномерных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высших порядков, динамические и статические характеристики имеют вид:

$$F\left[t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots\right] = 0, \tag{1.4}$$

$$F\left[\infty, y(\infty), 0, 0, \ldots x(\infty), 0, 0, \ldots\right] = 0, \tag{1.5}$$

где $\dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots$ — производные соответствующих порядков по времени от функций $y(t)$ и $x(t)$.

Из формулы (1.4) можно получить систему уравнений состояния (1.2) путем замены переменных:

$$y_1(t)=y(t),\quad y_2(t)=\dot{y}(t)=\dot{y}_1,\quad y_3(t)=\ddot{y}(t)=\dot{y}_2(t),..$$
$$x_1(t)=x(t),\quad x_2(t)=\dot{x}(t)=\dot{x}_1,\quad x_3(t)=\ddot{x}(t)=\dot{x}_2(t),.. \tag{1.6}$$

Пример: *получить статическую характеристику и уравнения состояния системы по следующему уравнению динамики (коэффициенты* $\boldsymbol{a_2(t)}$*,* $\boldsymbol{a_1(t)}$*,* $\boldsymbol{k(t)}$ *— функции времени):*

$$a_2(t)\cdot\ddot{y}(t)+a_1(t)\cdot\dot{y}(t)+y(t)=k(t)\cdot x(t).$$

Статическая характеристика:

$$y(t)=k(t)\cdot x(t).$$

Замена переменных:

$$y_1(t)=y(t),\quad y_2(t)=\dot{y}(t),\quad x_1(t)=x(t).$$

Система уравнений состояния (второе уравнение получается из динамической характеристики после замены переменных):

$$\begin{cases}\dot{y}_1(t)=y_2(t)\\ \dot{y}_2(t)=\dfrac{1}{a_2(t)}\cdot\left[k(t)\cdot x_1(t)-a_1(t)\cdot y_2(t)-y_1(t)\right]\end{cases}$$

• • •

1.2 Линеаризация уравнений систем

Уравнения реальных систем обычно являются нелинейными, что затрудняет их исследование. Однако в большинстве случаев их можно заменить приближенными линейными зависимостями, т. е. **линеаризовать**. При этом должны соблюдаться условия:

- в системе поддерживается некоторый **номинальный (рабочий) режим**, параметры которого $\tilde{Y}(t)$ и $\tilde{X}(t)$ известны; траектория невозмущенного движения системы (называемая базовой) определяется уравнением:

$$\dot{\tilde{Y}}(t) = \Phi\left[t, \tilde{Y}(t), \tilde{X}(t)\right], \quad \tilde{Y}(0) = \tilde{Y}_0; \qquad (1.7)$$

- отклонения входных и величин от номинальных значений **достаточно малы** (что, вообще говоря, требует предварительного обоснования);
- динамические и статические характеристики системы в окрестности рабочей точки имеют **непрерывные производные** по всем своим аргументам.

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, линеаризация недопустима.

Если система состоит из нескольких элементов с известным математическим описанием, то необходимо линеаризовать характеристики каждого из них.

Приведение к линейному виду уравнений состояния (1.2) проводится путем разложения их правых частей в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки $\left\langle \tilde{X}(t), \tilde{Y}(t) \right\rangle$ и исключения из разложения всех производных со степенями производных выше первой:

$$\begin{aligned} \Phi\left[t, Y(t), X(t)\right] \approx \Phi\left[t, \tilde{Y}(t), \tilde{X}(t)\right] & + \\ + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right] \cdot \left(Y(t) - \tilde{Y}(t)\right) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right] \cdot \left(X(t) - \tilde{X}(t)\right). & \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Все частные производные рассчитываются **при номинальных значениях параметров**.

С учетом уравнений (1.7) и (1.8) из формулы (1.2) следует:

$$\Delta \dot{Y}(t) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right] \cdot \Delta Y(t) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right] \cdot \Delta X(t), \qquad (1.9)$$

где $\Delta \dot{Y}(t)$, $\Delta Y(t)$, $\Delta X(t)$ — отклонения параметров от их номинальных значений.

Используя матричные обозначения, можно получить линеаризованное уравнение состояния в отклонениях:

$$\Delta\dot{Y}(t) = A(t)\cdot\Delta Y(t) + B(t)\cdot\Delta X(t), \tag{1.10}$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ рассчитываются при номинальных значениях параметров. Для стационарных систем это — константы.

Пример: *линеаризовать уравнения состояния системы в рабочей точке* $\left\langle \tilde{X}(t), \tilde{Y}(t) \right\rangle$ *и представить их в матричной форме.*

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \sqrt{y_1(t)} + \sqrt{y_2(t)} + x_1^2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \sqrt{y_1(t)} - \sqrt{y_2(t)} - x_2^2(t) \end{cases}.$$

Линеаризованные уравнения состояния:

$$\begin{cases} \Delta\dot{y}_1 = \left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_1}}\right]\cdot\Delta y_1 + \left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_2}}\right]\cdot\Delta y_2 + \left[2\cdot\tilde{x}_1\right]\cdot\Delta x_1 \\ \Delta\dot{y}_2 = \left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_1}}\right]\cdot\Delta y_1 - \left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_2}}\right]\cdot\Delta y_2 - \left[2\cdot\tilde{x}_2\right]\cdot\Delta x_2 \end{cases}$$

Уравнения состояния в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{y}_1 \\ \Delta\dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_1}} & \frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_2}} \\ \frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_1}} & -\frac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_2}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot\tilde{x}_1 & 0 \\ 0 & -2\cdot\tilde{x}_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_1}} & \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_2}}\\ \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_1}} & -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\tilde{y}_2}}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\cdot\tilde{x}_1 & 0\\ 0 & -2\cdot\tilde{x}_2\end{bmatrix}.$$

• • •

Отличия уравнения (1.9) от исходной характеристики (1.2) следующие:

- оно является **приближенным**, так как в процессе его получения не учитывались производные высших порядков;
- оно является линейным не по отношению к $X(t)$ и $Y(t)$, а по отношению **к их отклонениям** от номинальных значений.

Линеаризация характеристик одномерных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высших порядков, проводится по аналогичной схеме. Разложение уравнения (1.4) в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки $(\tilde{y},\tilde{\dot{y}},\tilde{\ddot{y}},..\tilde{x},\tilde{\dot{x}},\tilde{\ddot{x}},..)$, в котором оставлены только производные первого порядка, имеет вид:

$$\begin{aligned}&F(y,\dot{y},\ddot{y},..x,\dot{x},\ddot{x},..)\approx F(\tilde{y},\tilde{\dot{y}},\tilde{\ddot{y}},..\tilde{x},\tilde{\dot{x}},\tilde{\ddot{x}},..)+\\&+\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]\cdot(y-\tilde{y})+\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right]\cdot(\dot{y}-\tilde{\dot{y}})+\left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right]\cdot(\ddot{y}-\tilde{\ddot{y}})+\ldots\\&+\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]\cdot(x-\tilde{x})+\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\cdot(\dot{x}-\tilde{\dot{x}})+\left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right]\cdot(\ddot{x}-\tilde{\ddot{x}})+\ldots\end{aligned}\qquad(1.11)$$

Все частные производные рассчитываются **при номинальных значениях параметров**. Считая, что в режиме, близком к рабочему

$$F(y,\dot{y},\ddot{y},..x,\dot{x},\ddot{x},..)\approx F(\tilde{y},\tilde{\dot{y}},\tilde{\ddot{y}},..\tilde{x},\tilde{\dot{x}},\tilde{\ddot{x}},..),\qquad(1.12)$$

и используя обозначения:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]=a_0,\quad \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right]=a_1,\quad \left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right]=a_2,..$$
$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]=-b_0,\quad \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]=-b_1,\quad \left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right]=-b_2,.. \qquad (1.13)$$

можно получить линеаризованное уравнение динамики:

$$...+a_2\cdot\Delta\ddot{y}+a_1\cdot\Delta\dot{y}+a_0\cdot\Delta y=...+b_2\cdot\Delta\ddot{x}+b_1\cdot\Delta\dot{x}+b_0\cdot\Delta x, \qquad (1.14)$$

где $\Delta y=y-\tilde{y},\quad \Delta x=x-\tilde{x},\quad \Delta\dot{y}=\dot{y}-\tilde{\dot{y}},\quad \Delta\dot{x}=\dot{x}-\tilde{\dot{x}},..$ — отклонения фактических значений параметров и их производных по времени от номинальных значений.

Используя обозначения

$$\alpha_0=a_0\cdot\tilde{y},\quad \alpha_1=a_1\cdot\tilde{\dot{y}},\quad \alpha_2=a_2\cdot\tilde{\ddot{y}},..$$
$$\beta_0=b_0\cdot\tilde{x},\quad \beta_1=b_1\cdot\tilde{\dot{x}},\quad \beta_2=b_2\cdot\tilde{\ddot{x}},.. \qquad (1.15)$$

можно получить линеаризованное уравнение динамики **в безразмерной (нормированной) форме**:

$$...+\alpha_2\cdot\delta\ddot{y}+\alpha_1\cdot\delta\dot{y}+\alpha_0\cdot\delta y=...+\beta_2\cdot\delta\ddot{x}+\beta_1\cdot\delta\dot{x}+\beta_0\cdot\delta x, \qquad (1.16)$$

где $\delta y=\Delta y/\tilde{y},\delta x=\Delta x/\tilde{x},\delta\dot{y}=\Delta\dot{y}/\tilde{\dot{y}},\delta\dot{x}=\Delta\dot{x}/\tilde{\dot{x}},..$ — отклонения фактических значений параметров и их производных по времени, выраженные в долях от номинальных значений.

Пример*: линеаризовать стационарное уравнение динамики в рабочей точке* $(\tilde{y},\tilde{\dot{y}},\tilde{x})$*:*

$\dot{y}^2(t)+y(t)+\sqrt{y(t)}=e^{x(t)}$.

Функция и ее частные производные в рабочей точке:

$F(y,\dot{y},x)=\dot{y}^2(t)+y(t)+\sqrt{y(t)}-e^{x(t)}=0,$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 2 \cdot \tilde{\dot{y}} = a_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tilde{y}}} = a_0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -e^{\tilde{x}} = -b_0.$$

Линеаризованное уравнение динамики:

$$a_1 \cdot \Delta\dot{y}(t) + a_0 \cdot \Delta y(t) = b_0 \cdot \Delta x(t).$$

● ● ●

1.3 Передаточные функции систем

Пусть $p \equiv d/dt$ — оператор однократного дифференцирования. Тогда $p^k \equiv d^k/dt^k$ можно рассматривать как алгебраический сомножитель, а выражение вида $p^k \cdot x(t) \equiv d^k x(t)/dt^k$ — как произведение, не обладающее свойством коммутативности. Опустив знак приращения Δ, уравнение (1.14) можно переписать в операторной форме:

$$(\ldots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (\ldots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot x(t), \quad (1.17)$$

$$A(p) \cdot y(t) = B(p) \cdot x(t), \quad (1.18)$$

где $A(p)$ — собственный операторный полином, $B(p)$ — операторный полином входного воздействия. Отношение

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad (1.19)$$

называется **передаточной функцией системы в операторной форме**.

Передаточная функция (1.19) считается **правильной**, если порядок полинома $A(p)$ не меньше порядка $B(p)$. Передаточная функция считается **строго правильной**, если порядок полинома $A(p)$ больше порядка $B(p)$.

Используя теорему о дифференцировании оригинала [2], при нулевых начальных условиях уравнение (1.14) можно переписать в изображениях по Лапласу:

$$(\ldots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0) \cdot Y(s) = (\ldots + b_1 \cdot s + b_0) \cdot X(s), \quad (1.20)$$

$$A(s) \cdot Y(s) = B(s) \cdot X(s). \quad (1.21)$$

Отношение изображения выходной величины $Y(s)$ к изображению величины $X(s)$ при нулевых начальных условиях

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.22)$$

называется **передаточной функцией системы в изображениях по Лапласу**.

Несмотря на внешнее сходство, между выражениями (1.19) и (1.22) существуют принципиальные различия.

1) Передаточная функция (1.22) — не символическое, а **алгебраическое** выражение, значение которого полностью определяет реакцию системы на известное входное воздействие.

2) Использовать передаточную функцию (1.22) для математического описания систем допустимо только при **нулевых начальных условиях**.

3) Использовать передаточную функцию (1.22) допустимо только для математического описания **стационарных систем** (у которых коэффициенты a_i и b_i в уравнении (1.14) не зависят от времени).

Передаточные функции принято записывать так, чтобы коэффициент при выходной величине был равен единице, а коэффициент при входной величине являлся общим множителем для всех слагаемых числителя:

$$W(s) = \frac{k \cdot (\ldots + \tau_2 \cdot s^2 + \tau_1 \cdot s + 1)}{\ldots + T_2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1}, \quad (1.23)$$

где k — коэффициент усиления системы (передаточный коэффициент), T_i и τ_i — постоянные времени (они имеют размерность времени в степени, равной порядку s).

Для многомерных систем выражения, подобные (1.18) и (1.21), являются матричными. В операторной форме:

$$A(p)\cdot Y(t)=B(p)\cdot X(t), \qquad (1.24)$$

где

$$A(p)=\begin{bmatrix} a_{11}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{bmatrix}, \quad Y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix},$$

$$B(p)=\begin{bmatrix} b_{11}(p) & \dots & b_{1m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(p) & \dots & b_{nm}(p) \end{bmatrix}, \quad X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_m(t) \end{bmatrix}.$$

В изображениях по Лапласу:

$$A(s)\cdot Y(s)=B(s)\cdot X(s), \qquad (1.25)$$

где

$$A(s)=\begin{bmatrix} a_{11}(s) & \dots & a_{1n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(s) & \dots & a_{nn}(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s)=\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \dots \\ Y_n(s) \end{bmatrix},$$

$$B(s)=\begin{bmatrix} b_{11}(s) & \dots & b_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(s) & \dots & b_{nm}(s) \end{bmatrix}, \quad X(s)=\begin{bmatrix} X_1(s) \\ \dots \\ X_m(s) \end{bmatrix}.$$

Из (1.25) можно найти:

$$Y(s)=A^{-1}(s)\cdot B(s)\cdot X(s)=W(s)\cdot X(s). \qquad (1.26)$$

Матрица

$$W(s)=\begin{bmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}(s) & \dots & W_{nm}(s) \end{bmatrix}$$

называется **передаточной матрицей** системы. Каждый элемент $W_{ij}(s)$ является передаточной функцией по каналу «*вход* $j \to$ *выход* i». Соответственно:

$$Y_i(s) = W_{ij}(s) \cdot X_j(s), \quad i = 1...n, \quad j = 1...m. \tag{1.27}$$

Пример: *найти передаточную матрицу многомерной системы, уравнения динамики которой имеют вид:*

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 + y_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{y}_1 + y_1 + \dot{y}_2 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Система уравнений динамики в изображениях по Лапласу (при нулевых начальных условиях):

$$\begin{cases} (s^2 + 1) \cdot Y_1(s) + Y_2(s) = X_1(s) + X_2(s) \\ (s + 1) \cdot Y_1(s) + s \cdot Y_2(s) = X_2(s) - X_1(s) \end{cases}$$

Система уравнений динамики в матричной форме:

$$A(s) \cdot Y(s) = B(s) \cdot X(s),$$

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & 1 \\ s + 1 & s \end{bmatrix}, \quad B(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}(s) = \frac{1}{s^3 - 1} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ -s - 1 & s^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Передаточная матрица системы:

$$W(s) = A^{-1}(s) \cdot B(s) = \frac{1}{s^3 - 1} \cdot \begin{bmatrix} s + 1 & s - 1 \\ -s^2 - s - 2 & s \cdot (s - 1) \end{bmatrix}.$$

• • •

Если на линейную систему (одномерную или многомерную) действуют несколько входных сигналов, то **по принципу суперпо-**

зиции можно получить ее передаточные функции по каждому из каналов. Так в уравнении

$$Y(s) = W_x(s) \cdot X(s) + W_g(s) \cdot G(s) \tag{1.28}$$

величина $W_x(s)$ является передаточной функцией по каналу «$X \to Y$», а $W_g(s)$ — передаточной функцией по каналу «$G \to Y$».

По передаточной функции можно получить уравнения состояния. Правильная передаточная функция вида

$$W(p) = \frac{a_n \cdot p^n + ... + a_1 \cdot p + a_0}{b_n \cdot p^n + ... + b_1 \cdot p + b_0} \tag{1.29}$$

является операторным представлением линейного дифференциального уравнения

$$a_n \cdot y^{(n)} + ... + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_n \cdot x^{(n)} + ... + b_1 \cdot \dot{x} + b_0 \cdot x, \tag{1.30}$$

где $a_n \neq 0$. Если какие-либо слагаемые отсутствуют, то соответствующие коэффициенты a_i и b_i заменяются нулями.

При переходе от дифференциального уравнения (1.30) порядка n к системе дифференциальных уравнений первого порядка необходимо учесть влияние производных от входного воздействия. Это достигается в ходе замены переменных [5].

$$\begin{aligned}
z_n &= a_n \cdot y - b_n \cdot x, \\
z_{n-1} &= \dot{z}_n + a_{n-1} \cdot y - b_{n-1} \cdot x = \\
&= [a_n \cdot \dot{y} + a_{n-1} \cdot y] - [b_n \cdot \dot{x} + b_{n-1} \cdot x], \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \\
z_1 &= \dot{z}_2 + a_1 \cdot y - b_1 \cdot x = \\
&= \left[a_n \cdot y^{(n-1)} + ... + a_1 \cdot y\right] - \left[b_n \cdot x^{(n-1)} + ... + b_1 \cdot x\right].
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Из последнего уравнения и (1.30) можно получить:

$$\dot{z}_1 + a_0 \cdot y - b_0 \cdot x = \\ = \left[a_n \cdot y^{(n)} + \ldots + a_0 \cdot y\right] - \left[b_n \cdot x^{(n)} + \ldots + b_0 \cdot x\right] = 0. \tag{1.32}$$

Из уравнений (1.31) и (1.32) находятся уравнения состояния, соответствующие динамической характеристике (1.30):

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -a_0 \cdot y + b_0 \cdot x \\ \dot{z}_2 = z_1 - a_1 \cdot y + b_1 \cdot x \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dot{z}_n = z_{n-1} - a_{n-1} \cdot y + b_{n-1} \cdot x \end{cases} \tag{1.33}$$

$$y = \frac{1}{a_n} \cdot \left[z_n + b_n \cdot x\right]$$

Система (1.33) решается при нулевых начальных условиях относительно переменной z_n, по значению которой вычисляется выходной параметр y.

***Пример**: получить систему уравнения состояния по уравнению динамики:*

$$2 \cdot \dddot{y} + 3 \cdot \ddot{y} + 4 \cdot \dot{y} + y = 2 \cdot \ddot{x} + 3 \cdot \dot{x} + x.$$

Выходной параметр:

$$y = \frac{1}{a_3} \cdot \left[z_3 + b_3 \cdot x\right] = \frac{1}{2} \cdot z_3.$$

*Уравнения состояния (с учетом подстановки **y**):*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{1}{2} \cdot z_3 + x \\ \dot{z}_2 = z_1 - 2 \cdot z_3 + 3 \cdot x \\ \dot{z}_3 = z_2 - \frac{3}{2} \cdot z_3 + 2 \cdot x \end{cases}$$

• • •

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТИПОВЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

2.1 Общие правила построения математических моделей

Процесс получения математической модели объекта состоит из следующих этапов.

1. Изучение объекта и протекающих в нем процессов, определение входных и выходных параметров. **Входными** считаются параметры, целенаправленное изменение которых позволяет изменять состояние объекта. Изменение этого состояния отражают **выходные** параметры.

2. Декомпозиция объекта путем его разделения на элементарные блоки и составление структурной схемы объекта.

3. Получение математического описания каждого блока структурной схемы.

В состав математической модели объекта включают:

- **уравнения материального, теплового и энергетического баланса**, составляемые с учетом гидро- и аэродинамики потоков и физических свойств веществ;
- **уравнения элементарных процессов**, протекающих в объекте (процессов тепло- и массопереноса и т. п.);
- теоретические и эмпирические **соотношения между параметрами** объекта;
- **ограничения** на параметры объекта;
- **допущения**, упрощающие математическое описание (например, возможность линеаризации характеристик).

Для построения математических моделей технологических объектов используются:

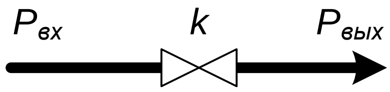
- **алгебраические уравнения** для описания статики объектов с сосредоточенными параметрами;
- **обыкновенные дифференциальные уравнения** для описа-

ния динамики объектов с сосредоточенными параметрами или статики объектов с распределенными параметрами;

- **дифференциальные уравнения в частных производных** для описания динамики объектов с распределенными параметрами;
- **статистические характеристики** для описания объектов со случайной природой.

2.2 Моделирование сужающих устройств

Расход вещества через сужающее устройство (клапан) зависит от **пропускной способности** устройства и **разности давлений** на его входе и выходе.



Объемный расход жидкости через клапан с коэффициентом пропускания $\boldsymbol{k}$ равен:

$$\boldsymbol{Q(k, P_{вх}, P_{вых}) = k \cdot \sqrt{P_{вх} - P_{вых}}}\,. \tag{2.1}$$

Массовый расход газа через клапан с коэффициентом пропускания $\boldsymbol{k}$ равен:

$$\boldsymbol{G(k, P_{вх}, P_{вых}) = \begin{cases} k \cdot \sqrt{\dfrac{P_{вх}^2 - P_{вых}^2}{2}}, & P_{вых} \geq 0.53 \cdot P_{вх} \\ 0.85 \cdot k \cdot P_{вх}, & P_{вых} < 0.53 \cdot P_{вх} \end{cases}} \tag{2.2}$$

Второе уравнение в (2.2) соответствует сверхкритическому режиму истечения через сужающее устройство.

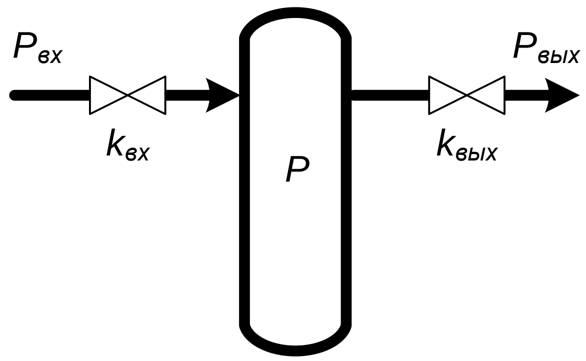
Если $\boldsymbol{P_{вх} < P_{вых}}$., то направление потока **меняется на противоположное**. Формула (2.3) учитывает этот эффект:

$$G(k, P_{вх}, P_{вых}) = \begin{cases} G(k, P_{вх}, P_{вых}), & P_{вх} \ge P_{вых} \\ -G(k, P_{вых}, P_{вх}), & P_{вх} < P_{вых} \end{cases} \quad (2.3)$$

Объемный расход пересчитывается аналогично.

2.3 Моделирование пневматического объекта

В емкости контролируется давление газа P. Подача газа в емкость производится под давлением $P_{вх}$. Отбор из емкости производится в среду с давлением $P_{вых}$.



Входные параметры объекта — $P_{вх}$, $P_{вых}$, $k_{вх}$ и $k_{вых}$.

Выходной параметр — P.

Принятые допущения:

- входные параметры остаются **неизменными** в течение всего времени исследования объекта;
- температура T, при которой протекает процесс, и объем емкости V считаются **постоянными**;
- начальное значение P_0 **известно**.

Основа для расчета — уравнение материального баланса:

$$m_{\Sigma} = m^{+} - m^{-}. \quad (2.4)$$

Зная массовые расходы $G_{вх}$ и $G_{вых}$ через входной и выходной клапаны, можно найти массы поданного и отобранного газа для произвольного момента времени $\boldsymbol{t}$:

$$m^{+} = G_{вх}(k_{вх}, P_{вх}, P) \cdot t, \quad m^{-} = G_{вых}(k_{вых}, P, P_{вых}) \cdot t. \tag{2.5}$$

Масса накопленного в емкости газа может быть найдена по его уравнению состояния (в первом приближении — по уравнению Менделеева-Клапейрона):

$$m_{\Sigma} = \frac{P \cdot V \cdot M}{R \cdot T}, \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{M}$ — мольная масса газа, $\boldsymbol{R}$ — универсальная газовая постоянная.

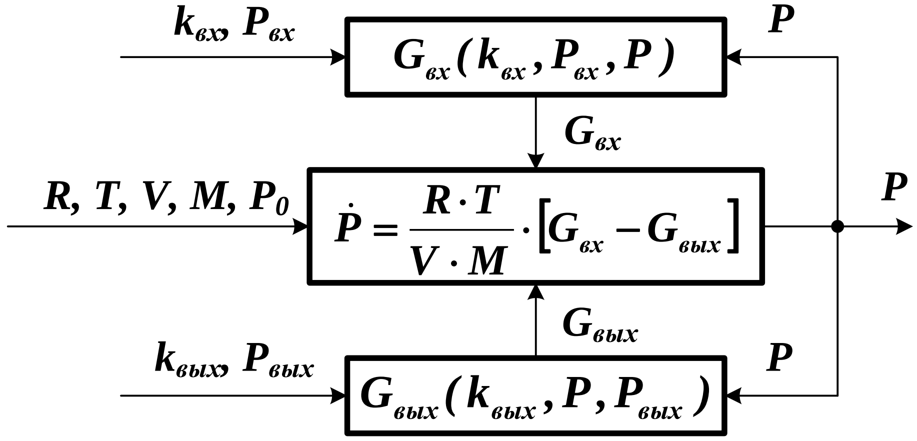
Используя (2.5) и (2.6), из формулы (2.4) можно найти выражение для расчета контролируемого параметра $\boldsymbol{P}$. Дифференцируя его по времени, можно получить динамическую характеристику:

$$\dot{P} = \frac{R \cdot T}{V \cdot M} \cdot \left[G_{вх}(k_{вх}, P_{вх}, P) - G_{вых}(k_{вых}, P, P_{вых})\right]. \tag{2.7}$$

Это уравнение решается при заданном начальном условии $\boldsymbol{P_0}$.

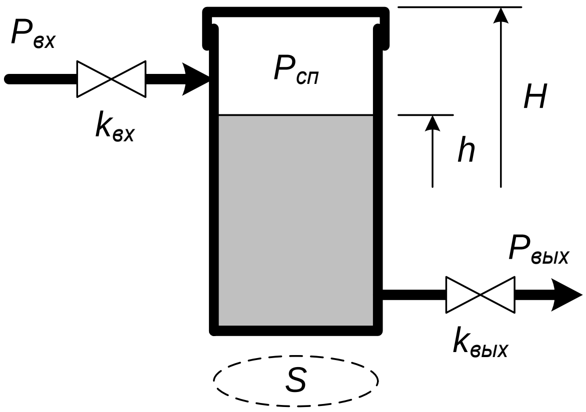
При построении модели необходимо учесть, что при $P > P_{вх}$ или $P_{вых} > P$ по входной или выходной линиям возникают **обратные потоки газа** (см. уравнение (2.3)).

Структурная схема модели содержит три блока, соответствующих входному и выходному клапанам и емкости. Она имеет вид:



2.4 Моделирование гидравлического объекта

В закрытой емкости контролируется уровень жидкости $\boldsymbol{h}$. Подача жидкости в емкость производится под давлением $\boldsymbol{P_{вх}}$. Отбор из емкости производится в среду с давлением $\boldsymbol{P_{вых}}$ под действием гидростатического давления столба жидкости высотой $\boldsymbol{h}$ и давлением на свободную поверхность жидкости газовой подушки $\boldsymbol{P_{сп}}$.



Входные параметры объекта — $\boldsymbol{P_{вх}}$, $\boldsymbol{P_{вых}}$, $\boldsymbol{k_{вх}}$ и $\boldsymbol{k_{вых}}$.

Выходной параметр — $\boldsymbol{h}$.

Принятые допущения:

- входные параметры остаются **неизменными** в течение времени исследования объекта;
- температура $\boldsymbol{T}$, при которой протекает процесс, поперечное сечение $\boldsymbol{S}$ и высота емкости $\boldsymbol{H}$ считаются **постоянными**;
- жидкость является **несжимаемой** (ее плотность постоянна);
- начальные значения $\boldsymbol{h_0}$ и $\boldsymbol{P_{сп0}}$ **известны**.

Для несжимаемой жидкости можно записать соотношение, эквивалентное уравнению материального баланса (2.4):

$$\boldsymbol{V_{\Sigma}} = \boldsymbol{V^{+}} - \boldsymbol{V^{-}}, \qquad (2.8)$$

где $\boldsymbol{V_{\Sigma}} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{h}$ — объем накопленной в емкости жидкости. Объемы поданной и отобранной жидкости для произвольного момента времени $\boldsymbol{t}$ можно определить через их объемные расходы $\boldsymbol{Q_{вх}}$ и $\boldsymbol{Q_{вых}}$:

$$\begin{aligned} V^+ &= Q_{вх}(k_{вх}, P_{вх}, P_{сп}) \cdot t, \\ V^- &= Q_{вых}(k_{вых}, P_{сп} + \gamma \cdot h, P_{вых}) \cdot t. \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $\gamma = \rho \cdot g$ — удельный вес жидкости, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

Величина $\boldsymbol{P_{сп}}$ меняется в процессе функционирования объекта при сжатии (расширении) газовой подушки. Считая этот процесс изотермическим (что примерно соответствует реальной ситуации) и зная объем газовой подушки $\boldsymbol{V'}$, можно найти

$$P_{сп} = P_{сп0} \cdot \frac{V'_0}{V'} = P_{сп0} \cdot \frac{H - h_0}{H - h}. \tag{2.10}$$

После подстановки в (2.8) уравнений (2.9), (2,10) и значения $\boldsymbol{V_\Sigma}$ и дифференцирования (2.8) по времени можно получить динамическую характеристику объекта:

$$\dot{h} = \frac{1}{S} \cdot \left[\begin{array}{c} Q_{вх}(k_{вх}, P_{вх}, P_{сп}) - \\ - Q_{вых}\left(k_{вых}, P_{сп0} \cdot \dfrac{H - h_0}{H - h} + \gamma \cdot h, P_{вых}\right) \end{array} \right]. \tag{2.11}$$

Это уравнение решается при заданном начальном условии $\boldsymbol{h_0}$.

Если емкость **открытая**, то считают, что $\boldsymbol{H \to \infty}$. Величина $\boldsymbol{P_{сп}}$ в этом случае считается постоянной и равной величине **атмосферного давления**.

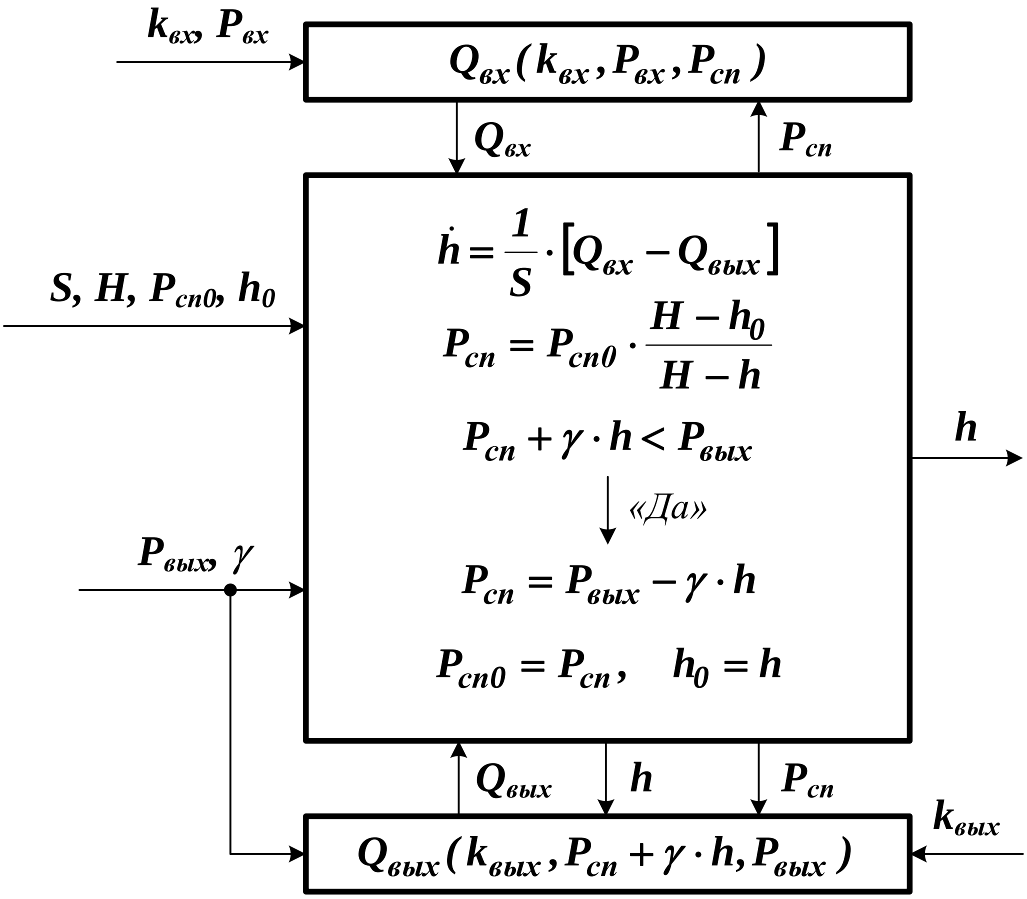
Необходимо учесть следующие факторы:

- если по входной линии производится подача жидкости **в систему емкостей**, то при $P_{вх} < P_{сп}$ $Q_{вых} = 0$;
- если отбор из емкости производится в жидкую среду, то при $P_{сп} + \gamma \cdot h < P_{вых}$ по выходной линии возникает **обратный поток жидкости**;
- если отбор из емкости производится в газообразную среду, то при $P_{сп} + \gamma \cdot h < P_{вых}$ происходит **выравнивание давле-**

ний; можно считать, что исследование объекта при этом начинается заново, поэтому пересчитываются параметры:

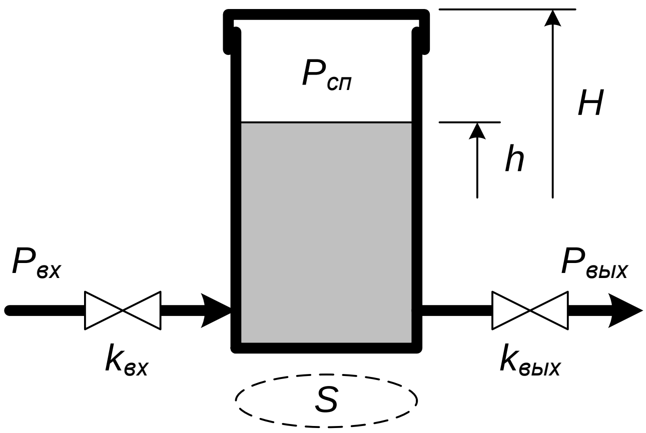
$$\boldsymbol{P_{сп} = P_{вых} - \gamma \cdot h, \quad P_{сп0} = P_{сп}, \quad h_0 = h.} \tag{2.12}$$

Модель содержит три блока, которые соответствуют входному и выходному клапанам и емкости. Структурная схема модели, учитывающей эффект выравнивания давлений, имеет вид:



Если подача в емкость осуществляется снизу («под уровень»), то при расчете $\boldsymbol{Q_{вх}}$ необходимо учитывать противодавление столба жидкости и газовой подушки.

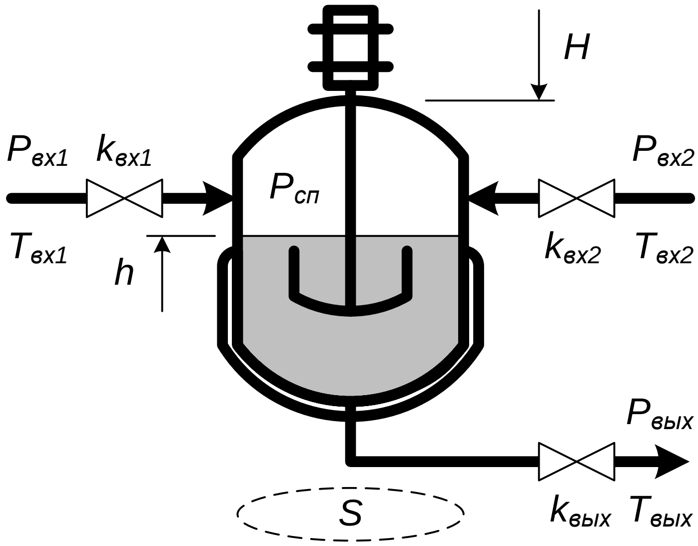
$$\dot{h} = \frac{1}{S} \cdot \begin{bmatrix} Q_{вх}\left(k_{вх}, P_{вх}, P_{сп0} \cdot \dfrac{H - h_0}{H - h} + \gamma \cdot h\right) - \\ - Q_{вых}\left(k_{вых}, P_{сп0} \cdot \dfrac{H - h_0}{H - h} + \gamma \cdot h, P_{вых}\right) \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$



При $\boldsymbol{P_{сп} + \gamma \cdot h > P_{вх}}$ по входной линии возникает **обратный поток жидкости**.

2.5 Моделирование теплового объекта

На выходе теплообменника идеального смешения контролируется температура жидкости $\boldsymbol{T_{вых}}$. Подача теплоносителей с температурами $\boldsymbol{T_{вх1}}$ и $\boldsymbol{T_{вх2}}$ производится под давлениями $\boldsymbol{P_{вх1}}$ и $\boldsymbol{P_{вх2}}$. Отбор из теплообменника производится в среду с давлением $\boldsymbol{P_{вых}}$ под давлением газовой подушки и столба жидкости.



Входные параметры объекта — $\boldsymbol{P_{вх1}}$, $\boldsymbol{T_{вх1}}$, $\boldsymbol{k_{вх1}}$, $\boldsymbol{P_{вх2}}$, $\boldsymbol{T_{вх2}}$, $\boldsymbol{k_{вх2}}$, $\boldsymbol{P_{вых}}$ и $\boldsymbol{k_{вых}}$.

Выходной параметр — $T_{вых}$.

Принятые допущения:

- входные параметры остаются **неизменными** в течение времени исследования объекта;
- геометрические размеры теплообменника — поперечное сечение S и высота H — считаются **постоянными**;
- плотность ρ и удельная теплоемкость c теплоносителей являются **постоянными** и не зависящими от температуры и давления в аппарате (строго говоря, это является очень грубым приближением);
- процесс протекает в условиях **идеального смешения** (теплофизические и термодинамические параметры смеси одинаковы по всему объему теплообменника) **при отсутствии теплообмена с окружающей средой**; температура $T_{вых}$ равна температуре в аппарате;
- начальные значения $T_{вых0}$, h_0 и $P_{сп0}$ известны.

Количество накопленной в емкости теплоты определится по уравнению теплового баланса как разность энтальпий (старое название — «теплосодержание») входных и выходного потоков:

$$W_{\Sigma} = W_1^+ + W_2^+ - W^- . \tag{2.14}$$

Для произвольного момента времени t входящие в уравнение (2.14) составляющие могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned}
W_{\Sigma} &= m_{\Sigma} \cdot c_{вых} \cdot T_{вых} = V_{\Sigma} \cdot \rho_{вых} \cdot c_{вых} \cdot T_{вых} = \\
&= S \cdot h \cdot \rho_{вых} \cdot c_{вых} \cdot T_{вых}, \\
W_1^+ &= m_{вх1} \cdot c_{вх1} \cdot T_{вх1} = Q_{вх1} \cdot \rho_{вх1} \cdot c_{вх1} \cdot T_{вх1} \cdot t, \\
W_2^+ &= m_{вх2} \cdot c_{вх2} \cdot T_{вх2} = Q_{вх2} \cdot \rho_{вх2} \cdot c_{вх2} \cdot T_{вх2} \cdot t, \\
W^- &= m_{вых} \cdot c_{вых} \cdot T_{вых} = Q_{вых} \cdot \rho_{вых} \cdot c_{вых} \cdot T_{вых} \cdot t,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где Q — объемный расход соответствующего теплоносителя.

Плотность и удельная теплоемкость продукта на выходе из теплообменника рассчитывается с учетом объемных долей входных потоков:

$$\rho_{вых} = \frac{Q_{вх1}}{Q_{вх1} + Q_{вх2}} \cdot \rho_{вх1} + \frac{Q_{вх2}}{Q_{вх1} + Q_{вх2}} \cdot \rho_{вх2}, \qquad (2.16)$$

$$c_{вых} = \frac{Q_{вх1}}{Q_{вх1} + Q_{вх2}} \cdot c_{вх1} + \frac{Q_{вх2}}{Q_{вх1} + Q_{вх2}} \cdot c_{вх2}. \qquad (2.17)$$

После подстановки всех значений в (2.14) и дифференцирования его по времени можно получить уравнение для определения $T_{вых}(t)$. Оно должно использоваться совместно с уравнением для гидравлического расчета теплообменника, аналогичным (2.11), поэтому динамическая характеристика представляет собой систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{T}_{вых} = \dfrac{Q_{вх1} \cdot \rho_{вх1} \cdot c_{вх1} \cdot T_{вх1} + Q_{вх2} \cdot \rho_{вх2} \cdot c_{вх2} \cdot T_{вх2}}{S \cdot h \cdot \rho_{вых} \cdot c_{вых}} - \\ \qquad - \dfrac{Q_{вых} \cdot T_{вых}}{S \cdot h} \\ \dot{h} = \dfrac{1}{S} \cdot \left[Q_{вх1} + Q_{вх2} - Q_{вых} \right] \end{cases} \qquad (2.18)$$

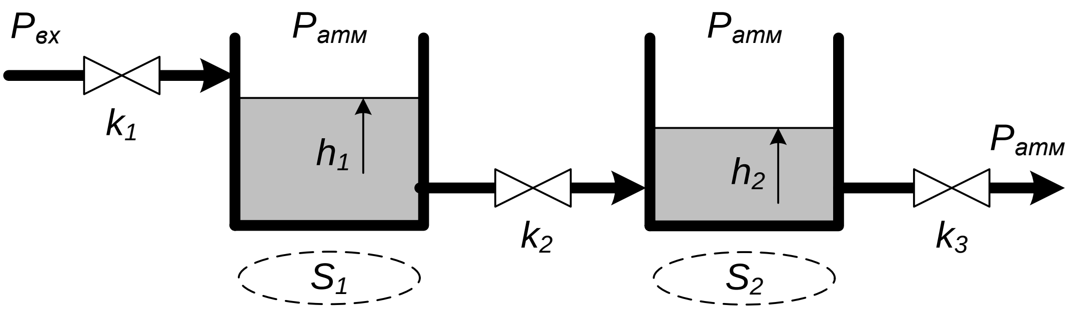
Система (2.18) решается при начальных условиях $T_{вых0}$ и h_0.

При построении модели теплообменника необходимо учитывать, что входящие в нее величины расходов зависят от уровня h либо прямо, как $Q_{вых}$, либо косвенно через $P_{сп}$, как $Q_{вх1}$ и $Q_{вх2}$. Соответственно переменными будут значения $\rho_{вых}$ и $c_{вых}$.

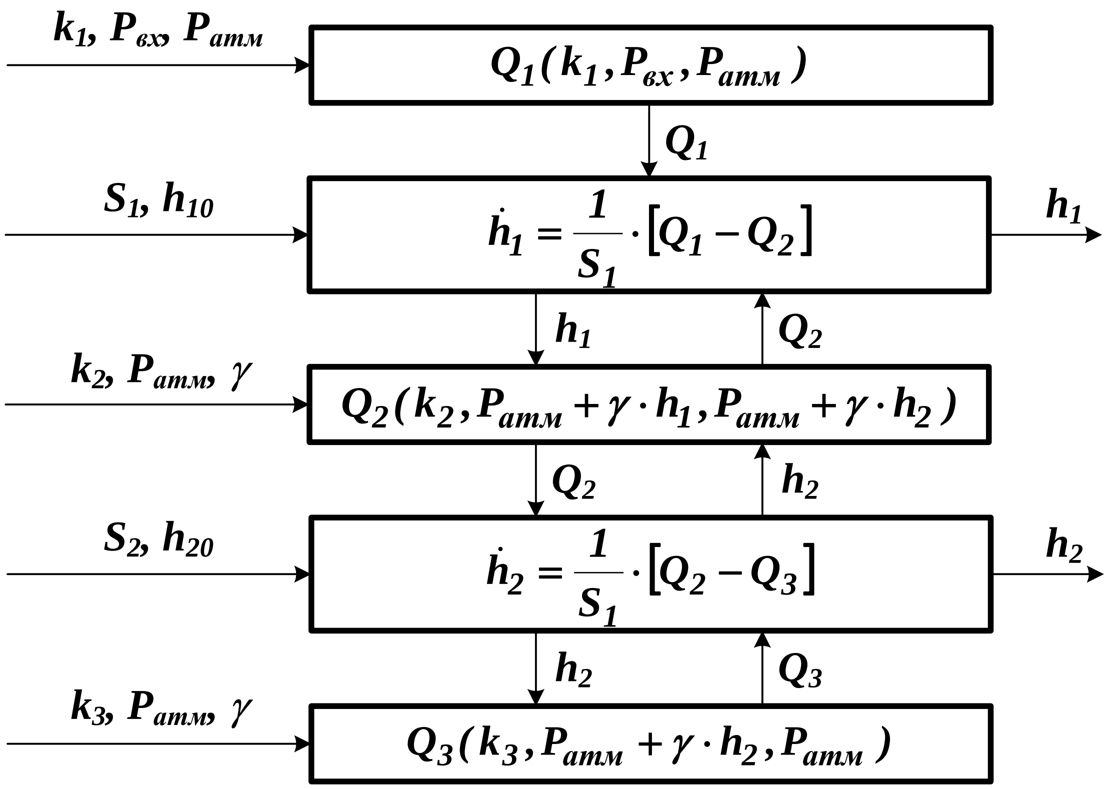
2.6 Пример моделирования технологического объекта

Дана система открытых гидравлических емкостей, отбор из которых производится в газообразную среду с атмосферным давлением. Известными считаются поперечные сечения S_1, S_2 и начальные значения уровней h_{10} и h_{20}. Величины $\dot{h}_{10}$ и $\dot{h}_{20}$ принимаются равными нулю (система находится в равновесии).

В момент времени $t = 0$ давление на входе и коэффициенты пропускания клапанов **скачкообразно изменяются**, принимая значения $P_{вх}$, k_1, k_2 и k_3, что выводит систему из равновесия и становится причиной изменения уровней h_1 и h_2.



Модель системы образуется путем объединения моделей емкостей (см. п. 2.4). Она имеет следующую структуру:



В частном случае, когда $h_{10} > h_{20}$, система уравнений динамики имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \dfrac{1}{S_1}\cdot\left[k_1\cdot\sqrt{P_{вх}-P_{атм}} - k_2\cdot\sqrt{\gamma\cdot(h_1-h_2)}\right] \\ \dot{h}_2 = \dfrac{1}{S_2}\cdot\left[k_2\cdot\sqrt{\gamma\cdot(h_1-h_2)} - k_3\cdot\sqrt{\gamma\cdot h_2}\right] \end{cases} \qquad (2.19)$$

Примечание: *В (2.19)* ***не учитывается*** *возможность обратного потока жидкости по линии, соединяющей емкости.*

Модель (2.19) корректна, если правые части уравнений имеют размерность $\dot{h}$.

$$\left[\frac{1}{S_1}\cdot\left(k_1\cdot\sqrt{P_{вх}-P_{атм}} - k_2\cdot\sqrt{\gamma\cdot(h_1-h_2)}\right)\right] =$$

$$= \frac{м^3\cdot с^{-1}\cdot Па^{-1/2}\cdot\sqrt{Н\cdot м^{-3}\cdot м}}{м^2} = \frac{м}{с},$$

$$\left[\frac{1}{S_2}\cdot\left(k_2\cdot\sqrt{\gamma\cdot(h_1-h_2)} - k_3\cdot\sqrt{\gamma\cdot h_2}\right)\right] = \frac{м}{с}.$$

Система (2.19) решается при заданных начальных условиях одним из численных методов [8].

Нелинейная статическая характеристика образуется из (2.19) путем приравнивания $\dot{h}_1$ и $\dot{h}_2$ нулю. После ее преобразования получается система уравнений для определения установившихся значений уровней в емкостях:

$$\begin{cases} h_{1уст} = \left(\dfrac{k_1^2}{k_2^2} + \dfrac{k_1^2}{k_3^2}\right)\cdot\dfrac{P_{вх}-P_{атм}}{\gamma} \\ h_{2уст} = \dfrac{k_1^2}{k_3^2}\cdot\dfrac{P_{вх}-P_{атм}}{\gamma} \end{cases} \qquad (2.20)$$

Примечание: *система уравнений статики не всегда аналити-*

чески разрешается относительно выходных параметров. В этом случае для их определения используют численные методы [8]. Значения $\boldsymbol{h_{1уст}}$ *и* $\boldsymbol{h_{2уст}}$ *могут также быть найдены путем численного решения системы (2.19) при* $\mathbf{t} \to \infty$*.*

Система уравнений (2.19), записанная в виде

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \Phi_1\left(h_1, h_2, P_{вх}, k_1, k_2, k_3\right) \\ \dot{h}_2 = \Phi_2\left(h_1, h_2, P_{вх}, k_1, k_2, k_3\right) \end{cases} \tag{2.21}$$

может быть линеаризована в точке, соответствующей установившемуся режиму. Значения частных производных по аргументам функций $\boldsymbol{\Phi_1}$ и $\boldsymbol{\Phi_2}$, рассчитанные при значениях $\boldsymbol{h_{1уст}}$, $\boldsymbol{h_{2уст}}$, $\boldsymbol{P_{вх}}$, $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$ и $\boldsymbol{k_3}$, равны:

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial h_1}\right] = -\frac{k_2}{2 \cdot S_1} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{h_{1уст} - h_{2уст}}} = a_{11},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial h_2}\right] = \frac{k_2}{2 \cdot S_1} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{h_{1уст} - h_{2уст}}} = a_{12},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial P_{вх}}\right] = \frac{k_1}{2 \cdot S_1 \cdot \sqrt{P_{вх} - P_{атм}}} = b_{11},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial k_1}\right] = \frac{1}{S_1} \cdot \sqrt{P_{вх} - P_{атм}} = b_{12},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial k_2}\right] = -\frac{1}{S_1} \cdot \sqrt{\gamma \cdot (h_{1уст} - h_{2уст})} = b_{13},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial h_1}\right] = \frac{k_2}{2 \cdot S_2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{h_{1уст} - h_{2уст}}} = a_{21},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial h_2}\right] = -\frac{k_2}{2 \cdot S_2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{h_{1уст} - h_{2уст}}} - \frac{k_3}{2 \cdot S_2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{h_{2уст}}} = a_{22},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial k_2}\right] = \frac{1}{S_2} \cdot \sqrt{\gamma \cdot (h_{1уст} - h_{2уст})} = b_{23},$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial k_3}\right] = -\frac{1}{S_2} \cdot \sqrt{\gamma \cdot h_{2уст}} = b_{24}.$$

Очевидно, что параметры $P_{вх}$, k_1 и h_2 увеличивают значение уровня h_1, а параметр k_1 его уменьшает. Уровень h_2 увеличивается под влиянием h_1 и k_2 и уменьшается под влиянием k_3.

Система линеаризованных уравнений динамики в отклонениях параметров от их номинальных (установившихся) значений имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta\dot{h}_1 = a_{11} \cdot \Delta h_1 + a_{12} \cdot \Delta h_2 + b_{11} \cdot \Delta P_{вх} + b_{12} \cdot \Delta k_1 + b_{13} \cdot \Delta k_2 \\ \Delta\dot{h}_2 = a_{21} \cdot \Delta h_1 + a_{22} \cdot \Delta h_2 + b_{23} \cdot \Delta k_2 + b_{24} \cdot \Delta k_3 \end{cases} \qquad (2.22)$$

Математическая модель (2.22) корректна, если слагаемые в правых частях уравнений имеют размерность $\dot{h}$.

$$[a_{11} \cdot \Delta h_1] = [a_{12} \cdot \Delta h_2] = [a_{21} \cdot \Delta h_1] = [a_{22} \cdot \Delta h_2] =$$
$$= \frac{м^3 \cdot с^{-1} \cdot Па^{-1/2}}{м^2} \cdot \sqrt{\frac{Н \cdot м^{-3}}{м}} \cdot м = \frac{м}{с},$$

$$[b_{11} \cdot \Delta P_{вх}] = \frac{м^3 \cdot с^{-1} \cdot Па^{-1/2}}{м^2 \cdot Па^{1/2}} \cdot Па = \frac{м}{с},$$

$$[b_{12} \cdot \Delta k_1] = \frac{Па^{1/2}}{м^2} \cdot (м^3 \cdot с^{-1} \cdot Па^{-1/2}) = \frac{м}{с},$$

$$[b_{13} \cdot \Delta k_2] = [b_{23} \cdot \Delta k_2] = [b_{24} \cdot \Delta k_3] =$$
$$= \frac{\sqrt{(Н \cdot м^{-3}) \cdot м}}{м^2} \cdot (м^3 \cdot с^{-1} \cdot Па^{-1/2}) = \frac{м}{с}.$$

Система линеаризованных уравнений динамики в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{h}_1 \\ \Delta\dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & 0 \\ b_{13} & b_{23} \\ 0 & b_{24} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_{вх} \\ \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \end{bmatrix}. \qquad (2.23)$$

Опустив знак приращения Δ, систему (2.22) можно переписать в операторной форме и в изображениях по Лапласу (при нулевых начальных условиях):

$$\begin{cases} (p - a_{11}) \cdot h_1(t) - a_{12} \cdot h_2(t) = b_{11} \cdot P_{вх} + b_{12} \cdot k_1 + b_{13} \cdot k_2 \\ (p - a_{22}) \cdot h_2(t) - a_{21} \cdot h_1(t) = b_{23} \cdot k_2 + b_{24} \cdot k_3 \end{cases} \qquad (2.24)$$

$$\begin{cases} (s - a_{11}) \cdot H_1(s) - a_{12} \cdot H_2(s) = \\ \qquad = b_{11} \cdot P_{вх}(s) + b_{12} \cdot k_1(s) + b_{13} \cdot k_2(s) \\ (s - a_{22}) \cdot H_2(s) - a_{21} \cdot H_1(s) = \\ \qquad = b_{23} \cdot k_2(s) + b_{24} \cdot k_3(s) \end{cases} \qquad (2.25)$$

Примечание: *несмотря на то, что значения* $P_{вх}$, k_1, k_2 *и* k_3 *постоянны при* $t > 0$ *, в системе (2.25) учитывается, что в начальный момент времени они изменяются скачкообразно, т. е.*

$$P_{вх}(s) = \frac{\Delta P_{вх}}{s}, \quad k_1(s) = \frac{\Delta k_1}{s}, \quad k_2(s) = \frac{\Delta k_2}{s}, \quad k_3(s) = \frac{\Delta k_3}{s}.$$

Система уравнений (2.25) в изображениях по Лапласу:

$$\begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & 0 \\ b_{13} & b_{23} \\ 0 & b_{24} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} P_{вх}(s) \\ k_1(s) \\ k_2(s) \\ k_3(s) \end{bmatrix}, \qquad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & 0 \\ b_{13} & b_{23} \\ 0 & b_{24} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} P_{вх}(s) \\ k_1(s) \\ k_2(s) \\ k_3(s) \end{bmatrix}, \qquad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = W(s) \cdot \begin{bmatrix} P_{вх}(s) \\ k_1(s) \\ k_2(s) \\ k_3(s) \end{bmatrix}. \qquad (2.28)$$

Коэффициенты передаточной матрицы ***W(s)***, являющиеся передаточными функциями системы по различным каналам ***«вход → выход»***, равны.

$$W_{h_1,P_{вх}}(s) = \frac{b_{11} \cdot s - b_{11} \cdot a_{22}}{s^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})},$$

$$W_{h_1,k_1}(s) = \frac{b_{12} \cdot s - b_{12} \cdot a_{22}}{s^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})},$$

$$W_{h_1,k_2}(s) = \frac{b_{13} \cdot s - (b_{13} \cdot a_{22} - b_{23} \cdot a_{12})}{s^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})},$$

$$W_{h_1,k_3}(s) = \frac{b_{24} \cdot a_{12}}{s^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})},$$

$$W_{h_2,P_{вх}}(s) = \frac{b_{11} \cdot a_{21}}{s^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})},$$

$$W_{h_2,k_1}(s) = \frac{b_{12} \cdot a_{21}}{s^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})},$$

$$W_{h_2,k_2}(s) = \frac{b_{23} \cdot s - (b_{23} \cdot a_{11} - b_{13} \cdot a_{21})}{s^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot s + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})},$$

$$W_{h_2,k_3}(s)=\frac{b_{24}\cdot s-b_{24}\cdot a_{11}}{s^2-(a_{11}+a_{22})\cdot s+(a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})}.$$

3 ТРЕБОВАНИЯ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

При выполнении домашнего задания студент должен:

- изучить правила построения математических моделей технологических систем;
- изучить правила линеаризации математических моделей;
- получить нелинейную математическую модель системы с заданной структурой, включающую динамическую и статическую характеристики; путем проверки размерности параметров доказать корректность модели; построить структурную схему модели; исследовать поведение системы в динамическом и статическом режимах;
- линеаризовать полученную модель в точке, соответствующей установившемуся режиму системы; путем проверки размерности параметров доказать корректность линеаризованной модели; с помощью линеаризованной модели исследовать поведение в динамическом и статическом режимах;
- получить передаточные функции системы по всем каналам.

Домашнее задание выполняется по варианту, указанному преподавателем. Для каждой подзадачи приводится ее условие, содержательные рассуждения, определяющие порядок решения, вывод конечных закономерностей, анализ полученных результатов. Достоверность решения необходимо подтвердить расчётами на компьютере с использованием соответствующих программных средств (***MathCAD***, ***MatLab***).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что считается математической моделью системы? Как она представляется в общем виде?
2. В чем отличия моделей одномерных и многомерных систем, линейных и нелинейных систем, стационарных и нестационарных систем, систем с сосредоточенными и с распределенными параметрами?
3. Что считается динамической и статической характеристикой системы? Что такое уравнения состояния системы?
4. При каких условиях допустима линеаризация уравнений систем? Каковы особенности линеаризованных характеристик?
5. По каким правилам выполняется линеаризация уравнений систем?
6. Что такое передаточная функция системы? Как она получается в операторной форме и в изображениях по Лапласу? В чем отличия передаточных функций в операторной форме и в изображениях по Лапласу?
7. Как получаются уравнения состояния системы по ее передаточной функции?
8. По каким правилам строятся математические модели технологических объектов?
9. Как строятся модели типовых технологических объектов?

ЛИТЕРАТУРА

Перечень основной литературы:

1. Губарь Ю.В. Введение в математическое моделирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / Губарь Ю.В. — Электрон. текстовые данные. — М. : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 178 с.

— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/101993.html. — ЭБС «IPRbooks».

2. Лещева О.В. Математическое моделирование производственных процессов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Лещева О.В. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Вузовское образование, 2021. — 208 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/102239.html. — ЭБС «IPRbooks».

3. Казиев В.М. Введение в анализ, синтез и моделирование систем [Электронный ресурс] : учебное пособие/ Казиев В.М. — Электрон. текстовые данные. — М., Саратов : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 270 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/89425.html. — ЭБС «IPRbooks».

Перечень дополнительной литературы:

1. Боев В.Д. Компьютерное моделирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / Боев В.Д., Сыпченко Р.П. — Электрон. текстовые данные. — М. : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 517 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/102015.html. — ЭБС «IPRbooks».

2. Васильков Ю.В. Математическое моделирование объектов и систем автоматического управления [Электронный ресурс] : учебное пособие / Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. — Электрон. текстовые данные. — М., Вологда : Инфра-Инженерия, 2020. — 428 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/98416.html. — ЭБС «IPRbooks».

3. Ефромеева Е.В. Имитационное моделирование: основы практического применения в среде AnyLogic [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ефромеева Е.В., Ефромеев Н.М. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Вузовское образование, 2020. — 120 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/86701.html. — ЭБС «IPRbooks».

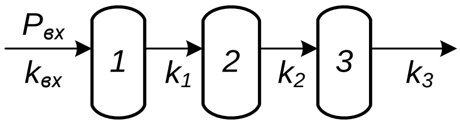
4. Фомин В.Г. Математическое моделирование в системе MathCAD [Электронный ресурс] : учебное пособие / Фомин В.Г. —

Электрон. текстовые данные. — Саратов : Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, ЭБС АСВ, 2020. — 80 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/108693.html. — ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Исследовать поведение системы пневматических емкостей. Найти зависимости давлений в каждой емкости и массовых расходов по каждой линии от времени. Найти зависимость давления в каждой емкости от $\boldsymbol{P_{вх}}$ в установившемся режиме.

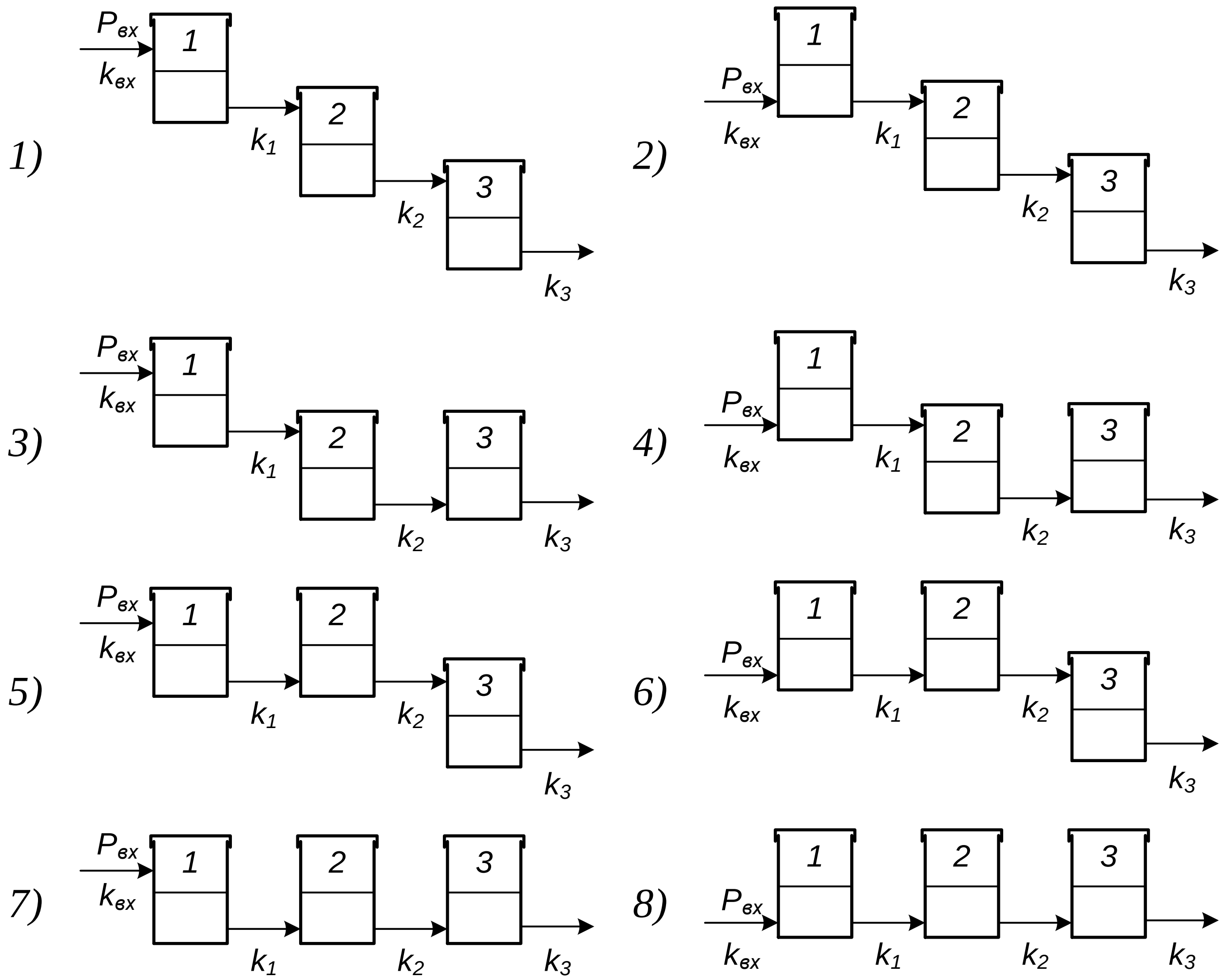


Считать, что сброс газа производится в атмосферу ($\boldsymbol{P_{атм} = 0{,}1}$ ***МПа***). Для расчетов принять $\boldsymbol{R = 8314}$ ***Дж/(кмоль·К)***, $\boldsymbol{T = 293{,}15}$ ***К***, $\boldsymbol{M = 28{,}9}$ ***кг/кмоль*** (для воздуха). Вариант задания выбрать из таблицы.

№	$P_{вх}$, МПа	P_0, МПа			V, м^3			$k \cdot 10^6$, кг·с$^{-1}$·МПа$^{-1}$			
		1	2	3	1	2	3	вх	1	2	3
1	0,5	0,3	0,2	0,4	1	1	1	2	1	1	3
2	0,3	0,1	0,2	0,4	2	1	4	1	2	1	2
3	0,2	0,2	0,5	0,3	3	2	2	3	1	2	1
4	0,4	0,3	0,4	0,1	4	2	3	1	1	2	2
5	0,6	0,5	0,4	0,2	4	3	3	1	2	3	2
6	0,4	0,4	0,4	0,4	3	3	2	2	3	1	3
7	0,3	0,1	0,2	0,2	2	4	4	3	1	2	1
8	0,5	0,3	0,3	0,2	1	4	1	2	1	3	2
9	0,4	0,4	0,2	0,3	2	3	2	1	2	2	1
10	0,3	0,5	0,1	0,4	3	2	4	2	1	1	3

Примечание: *запись вида* $\boldsymbol{k \cdot 10^6 = 2}$ ***кг·с$^{-1}$·МПа$^{-1}$*** *означает, что значение* $\boldsymbol{k = 2 \cdot 10^{-6}}$ ***кг·с$^{-1}$·МПа$^{-1}$***.

Задача 2. Исследовать поведение системы гидравлических емкостей. Найти зависимости уровней в каждой емкости и объемных расходов по каждой линии от времени. Найти зависимость уровней в каждой емкости от $\boldsymbol{P_{вх}}$ в установившемся режиме. Варианты схем даны ниже.

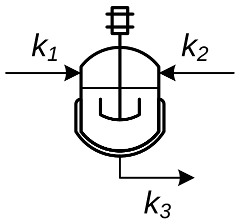


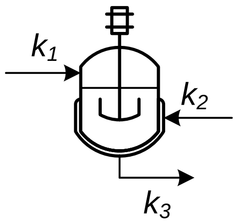
Считать, что сброс жидкости производится в атмосферу ($\boldsymbol{P_{атм} = 0,1}$ МПа). Для расчетов принять $\boldsymbol{\rho = 1000}$ ***кг/м³*** (для воды), $\boldsymbol{g = 9,80665}$ ***м/с²***. Гидростатическое давление $\boldsymbol{\gamma \cdot h}$ выражать в мегапаскалях. Вариант задания выбрать из таблицы.

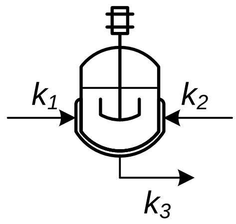
Таблица — Варианты заданий к задаче ***2***

№	схема	$P_{вх}$, МПа	$P_{сп0}$, МПа			h_0, м			H, м			S, $м^2$			k, $м^3 \cdot с^{-1} \cdot МПа^{-1/2}$			
			1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	вх	1	2	3
1	1	0,15	0,10	0,11	0,12	2	5	4	6	7	8	5	2	3	1,0	0,8	1,2	1,3
2	2	0,20	0,06	0,10	0,09	7	3	5	8	9	6	4	3	5	1,1	0,9	1,2	0,7
3	3	0,35	0,09	0,21	0,08	5	5	5	7	8	8	3	4	4	0,9	1,0	1,1	1,2
4	4	0,25	0,11	0,10	0,12	1	4	5	9	6	7	5	4	2	1,2	1,1	1,1	0,8
5	5	0,40	0,07	0,10	0,17	5	7	3	6	9	8	4	3	3	0,8	1,2	1,0	1,1
6	6	0,30	0,20	0,12	0,08	4	5	2	7	7	8	3	2	5	1,1	1,2	1,0	0,9
7	7	0,20	0,50	0,04	0,27	6	4	5	8	8	8	5	2	4	0,9	1,1	0,9	1,0
8	8	0,35	0,10	0,12	0,09	5	6	5	7	9	6	4	3	2	1,0	1,0	0,9	1,0
9	1	0,30	0,10	0,09	0,12	7	6	5	9	8	8	3	4	3	1,0	0,8	0,8	0,9
10	2	0,40	0,08	0,09	0,10	7	5	6	8	7	8	5	4	5	1,1	0,7	0,8	1,1
11	3	0,25	0,20	0,19	0,15	5	5	4	6	6	9	4	3	4	0,9	0,8	0,7	0,8
12	4	0,50	0,30	0,25	0,15	4	5	6	7	8	7	3	2	2	1,2	0,9	0,7	1,2
13	5	0,10	0,07	0,08	0,09	8	7	6	9	9	9	5	2	3	0,8	1,0	1,2	0,7
14	6	0,20	0,40	0,09	0,04	3	5	4	9	8	7	4	3	5	1,1	1,1	1,1	1,3
15	7	0,40	0,10	0,23	0,14	4	5	1	7	7	7	3	4	4	0,9	1,2	1,0	0,8
16	8	0,30	0,12	0,22	0,10	6	7	5	8	8	9	5	4	2	1,0	1,3	0,9	0,7

Задача 3. Исследовать поведение теплообменника идеального смешения. Найти зависимости температуры и объемного расхода на его выходе от времени. Схемы аппарата даны ниже.

1) 

2) 

3) 

Считать, что сброс жидкости производится в атмосферу (***$P_{атм}$ = 0,1*** МПа). Для расчетов принять ***g = 9,80665 м/с^2***. Гидростатическое давление ***$\gamma \cdot h$*** выражать в мегапаскалях. Вариант задания выбрать из таблицы.

№	схема	h_0, м	H, м	S, м^2	$P_{сп0}$, МПа	P, МПа		k, м^3·с$^{-1}$·МПа$^{-1/2}$		
						1	2	1	2	3
1	1	4	6	3	0,08	0,20	0,15	0,9	1,3	0,8
2	2	5	7	5	0,07	0,11	0,12	1,0	1,2	1,2
3	2	6	7	4	0,09	0,14	0,12	1,1	0,7	1,1
4	3	4	8	6	0,11	0,18	0,20	1,2	0,9	1,3

№	T, К		ρ, кг/м^3		c, Дж·кг$^{-1}$·К$^{-1}$	
	1	2	1	2	1	2
1	470	320	900	850	2300	1700
2	390	310	980	760	4200	1800
3	330	490	870	780	3800	2300
4	480	330	920	990	2400	4100