МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических занятий
по дисциплине «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
Направленность (профиль)	Информационные системы управления технологическими и сервисными процессами
Год начала обучения	2026
Форма обучения	заочная
Реализуется в семестре	1

СОДЕРЖАНИЕ

Введение..3

1. Тема 2. Матрицы, определители, системы линейных уравнений.

Практическое занятие 1. Матрицы, определители, системы линейных уравнений................6

2. Тема 4. Аналитическая геометрия.

Практическое занятие 2. Аналитическая геометрия...21

Список литературы..32

Введение

Целью освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» является формирование и развитие интеллекта и способностей студентов к логическому и алгоритмическому мышлению, обучение основным математическим понятиям и методам линейной алгебры и аналитической геометрии, их использованию в моделировании, теоретическом и экспериментальном исследовании в профессиональной деятельности, поиску, критическому анализу и синтезу информации, применению системного подхода для решения поставленных задач.

Для освоения дисциплины поставлены следующие задачи:

- обучение студентов основным математическим методам алгебры и геометрии, необходимым при решении теоретических и практических задач;
- развитие логического и алгоритмического мышления общего уровня математической культуры;
- выработка навыков математического исследования прикладных вопросов, необходимых для решения теоретических и практических задач в области цифровых технологий;
- обучение студентов методам обработки и анализа результатов численных и натуральных экспериментов;
- привитие студентам умения самостоятельного изучения учебной литературы по алгебре и геометрии.

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-1** $_{\text{УК-1}}$ выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее анализ и диагностику на основе системного подхода	Понимает основы операций и алгебраических систем, методологию и основные методы линейной алгебра и аналитической геометрии. Использует понятия: эквивалентные матрицы и элементарные преобразования; системы линейных уравнений; матричный метод решения систем линейных уравнений; формулы Крамера, прямая, плоскость.

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-2** $_{\text{УК-1}}$ осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации	Способен распознавать в задачах предметной области матрицы и действия над ними; определители и их основные свойства; алгебраические дополнения и миноры; формулировку теоремы Лапласа, применять на практике математические модели, методы и средства цифровых технологий на практике
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-3** $_{\text{УК-1}}$ определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения	Обеспечивает владение навыками теоретического и экспериментального исследования, понятий: обратная матрица, ее основные свойства, метод вычисления; линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы; необходимое и достаточное условия линейной зависимости строк; ранг матрицы, методы его вычисления; теорема о базисном миноре. Обеспечивает применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области алгебры и геометрии, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач алгебры и геометрии, предполагающими самостоятельный выбор метода решения
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-1** $_{\text{ОПК-1}}$ знаком с основами естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Понимает теорию основных методов алгебры в профессиональной деятельности, анализирует теоретические и экспериментальные данные алгебраических вычислений в профессиональной деятельности, основные понятия аналитической геометрии, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной	**ИД-2** $_{\text{ОПК-1}}$ анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	Анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, методы, применяет знания алгебраических вычислений в профессиональной деятельности, вычисляет значения корня, степени, логарифма, находить значения тригонометрических выражений, выполняет тождественные преобразования тригонометрических, иррациональных, показательных, логарифмических выражений, анализирует математический аппарат аналитической геометрии, аналитические методы исследования геометрических

деятельности		объектов для решения поставленных задач в профессиональной деятельности
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-3** $_{\textbf{ОПК-1}}$ применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Владеет навыками решения задач, связанных с алгеброй, навыками решения задач, связанных с основами алгебраических вычислений в профессиональной деятельности, умеет решать задачи вычислительного и теоретического характера в области геометрии многомерного евклидова (аффинного) пространства и доказывать утверждения

Тема 2. Матрицы, определители, системы линейных уравнений.

Практическое занятие 1. Матрицы, определители, системы линейных уравнений.

Цель: Целью освоения темы «Линейная алгебра» является формирование набора универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии:

~ осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

~ использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности.

В результате освоения темы «Линейная алгебра» студентом приобретаются следующиезнания и умения:

Знать: основные методы алгебры и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности.

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области алгебры, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач алгебры, предполагающими самостоятельный выбор метода решения.

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием ианализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью.

Теоретическая часть

Определители и матрицы

1^0 Определителем 2-го порядка называется число, обозначаемое выражением

а) $$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \qquad \textbf{(1)}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2- элементы определителя.

б) Определителем 3-го порядка называется число, обозначаемое выражением

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+b_1c_2a_3-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1c_2b_3 \qquad \textbf{(2)}$$

в) Определителем n-го порядка называется число det A=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **(3)**

где a_{ij}- элемент определителя, находящийся на пересечении i-той строки и j-го столбца.

2^0 Матрицей называют таблицу, состоящую из элементов a_{ij}, расположенных в m строках и n столбцах, и обозначают:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если m=n, то матрицу называют квадратной; если m=1, то получим матрицу –строку (a_{11}, a_{12}, a_{1n});

если n=1, то получим матрицу-столбец: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется симметричной.

Единичной матрицей n-го порядка называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \ a_{ij} = \begin{cases} 1 & если\ i = j \\ 0 & если\ i \neq j \end{cases}$$

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковую размерность и все соответствующие элементы равны, т.е $a_{ij}=b_{ij}$.

3^0 Суммой 2-х матриц одинаковой размерности A и B называется матрица C такой же размерности, получаемая из этих матриц соответствующих элементов $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

4^0 Разность матриц есть действие обратное сложению, т.е. чтобы найти разность 2-х матриц одинаковой размерности, следует произвести вычитание соответствующих элементов $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

5^0 Под произведением матрицы A на число k понимается матрица B, получаемая из матрицы A умножением всех её элементов на это число $b_{ij}=ka_{ij}$.

6^0 Под произведением матрицы A размерности (mxn) на матрицу B размерности

(nxk) понимается матрица C размерности (mxk), получаемая перемножением элементов матрицы A на элементы матрицы B по правилу $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum a_{i\,r}b_{ri}$, т.е. по правилу “строки на столбец".

7^0 Трансионировать матрицу A – значит все её строки i сделать столбцами j с теми порядковыми номерами $a_{ij}=a^m_{ji}$.

8^0 Обратной матрицей по отношению к заданной квадратной матрице A называется такая квадратная матрица, обозначаемая A^{-1}, которая удовлетворяет равенствам $AA^{-1}=E$ и $A^{-1}A=E$.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу A^{-1}, необходимо и достаточно чтобы матрица A была несобственной (detA #0),тогда обратная матрица определяется формулой: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Таким образом, для получения обратной матрицы A^{-1} следует все элементы матрицы A заменить их алгебраическими дополнениями. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного вычёркивания i-той строки и j-го столбца и умноженный на $(-1)^{i+j}$

Системы линейных уравнений

9^0 Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2+\dots+k_1x_n=h_1, \\ a_2x_1+b_2x_2+\dots+k_2x_n=h_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx_1+b_nx_2+\dots+k_nx_n=h_n \end{cases}$$

по формулам Крамера имеет вид: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; …; $x_n\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$,где Δ- основной определитель системы; Δ_1; Δ_2; … Δ_n - дополнительные определители системы.

Если $\Delta\neq0$ – система совместная, имеет единственное решение. Если $\Delta=0$, а $\Delta_1\neq0$; $\Delta_2\neq0$; … $\Delta_n\neq0$ – система не совместная, не имеет решений. Если $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_n=0$ - система не определена, т.е. имеет бесконечное множество решений

10^0 Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

Если ввести матричные обозначения: A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

то систему можно записать матричным уравнением AX=B. Решение системы матричным методом определяется соотношением $X=A^{-1}B$; $\det\neq 0$.

11^0 Ранг матрицы – это наибольший из порядков определителей этой матрицы, отличных от нуля. Матрицы, имеющие одинаковый ранг, называются эквивалентными.

По *критерию Сильвестра* положительной определенности: Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны.

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка ее матрицы были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.

Решение типовых примеров

Пример № 1. Дана матрица A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу A^{-1}.

Правильность нахождения обратной матрицы проверить матричным умножением

$A*A^{-1} = =A^{-1}*A=E$.

Решение: Находим определитель матрицы:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1*\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} -4\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =22\neq 0.$$

Поскольку определитель матрицы не равен нулю, существует обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}*\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Находим алгебраические дополнения

$A_{11}=(-1)^{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1$; $A_{12}=(-1)^{3}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5$; $A_{13}=(-1)^{4}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1$;

$A_{21}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-11;$ $\quad A_{22}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=11;$ $\quad A_{23}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=11;$

$A_{31}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=26;$ $\quad A_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 5\end{vmatrix}=-20;$ $\quad A_{33}=(-1)^{6}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-18;$

Отсюда $A^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-1 & -11 & 26\\ -5 & 11 & -20\\ -1 & 11 & -18\end{pmatrix}.$

Правильность нахождения обратной матрицы проверим матричным умножением:

$$A^{-1}*A=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}-1 & -11 & 26\\ -5 & 11 & -20\\ -1 & 11 & -18\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 5 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}-1*1-11*5+26*3 & -1*4-11*2+26*1 & 1*3-11*5+26*2\\ -5*1+11*5-20*3 & 5*4+11*2-20*1 & 5*(-3)+11*5-20*2\\ -1*1+11*5-18*3 & -1*4+11*2-18*1 & 1*3+11*5-18*2\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}22 & 0 & 0\\ 0 & 22 & 0\\ 0 & 0 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E.$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно.

Пример № 2. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}2x-3y+z=14,\\ 5x+y-3z=7,\\ 4x+3y+2z=10;\end{cases}$$

Решение. Находим главный определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=4+15+36-4+30+18=99\neq 0.$$

Система имеет единственное решение. Находим дополнительные определители.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}14 & -3 & 1\\ 7 & 1 & -3\\ 10 & 3 & 2\end{vmatrix}=297;\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 14 & 1\\ 5 & 7 & -3\\ 4 & 10 & 2\end{vmatrix}=-198;\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}2 & -3 & 14\\ 5 & 1 & 7\\ 4 & 3 & 10\end{vmatrix}=198.$$

По формулам Крамера $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}-\frac{297}{99}=3;$ $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\frac{198}{99}=-2;$ $\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{198}{99}=2$

Ответ: (3;-2;2).

Пример № 3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17, \\ 5x + y - 3z = -2; \end{cases}$$

Решение. Запишем исходные матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Найдем $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ =36+15+4+30-4+18=99 $\neq$ 0

Находим обратную матрицу (см. пример №1). Получим

$A^{-1} = \frac{1}{99}\begin{bmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 11 & -22 & 0 \\ 17 & 11 & -18 \end{bmatrix}$. Отсюда находим искомое решение:

$$X = A^{-1} * B = \frac{1}{99}\begin{bmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 11 & -22 & 0 \\ 17 & 11 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{99}\begin{bmatrix} 128+187-18 \\ 176-374 \\ 272+187+36 \end{bmatrix} = \frac{1}{99}\begin{bmatrix} 297 \\ -198 \\ 495 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Таким образом x=3;y=-2;z=5

Пример № 4. Найти фундаментальную систему решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решим систему методом Гаусса. Поскольку число уравнений системы меньше числа неизвестных, считаем, что x_1; x_2; x_3-,базисные неизвестные, а x_4; x_5; x_6- свободные неизвестные. Перенесем слагаемые, содержащие свободные переменные, в правую часть уравнений системы и получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = x_4 - x_5 + 2x_{6,} \\ 2x - 3x_2 - 2x_3 = -x_4 + x_{5,} \\ -2x + 3x_2 + 3x_3 = -x_4 - x_5 + x_6; \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и затем выполним действия, составляющие прямой ход метода Гаусса:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_4 - x_5 + 2x_6 \\ 2 & -3 & -2 & -x_4 + x_5 \\ -1 & 3 & 3 & -x_4 - x_5 + x_6 \end{array}\right](-2),(2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_4 - x_5 + 2x_6 \\ 0 & -1 & -4 & -3x_4 + 3x_5 - 4x_6 \\ 0 & 1 & 5 & x_4 - 3x_5 + 5x_6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} x_4 - x_5 + 2x_6 \\ -3x_4 + 3x_5 - 4x_6 \\ 2x_4 + x_6 \end{matrix}\right]$$

Преобразованная расширенная матрица соответствует системе уравнений, которая эквивалентна исходной, однородной системе

$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = x_4 - x_5 + 2x_6, \\ -x_2 - 4x_3 = -3x_4 + 3x_5 - 4x_6, \\ x_3 = 2x_4 + x_6. \end{cases}$ обратный ход метода Гаусса дает значение базисных неизвестных,

выраженных через свободные переменные: $x_3 = 2x_4 + x_6$; $x_2 = 11x_4 - 3x_5$; $x_1 = 14x_4 - 4x_5 + x_6$.

Поскольку ранг однородной системы равен трем, то фундаментальная система решений для нее состоит из трех линейно-независимых векторов

При n=6 и z=3, беря последовательно для свободных переменных тройку чисел (1;0;0); (0;1;0) и (0;0;1), получим функциональный набор решений

$\widetilde{x}_1$ =(14;11;2;1;0;0); $\widetilde{x}_2$ =(-4;-3;0;0;1;0); $\widetilde{x}_3$ =(1;0;1;0;0;1).

Пример № 5. Исследовать и найти общее решение СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен единице

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right],$$

т.е ранг матрицы системы r=2

Оставляем в левой части переменные $x_1; x_2$, которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля), т.е.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ Остальные не основные переменные $x_3; x_4$ переносим в правые части уравнения. В

результате получим систему: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4 \\ -5x_2 = 17 + 5x_3 + 7x_4 \end{cases}$

Откуда $x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4$ и $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1; x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы: $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\quad x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{17}{5}c_2;\ x_3 = c_1; x_4 = c_2$

Пример №6. Доказать что квадратичная форма

$F = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ положительно определенная.

Решение. Запишем матрицу. А этой квадратичной формы и определитель матрицы А. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix};\quad \det A = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$. Т.к. главные миноры матрицы А $a_{11} = 6 > 0;$

$a_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 26 > 0;\quad a_3 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 162 > 0;$ т.е. все положительные, то данная квадратичная форма является положительно – определенная.

Вопросы и задания

№ 1. Найти обратную матрицу для матрицы А методом алгебраических дополнений. при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение, т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (Таблица 1).

Таблица 1.

В	Матрица	В	Матрица	В	Матрица	В	Матрица	В	Матрица
1	$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$	**7**	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	**13**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 14 & -4 \end{pmatrix}$	**19**	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**25**	$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 11 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**8**	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	**14**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$	**20**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	**26**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**9**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	**15**	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	**21**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$	**27**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**10**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	**16**	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	**22**	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	**28**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	**11**	$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	**17**	$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$	**23**	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	**29**	$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

6	$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$	**12**	$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\2&-4&-3\\1&5&1\end{pmatrix}$	**18**	$A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\5&2&13\\3&-1&5\end{pmatrix}$	**24**	$A=\begin{pmatrix}7&-5&0\\4&11&0\\2&4&4\end{pmatrix}$	**30**	$A=\begin{pmatrix}5&3&3\\3&2&2\\5&4&2\end{pmatrix}$

№ 2. Решить СЛАУ:

а) методом Крамера;

б) средствами матричного исчисления. Обратную матрицу найти, используя либо метод Жордано, либо метод алгебраических дополнений элементов матрицы А, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение (Таблица 2).

Таблица 2.

Вар.	Система уравнений	Вар.	Система уравнений	Вар.	Система уравнений
1	$\begin{cases}4x_1+7x_2+3x_3=-10,\\2x_1+9x_2-x_3=8,\\-x_1+6x_2-3x_3=3.\end{cases}$	11	$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4,\\4x_1-x_2+5x_3=6,\\x_1-2x_2+4x_3=5.\end{cases}$	21	$\begin{cases}x_1+x_2-4x_1=1,\\x_1+2x_2-3x_3=5,\\3x_1-2x_2+4x_3=4.\end{cases}$
2	$\begin{cases}2x_1+4x_2+3x_3=-10,\\-x_1+5x_2-2x_3=5,\\3x_1-2x_2+4x_3=3.\end{cases}$	12	$\begin{cases}x_1+7x_2-2x_3=3,\\3x_1+5x_2+x_3=5,\\-2x_1+5x_2-5x_3=-4.\end{cases}$	22	$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\2x_1+5x_2-3x_3=4,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}$
3	$\begin{cases}-3x_1+5x_2-6x_3=-5,\\2x_1-3x_2+5x_3=8,\\x_1+4x_2-x_3=1.\end{cases}$	13	$\begin{cases}-2x_1+3x_2-2x_3=2,\\3x_1-2x_2+x_3=2,\\-5x_1+10x_2-7x_3=10.\end{cases}$	23	$\begin{cases}x_1+x_2-4x_3=1,\\x_1-2x_2-3x_3=5,\\3x_1+x_2-4x_3=0.\end{cases}$
4	$\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3=-5,\\x_1+9x_2-4x_3=-1,\\-2x_1+6x_2-3x_3=6.\end{cases}$	14	$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=7,\\-4x_1+2x_2=-2,\\6x_1-3x_2+x_3=-3.\end{cases}$	24	$\begin{cases}4x_1-3x_2-2x_3=9,\\2x_1-1{,}5x_2-x_3=4{,}5,\\x_1+2x_2-3x_3=15.\end{cases}$
5	$\begin{cases}-2x_1+x_2-3x_3=-4,\\4x_1+7x_2-2x_3=-6,\\x_1-8x_2+5x_3=1.\end{cases}$	15	$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5,\\3x_1+3x_2-2x_3=8,\\x_1-x_2+x_3=6.\end{cases}$	25	$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\2x_1+5x_2-3x_3=4,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}$
6	$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=-4,\\4x_1+7x_2-2x_3=6,\\x_1+8x_2+5x_3=-1.\end{cases}$	16	$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=6,\\x_1-2x_2+x_3=9,\\x_1-4x_2-2x_3=3.\end{cases}$	26	$\begin{cases}x_1+x_2-4x_3=1,\\x_1+2x_2-8x_3=4,\\3x_1-x_2+4x_3=15.\end{cases}$
7	$\begin{cases}x_1-5_2+3x_3=-1,\\2x_1+4x_2+x_3=6,\\-3x_1+3x_2-7x_3=-13.\end{cases}$	17	$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=1,\\2x_1+x_2-0{,}5x_3=3,\\5x_1-x_2-3x_3=10.\end{cases}$	27	$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_1=1,\\2x_1+10x_2+8x_3=3,\\3x_1+15x_2+2x_3=5.\end{cases}$
8	$\begin{cases}-2x_1+5x_2-6x_3=-8,\\x_1+7x_2-5x_3=-9,\\4x_1+2x_2-x_3=-12.\end{cases}$	18	$\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3=2,\\5x_1-2x_2+2x_3=1,\\2x_1+2x_2+3x_3=1.\end{cases}$	28	$\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=-1,\\x_1+9x_2+6x_3=3,\\x_1+3x_2+4x_3=1.\end{cases}$

9	$\begin{cases} 3x_1-9x_2+8x_3=5, \\ 2x_1-5x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x-5y-z=-13, \\ x-z=5, \\ 11x+3y+z=-9. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 4x_1+6x_2+2x_3=6, \\ -2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 5x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1-4x_2+3x_3=1. \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+x_2-4x_3=5, \\ 5x_1-8x_2+2x_3=8. \end{cases}$

№ 3 Найти фундаментальную систему решений однородной СЛАУ (Таблица 3).

Таблица 3.

Вар.	**Система уравнений**	**Вар.**	**Система уравнений**
1	$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=0, \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1-3x_2-5x_3-7x_5=0, \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5=0. \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ -4x_1+5x_2-3x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0, \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 6x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-9x_2+2x_3+4x_4=0, \\ -x_1+5x_2-3x_3-x_4=0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=0. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x_1+4x_2-7x_3-3x_4=0, \\ -x_1-2x_2+3x_3-x_4=0, \\ -x_1-3x_2+5x_3+x_4=0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=0, \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-5x_5=0, \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=0. \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3-x_4=0, \\ -x_1+7x_2-5x_3-1{,}5x_4=0, \\ x_1+6x_2-3x_3+5x_4=0. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-6x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3+2x_4=0, \\ -x_1-2x_2-7x_3-x_4=0, \\ 5x_1-4x_2-x_3+3x_4=0. \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$

7	$\begin{cases} x_1+8x_2-6x_3-2x_4=0, \\ -2x_1-3x_2-4x_3-4x_4=0, \\ -3x_1-2x_2-4x_3-4x_4=0. \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=0, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4+x_5=0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4+5x_5=0. \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0, \\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$
10	$\begin{cases} -3x_1-9x_2+25x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} -x_1-3x_2+x_3-8x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+5x_3-12x_4=0, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+5x_2-8x_3-5x_4=0, \\ x_1+4x_2+5x_3+x_4=0. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 2x_1-4x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-7x_2-6x_3-3x_4=0, \\ -3x_1+x_2-4x_3-5x_4=0. \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-2x_3-6x_5=0. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3-3x_4=0, \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-3x_3+4x_4=0. \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=0, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=0. \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} 5x_1-5x_2+10x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+7x_3+x_4=0, \\ x_1+7x_2+4x_3+3x_4=0. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} 7x_1+5x_2+3x_3+6x_4=0, \\ 2x_1-x_2-x_3+4x_4=0, \\ x_1+8x_2+6x_3-6x_4=0. \end{cases}$

№ 4 Исследовать и найти общее решение СЛАУ (Таблица 4).

Таблица 4.

Вар.	**Система уравнений**	**Вар.**	**Система уравнений**

1	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=6, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=6, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=14. \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=6, \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=2, \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=7, \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1. \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=1, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=-2. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=23, \\ 3x_1+20x_2+5x_3-2x_4-6x_5=-8, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=1, \\ 9x_1+4x_2+3x_3-2x_4+6x_5=12. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3. \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+5x_4+9x_5=16, \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+6x_5=11, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=6. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+7x_4=6, \\ 2x_1+2x_2+4x_3+5x_4=4, \\ 7x_1+x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_4+4x_5=7, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=2, \\ x_1+4x_2+4x_4+5x_5=9, \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4+4x_5=8. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1-3x_2-3x_4=1, \\ -7x_1+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+3x_3+6x_4+11x_5=20, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+4x_4+7x_5=13, \\ 5x_1+4x_2+2x_3+6x_4+11x_5=19. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4+4x_5=7, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+8x_5=15, \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5=9, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+4x_4+7x_5=18. \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+6x_3+5x_4+10x_5=17, \\ 3x_1+3x_2+6x_3+4x_4+7x_5=12, \\ 5x_1+4x_2+8x_3+6x_4+11x_5=19, \\ 4x_1+3x_2+6x_3+6x_4+10x_5=19. \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=6, \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4+2x_5=4, \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3-3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3-6x_4=2, \\ -15x_1-11x_2+2x_3-3x_4=1. \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=3, \\ x_1-3x_2+x_3-x_5=-2, \\ 4x_1-7x_2+5x_3-x_4-2x_5=-1, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2. \end{cases}$

10	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1. \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_4+5x_5=8, \\ 3x_2-x_3+2x_4+5x_5=3, \\ x_1+2x_2+2x_4+3x_5=5, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3+4x_4+7x_5=12, \\ x_1+x_2+3x_4+4x_5=7, \\ 6x_1+6x_2+2x_3+8x_4+14x_5=24, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+4x_4+7x_5=13, \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+6x_5=11, \\ x_2+x_4+x_5=2, \\ 2x_1+4x_2+x_3+5x_4+7x_5=13, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=6. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3+9x_4-3x_5=2. \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+8x_5=15, \\ 3x_1+4x_2+2x_3+6x_4+9x_5=17, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+5x_4+8x_5=16, \\ x_1+3x_2+x_3+4x_4+5x_5=10. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+4x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3+x_5=1, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=22, \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-1. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+2x_3+6x_4+11x_5=20, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+8x_5=15, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+7x_4+12x_5=22, \\ 4x_1+3x_2+4x_3+7x_4+11x_5=22. \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4-5x_5=8, \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=-2, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_4+5x_5=17, \\ 3x_2-x_3+2x_4+2x_5=3, \\ x_1+2x_2+2x_4+3x_5=5, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9. \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5, \\ 3x_1-x_2-x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3, \\ 4x_1-4x_3-2x_4-3x_5=-1. \end{cases}$

№ 5 Выяснить вопрос о положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы (Таблица 5).

Таблица 5.

Вар.	Квадратичная форма
1	$f(x_1;x_2;x_3)=2x_1^2-5x_2^2+8x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$
2	$f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+2x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$
3	$F=2x_1^2-3x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$
4	$F=3x_1^2-x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$
5	$F=5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
6	$F=5x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+15x_3^2$
7	$F=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3+3x_3^2$

8	$F = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$
9	$F = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2$
10	$F = 5x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 5x_3^2$
11	$F = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$
12	$F = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
13	$F = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$
14	$F = -x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
15	$F = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
16	$f(x_1; x_2; x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
17	$F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$
18	$F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$
19	$F = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$
20	$F = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
21	$F = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$
22	$F = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$
23	$F = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 10x_2^2 + 2x_3^2$
24	$F = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2^2 + 5x_3^2$
25	$F = 9x_1^2 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3 + 16x_2x_3 + 8x_2^2 + 10x_3^2$
26	$F = 2x_1^2 - x_2^2 - \tilde{\delta}_1 x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$
27	$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
28	$F = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$
29	$F = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$
30	$F = -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Тема 4. Аналитическая геометрия.
Практическое занятие 2. Аналитическая геометрия.

Цель: Целью освоения темы «Аналитическая геометрия» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

~ осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

~ использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности.

В результате освоения темы «Аналитическая геометрия» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы аналитической геометрии и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности.

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения.

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью.

Теоретическая часть

1. Векторы в пространстве

Всякий *вектор в пространстве* можно представить как сумму трех векторов, один из которых расположен на оси Ох, второй – на оси Оу, третий – на оси Oz:

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k} \qquad (1.1)$$

где $\overline{i}$; $\overline{j}$; $\overline{k}$ - единичные векторы координатных осей (орты).

Модуль вектора $\overline{a}$ равен: $$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1.2).$$

Если через α; β; γ обозначить углы, которые вектор $\overline{a}$ составляет с положительными направлениями координатных осей, то формулы:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}; \qquad (1.3)$$

дают выражения *направляющих косинусов* вектора $\bar{a}$ через его проекции.

Линейные операции над векторами:

1. Сумма векторов: $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$ (1.4)
2. Умножение вектора на скаляр $\lambda\bar{a} = \lambda a_x\bar{i} + \lambda a_y\bar{j} + \lambda a_z\bar{k}$ (1.5)

Если A(x_1, y_1, z_1) и B(x_2, y_2, z_2) – координаты начала и конца вектора, то проекции вектора:

$a_x=x_2-x_1$; $a_y=y_2-y_1$; $a_z=z_2-z_1$ (1.6).

Модуль $|\bar{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (1.7)

Направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\bar{a}|}$; $\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\bar{a}|}$; $\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\bar{a}|}$ (1.8)

Расстояние между точками M_1(x_1, y_1, z_1) и M_2(x_2, y_2, z_2) определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.9)$$

Если начало отрезка совпадает с началом координат, то формула (1.9) примет вид:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.10)$$

Координаты точки M (x; y; z), делящей отрезок M_1 M_2 в отношении $\frac{M_1M}{M_2M} = \lambda$ находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.11)$$

или

$$\bar{r} = \frac{\bar{r_1} + \lambda\bar{r_2}}{2} \qquad (1.12).$$

Если точка M делит отрезок M_1 M_2 пополам, то λ=1 и формулы (1.11) примут вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (1.13).$$

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется скаляр (число), равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi \qquad (1.14)$$

б) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля $\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2$ (1.15)

в) Скалярное произведение единичных векторов определяется формулами:

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1;\ \bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0 \qquad (1.16)$$

г) Скалярное произведение двух векторов через их проекции равно сумме произведений одноименных проекций перемножаемых векторов:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z \qquad (1.17)$$

Угол между двумя векторами:

$$\cos(\bar{a}\cdot\bar{b})=\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (1.18)$$

Условие перпендикулярности двух векторов $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$ (1.19)

6[0] а) Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{\tilde{n}}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) модуль $\bar{\tilde{n}}$, численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е.

$$\bar{\tilde{n}}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a},\bar{b}) \qquad (1.20)$$

2) $\bar{\tilde{n}}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$; 3) $\bar{\tilde{n}}$ направлен так, что вектор $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют правильную тройку векторов.

Векторное произведение обозначается $\bar{\tilde{n}}=\bar{a}\times\bar{b}$ или $\bar{\tilde{n}}=[\bar{a}\ \ \bar{b}]$.

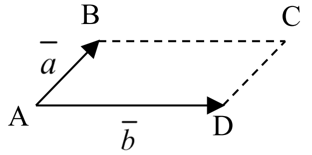
б) Выражение векторного произведение через проекции перемножаемых векторов

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (1.21)$$

Условием параллельности векторов служит пропорциональность их одноименных проекций

$$\frac{a_x}{b_y}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \qquad (1.22)$$

в) Площадь Δ ABC (рис. 1) равна половине площади параллелограмма ABCD и



равна $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$ (1.23)

Рис. 1

7. а) Смешанным произведением трех векторов называется выражение вида $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{\tilde{n}}$ или $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{\tilde{n}}$. Если векторы заданы своими координатами, то

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{\tilde{n}}=\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{\tilde{n}}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ \tilde{n}_x & \tilde{n}_y & \tilde{n}_z\end{vmatrix} \qquad (1.24)$$

б) Смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах $V = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{\tilde{n}} = \bar{a}\ \bar{b}\ \bar{\tilde{n}}$ (1.25)

в) Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$; $\bar{b}$ и $\bar{\tilde{n}}$ равен $V_n = \frac{1}{6}\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}$ (1.26)

2 *Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве*

1^0 Прямой линии на плоскости соответствует уравнение первой степени с двумя неизвестными.

а) Общее уравнение прямой Ax+By+C=0 (2.1),

где A;B; C – произвольные коэффициенты, причем $A^2+B^2 \neq 0$.

б) Уравнение прямой с угловым коэффициентом y=kx+b (2.2),

где k = tgφ –угловой коэффициент прямой; φ – угол наклона прямой к положительному направлению оси OX, b – величина отрезка, отсекаемая прямой на оси OY от начала координат (рис. 2)

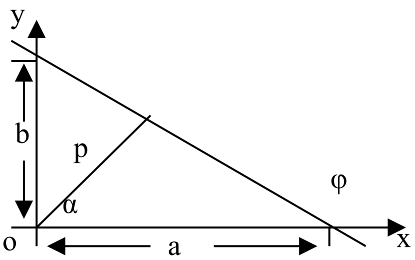


Рис. 2

в) Уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (2.3),

здесь a; b – величины отрезков, которые прямая отсекает от осей координат (рис. 2).

г) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $\grave{I}_1(x_1; y_1)$ и $\grave{I}_2(x_2; y_2)$ $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (2.4)

д) Нормальное уравнение прямой $x * \cos a + y * \sin a - p = 0$ (2.5)

Здесь P- длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, a- угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox, против часовой стрелки, до перпендикуляра p (рис. 2). Чтобы привести общее уравнение прямой (2.1) к нормальному виду, нужно общее уравнение прямой умножить на нормирующий множитель

$$m = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$ (2.6),

взятый со знаком, противоположный знаку свободного члена C.

2^0 а) Всякая плоскость определяется уравнением первой степени с тремя неизвестными Ax+By+Cz+Д=0 (2.7),

где A, B, C и Д, постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2+C^2$¹0

б) Нормальное уравнение плоскости

$\bar{r} \times \bar{n} - p = 0$ или x cosa+y cosb+z cos -p =0 (2.8),

где P - длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, a,b,γ- углы, которые перпендикуляр образует с положительным направлением координатных осей; $\bar{n}$ единый вектор направления ОР. Для приведения общего уравнения плоскости (2.7) к нормальному виду нужно его уравнение умножить на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, при этом знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку Д в уравнении (2.7)

в) Уравнение плоскости в отрезках на осях $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}$, (2.9)

где a, b, c- отрезки, которые отсекает плоскость на координатных осях.

г) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ и перпендикулярной данному вектору $\overline{N}$=(A;B;C) $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)$ (2.10)

д) Точка пересечения трех плоскостей находится из совместного решения их уравнений

е) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$ и $M_3(x_3; y_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.11)$$

ж) Угол между двумя плоскостями равен углу между нормальными к ним векторами $\overline{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{N_2} = (A_2; B_3; C_4)$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1} \times \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \times \left|\overline{N_2}\right|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \times \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2.12)$$

Если плоскости перпендикулярны, то $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (2.13)

Если плоскости параллельны, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ (2.14)

з) Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до плоскости $d = \dfrac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (2.15)

4^0 а)Уравнение прямой в общем виде $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ (2.16)

б) Уравнение прямой в каноническом виде $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, (2.17)

где $l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ проекции направляющего вектора $\bar{a} = (l; m; n)$ прямой, проходящей через точку $M_{01}(x_0; y_0)$

в) Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_{01}(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\overline{a}=(l;m;n)$ имеет вид $x=x_0+lt;\ y=y_0+mt;\ z=z_0+nt;$ (2.18)

5^0 а) Уравнение прямой, приходящей через две данные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{z_2-z_1}=\frac{z-z1}{z_2-z_1} \qquad (2.19)$$

б) Угол между двумя прямыми $\cos\varphi=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}*\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$ (2.20)

Если прямые взаимно- перпендикулярны, то $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ (2.21)

если две прямые параллельны, то $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (2.22)

6^0. Угол между прямой и плоскостью $\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ (2.23)

Условие параллельности прямой и плоскости Аl+Вm+Сn=0 (2.24)

условие перпендикулярности прямой и плоскости $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ (2.25)

Точка пересечения прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости Ax+By+Cz+D=0 находится по формулам $x=x_0+lt$; $y=y_0+mt;$ $z=z_0+nt$; где $t=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+d}{Al+Bm+Cn}$.

Решение типовых примеров

Пример №1. Дан параллелограмм АВСД, три вершины которого заданы:

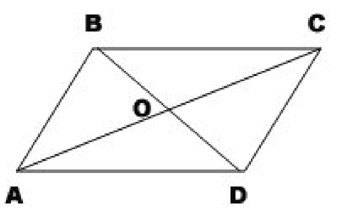
А (1;1;0);

В (3;2;-1);

С (2;-1;4).

Найти: а) четвертую вершину; б) острый угол параллелограмма; в) длины диагоналей; г) площадь параллелограмма.

Решение: Для определенности можно выполнить схематический чертеж.



а) Найдем координаты середины отрезка АС по формулам (13-1) $O(\frac{1+2}{2};\frac{1-1}{2};\frac{0+4}{2});O(1.5;0;2);$.

Теперь найдем координаты точки Д по координатам точек В(3;2;-1) и О(1,5;0;2) по той же формуле $1.5=\frac{3+x}{2};3=3+x;x=0;$ $0=\frac{2+y}{2}$; y=-2; $2=\frac{-1+z}{2}$; z=5; D(0;-

2;5)

б) Острый угол φ, как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ найдем, используя скалярное произведение векторов. Для этого сначала найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ по формулам (1.6).

$\overline{AB}=(3-1;2-1;-1-0)=(2;1;-1)$; $\overline{AD}=(0-1;-2-1;5-0)=(-1;-3;5)$.

Далее воспользуемся формулой (1.18)

$$\cos\varphi=\frac{2*(-1)+1*(-3)+(-1)*5}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+9+25}}=\frac{-10}{\sqrt{6}\sqrt{35}}\approx-0,6890;\ \varphi=\arccos(-0,6890)\approx133,6^o$$

Так как необходимо найти острый угол, то он равен 180^0-$133,6^0$= $46,4^0$.

в) Длину диагоналей найдем по формуле длины отрезка по координатам его концов (1.9)

$$AC=\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}\approx4,58$$

$$BD=\sqrt{(0-3)^2+(-2-2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{9+16+36}=\sqrt{61}\approx7,81$$

г) для нахождения площади параллелограмма воспользуемся формулой (1.23) векторного произведения векторов

$$S_n=\left|\overline{AB}*\overline{AD}\right|=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=5\bar{i}+\bar{j}-6\bar{k}+\bar{k}-3\bar{i}-10\bar{j}=2\bar{i}-9\bar{j}-5\bar{k}$$

$$S_n=\sqrt{2^2+9^2+5^2}=\sqrt{110}\approx10,5(кв.ед)$$

Пример № 2. Определить угол между прямой, проходящей через точки $M_1(0;2;-6)$ и $M_2(3;6;-6)$ и плоскостью 2x-y-2z-1=0. Найти расстояния от точек M_1 и M_2 до плоскости.

Решение: Уравнение прямой проходящей через две точки M_1 и M_2 примут вид $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-6}{-6-6}$; $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-6}{-12}$. Угол между прямой и плоскостью находим по формуле (2.23):

$$\sin\varphi\ \frac{2\cdot3-1\cdot4+2\cdot12}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{9+16+144}}=\frac{26}{2\cdot13}=\frac{2}{3}=0,6667;\quad \varphi=\arcsin0,6667=42^o$$

Расстояние от точек до плоскости найдем по формуле (2.15):

$$d_1=\frac{|2\cdot0+(-1)\cdot2+(-2)\cdot6-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|-15|}{\sqrt{9}}=5;\ d_1=\frac{|2\cdot3-1\cdot6+2\cdot6-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{11}{3}$$

Пример № 3. Вершины пирамиды находятся в точках $A_1(4;6;5)$; $A_2(6;9;4)$; $A_3(2;10;10)$;

$A_4(7;5;9)$.

Найти: 1) длину ребра $A_1\,A_2$; 2) Угол между ребрами $A_1\,A_2$ и $A_1\,A_3$; 3) площадь грани $A_1\,A_2$ A_3; 4) объем пирамиды $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$; 5) уравнение плоскости $A_1\,A_2\,A_3$; 6) уравнение прямой $A_1\,A_4$; 7)угол между ребром $A_1\,A_4$ и гранью $A_1\,A_2\,A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1\,A_2\,A_3$.

Решение: Найдем сначала координаты векторов $\overline{A_1A_2}$; $\overline{A_1A_3}$; $\overline{A_1A_4}$ и координаты векторного произведения $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$.

По формуле (1.7) получаем: $\overline{A_1A_2}$ =(6-4; 9-6; 4-5)=(2;3;-1);

$\overline{A_1A_3}$ =(2-4; 10-6; 10-5)=(-2;4;5); $\overline{A_1A_4}$ = (7-4; 5-6; 9-5)=(3;-1;4).

С помощью формулы (1.21) находим:

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\left(\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right)=(19;-8;14).$$

1) Длина ребра $A_1\,A_2$ равна расстоянию между точками A_1 и A_2, которые вычисляем по формуле (1.9) $A_1\,A_2=\sqrt{(6-4)^2+(9-6)^2+(4-5)^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74$. Тот же результат можно получить, найдя модуль вектора $\overline{A_1A_2}$ по формуле (1.7).

2) Угол между ребрами $A_1\,A_2$ и $A_1\,A_3$ равен углу φ между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

В соответствии с формулой (1.18) получим

$$\cos\varphi=\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_3}\right|}=\frac{2\cdot(-2)+3\cdot4-1\cdot5}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{\;^2+4^2+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{70}};\ P\approx 0{,}1195;\ \varphi\approx 83{,}5^{o}$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника $A_1A_2A_3$, которую вычислим по формуле (1.23):

$$S=\frac{1}{2}\left(A_1A_2\times A_1A_3\right)=\frac{1}{2}\sqrt{19^2+(-8)^2+14^2}=\frac{\sqrt{621}}{2};\ r\approx 12{,}46$$

4) Объем пирамиды найдем по формуле (1.26)

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\\ 7-4 & 5-6 & 9-5\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=\frac{121}{6}=20\frac{1}{6}$$

5) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ как плоскости проходящей через 3 точки найдем по формуле **(2.11)**

$$\begin{vmatrix}x-4 & y-6 & Z-5\\ 6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}x-4 & y-6 & z-5\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$$

19(x-4)-8(y-6)+14(z-5)=0;   преобразовываем 19x-18y+14z-98=0.

6) Уравнение прямой A_1A_4 как прямой , проходящей через две точки найдем по формуле (2.19)

$$\frac{x-4}{7-4}=\frac{y-6}{5-6}=\frac{z-5}{9-5}; \qquad \frac{x-4}{3}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-5}{4}; \quad x=4+3t;\ y=6-t;\ z=5+4t.$$

7) Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ равен углу φ между плоскостью и прямой, найдем по формуле (2.23)

$$\sin\varphi=\frac{|19*3-18*(-1)+14*4|}{\sqrt{19^2+18^2+14^2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}}=\frac{121}{\sqrt{62\sqrt{26}}}\approx 0{,}9522 \qquad \varphi=\arcsin 0{,}9522\approx 72{,}2^0$$

8) Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, можно записать, как уравнение прямой, проходящей через точку A_4 и перпендикулярной плоскости, имеющей нормальный вектор $\bar{n}=(19;-8;14)$, который для этой прямой будет направляющим вектором. Уравнение в данном случае принимает вид x=7+19t; y=5-8t; z= 9+14t.

Вопросы и задания

№1 Дан параллелограмм АВСД, три вершины которого заданы. Найти:

а) четвертую вершину;

б) острый угол параллелограмма;

в) длину диагоналей;

г) площадь параллелограмма (Таблица 1)

Таблица 1.

Вар.	**A**	**B**	**C**	**Вар.**	**A**	**B**	**C**
1	(6;-3;2)	(-2;-4;-5)	(-5;1;-3)	**16**	(-2;-5;-3)	(-5;3;-4)	(3;4;2)
2	(2;4;-5)	(-4;2;-3)	(-3;-3;6)	**17**	(-4;2;3)	(2;-3;-5)	(7;-2;1)
3	(-3;-1;2)	(5;3;-3)	(3;-4;4)	**18**	(-2;-4;5)	(-8;-1;-5)	(4;3;-2)
4	(-1;-2;3)	(-4;1;2)	(5;2;7)	**19**	(-3;5;-4)	(-5;6;2)	(3;-5;-2)
5	(1;2;3;)	(3;-4;-2)	(-4;-3;2)	**20**	(2;-3;4)	(6;-4;-5)	(-3;4;-2)
6	(2;-3;-1)	(-3;5;3)	(4;3;-4)	**21**	(5;-2;-4)	(-5;-8;-1)	(-2;4;3)
7	(-5;-3;-2)	(3;-4;-5)	(4;2;3)	**22**	(2;3;-4)	(-3;-5;2)	(-2;-1;7)
8	(-3;2;6)	(-4;-5;-2)	(1;-3;-5)	**23**	(4;-5;2)	(2;-3;-4)	(-3;6;-3)
9	(-2;3;-1)	(1;2;-4)	(2;7;5)	**24**	(5;-4;-3)	(6;2;-5)	(-5;-2;3)
10	(2;3;1)	(-4;-2;3)	(-3;2;-4)	**25**	(-3;4;2)	(-4;-5;6)	(4;-2;-3)
11	(3;-4;2)	(-5;2;3)	(-1;7;-2)	**26**	(3;-2;-5)	(-4;-5;3)	(2;3;4)
12	(-4;-3;5)	(2;-5;6)	(-2;3;-5)	**27**	(3;-1;-2)	(3;-3;5)	(-4;4;3)
13	(4;2;-3)	(-5;6;-4)	(-2;-3;4)	**28**	(-1;2;-3)	(2;-4;1)	(7;5;2)

14	(-5;-3;-2)	(3;-4;-5)	(4;2;3)	**29**	(-3;6;-3)	(-4;3;-2)	(3;-5;-2)
15	(4;-2;-3)	(-4;6;-2)	(4;3;-4)	**30**	(-1;-2;3)	(-4;3;3)	(3;2;1)

№2. Найти угол между плоскостью а и прямой, проходящей через начало координат и точку М (таблица2). Вычислить расстояние от точки М до плоскости.

Таблица 2.

Вариант	M (x;y;z)	α	Вариант	M (x;y;z)	α
1	(2;-1;3)	3x-y+2z-4=0	**16**	(-4;-3;-5)	x-3y+2z-4=0
2	(-2;4;-3)	X+5y+7z-2=0	**17**	(-1;-4;5)	-2x+4y+z+5=0
3	(-4;5;-1)	4x+y-2z+5=0	**18**	(-1;3;2)	-x+2y+3z-4=0
4	(2;3;1)	5x+2y-z-3=0	**19**	(-3;2;5)	3x+2y-z+14=0
5	(3;2;-1)	2x+3y-z-4=0	**20**	(5;-1;-4)	x-2y+4z+5=0
6	(2;-2;4)	x-3y+5z-10=0	**21**	(4;2;-2)	5x+y-3z-10=0
7	(5;-3;2)	-x+3y+2z+14	**22**	(4;1;3)	X+2y+3z-6=0
8	(-3;2;1)	2x-y+z+5=0	**23**	(4;-3;-2)	5x+7y+z-2=0
9	(1;3;4)	2x+3y+z-6=0	**24**	(-2;4;2)	-3x+5y+z-10=0
10	(2;5;-3)	2x-y+3z+14=0	**25**	(-2;4;-3)	-5x+3y+z+1=0
11	(-4;5;-1)	4x+y-2z+5=0	**26**	(4;-3;-2)	3x+y-5z+1=0
12	(-3;-5;-4)	-3x+2y+z-4=0	**27**	(1;2;3)	-x+5y+2z-3=0
13	(-3;-2;4)	x-5y+3z+1=0	**28**	(2;1;-3)	-x+y+2z+5=0
14	(-3;-2;4)	7x+y+5z-2=0	**29**	(-5;-4;-3)	2x+y-3z-4=0
15	(1;-3;2)	X+2y-z+5=0	**30**	(3;1;2)	2x-y+5z-3=0

№3. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3

2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$

4) объем пирамиды;

5) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3

6) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$;

7) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$;

8) выполнить чертеж. (Таблица 3)

Таблица 3.

Вар.	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**Вар.**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**
1	(0;3;2)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)	**16**	(4;5;0)	(2;4;-2)	(6;3;-1)	(2;3;0)
2	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;.0)	(-1;4;2)	**17**	(2;4;-1)	(0;3;-3)	(4;2;-2)	(0;2;-1)
3	(2;2;3)	(1;2;7)	(0;3;3)	(2;4;5)	**18**	(3;2;2)	(7;2;1)	(3;3;0)	(5;4;2)
4	(0;-2;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)	**19**	(4;1;0)	(2;0;2)	(6;-1;-1)	(2;0;-1)
5	(3;0;2)	(2;0;6)	(1;1;2)	(3;2;4)	**20**	(2;1;1)	(4;2;3)	(6;0;2)	(2;0;3)
6	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)	**21**	(-1;0;2)	(2;3;-1)	(-1;3;-2)	(1;4;0)
7	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)	**22**	(4;5;2)	(2;4;0)	(6;1;3)	(2;3;2)
8	(-1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)	**23**	(0;2;-1)	(0;6;-2)	(1;-3;2)	(4;2;-1)
9	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;5)	**24**	(0;3;2)	(0;-1;-7)	(3;1;0)	(-2;-2;-5)
10	(2;-1;2)	(1;-1;6)	(0;0;2)	(2;1;4)	**25**	(4;2;1)	(2;0;0)	(6;1;-1)	(2;2;-1)
11	(2;-1;3)	(4;-2;2)	(-4;5;1)	(-3;2;1)	**26**	(1;2;-3)	(5;-4;1)	(2;-2;4)	(3;2;-1)
12	(2;-2;4)	(-4;-5;1)	(-3;2;1)	(2;3;1)	**27**	(1;2;3)	(1;-3;2)	(-5;1;-4)	(4;-2;2)
13	(-3;-2;4)	(-4;-3;5)	(4;-1;-2)	(4;1;3)	**28**	(-5;4;3)	(2;-1;3)	(1;-3;-2)	(3;2;1)
14	(-1;3;2)	(2;1;-3)	(-2;4;2)	(-2;-4;5)	**29**	(-2;-1;-3)	(3;5;-2)	(-4;2;-5)	(-5;4;3)
15	(5;-1;-4)	(3;1;2)	(3;2;1)	(3;5;-2)	**30**	(-1;3;2)	(-3;-2;1)	(2;-4;-3)	(5;2;-4)

Список литературы

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные.— Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 с. — 978-5-8265-1412-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63859.html
2. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебник / А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 с. — ISBN 978-5- 94211-710-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71687.html
3. Шипачев, В. С., под ред. А. Н. Тихонова Высшая математика. Базовый курс: учеб. пособие для бакалавровМ.: Юрайт, 2013

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика: Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013. Математика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
2. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — URL: http://www.iprbookshop.ru/49604.html

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по организации самостоятельной работы для студентов по дисциплине

Алгебра и геометрия

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии		
Направленность (профиль)/специализация	Информационные системы управления технологическими и сервисными процессами		
Год начала обучения	2024		
Форма обучения	очная	заочная	очно-заочная
Реализуется в семестре	__	1___	_____

Невинномысск, 2026 г.

Методические рекомендации к самостоятельной работе составлены в соответствии с Федеральным государственным стандартом, рабочим учебным планом и программой дисциплины «Алгебра и геометрия» для студентов направления подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии.

Составители: доцент Дзамыхов А.Х.

Содержание

Общие сведения..4

1..Структура самостоятельной работы 5

2...План-график выполнения самостоятельной работы. 5

3..Методика самостоятельной работы 5

3.1. ....Методика самостоятельной работы по теоретическому курсу 5

3.2. ....Методика самостоятельной работы при решении задач 6

4. ....Подготовка к зачету 8

Список литературы..10

Общие сведения

Цель преподавания дисциплины «Алгебра и геометрия» в вузе — ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач. Привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математическим методам; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Самостоятельная работа, наряду с аудиторными занятиями, составляет основу успешного освоения учебного курса, приобретения профессионализма и повышения компетентности. В соответствии с целями основной образовательной программы и задачами профессиональной деятельности изучаются следующие компетенции:

Направление подготовки	Профиль	Индекс	Формулировка:
09.03.02 Информационные системы и технологии	Информационные системы управления технологическими и сервисными процессами	УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
		ОПК-1	Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

В ходе изучения дисциплины студент должен:

Знать: - сущность и значение математических основ и законов, сущность и значение информации в развитии современного общества; - основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности
Уметь: - использовать аналитические и численные методы решения задач профессиональной деятельности; - обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные
Владеть: - математическими, статистическими и количественными методами решения типовых задач профессиональной деятельности

1. Структура самостоятельной работы

Самостоятельная работа для очной формы обучения распределена следующим образом:

Направление подготовки	Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки

1 семестр				
09.03.02	ОПК-1, УК-1	Подготовка к зачету	Зачет с оценкой	Вопросы к зачету
09.03.02	ОПК-1, УК-1	Подготовка к лекции	Конспект	Собеседование
09.03.02	ОПК-1, УК-1	Подготовка к практическому занятию	Конспект	Собеседование
09.03.02	ОПК-1, УК-1	Самостоятельное изучение литературы	Конспект	Собеседование

2. *План-график выполнения самостоятельной работы.*

Наименование	Сроки	Вид отчетности	Направление подготовки
Подготовка к сдаче первой контрольной точки по практическим занятиям.	4-5 неделя	Письменный	**09.03.02**
Подготовка к сдаче второй контрольной точки по практическим занятиям.	9-10 неделя	Письменный	**09.03.02**
Подготовка к сдаче третьей контрольной точки по практическим занятиям.	15-17 неделя	Письменный	**09.03.02**
Самостоятельное изучение тем.	1-18 неделя	Конспект	**09.03.02**
Подготовка к зачету.	17-18 неделя	Зачет с оценкой	**09.03.02**

3. *Методика самостоятельной работы*

3.1. *Методика самостоятельной работы по теоретическому курсу*

Главное в период подготовки к лекционным занятиям – научиться методам самостоятельного умственного труда, сознательно развивать свои творческие способности и овладевать навыками творческой работы. Для этого необходимо строго соблюдать дисциплину учебы и поведения. Четкое планирование своего рабочего времени и отдыха является необходимым условием для успешной самостоятельной работы. В основу его нужно положить рабочие программы изучаемых в семестре дисциплин.

Каждому студенту следует составлять еженедельный и семестровый планы работы, а также план на каждый рабочий день. С вечера всегда надо распределять работу на завтрашний день. В конце каждого дня целесообразно подводить итог работы: тщательно проверить, все ли выполнено по намеченному плану, не было ли каких-либо отступлений, а если были, по какой причине это произошло. Нужно осуществлять самоконтроль, который является необходимым условием успешной учебы. Если что-то осталось невыполненным, необходимо изыскать время для завершения этой части работы, не уменьшая объема недельного плана.

Слушание и запись лекций – сложный вид вузовской аудиторной работы. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента. Краткие записи лекций, их конспектирование помогает усвоить учебный материал.

Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное и сделано это самим студентом. Не надо стремиться записать дословно всю лекцию. Такое «конспектирование» приносит больше вреда, чем пользы. Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях.

Конспект лекций лучше подразделять на пункты, параграфы, соблюдая красную строку. Этому в большой степени будут способствовать пункты плана лекции, предложенные преподавателями. Принципиальные места, определения, формулы и другое следует сопровождать замечаниями «важно», «особо важно», «хорошо запомнить» и т.п. Можно делать это и с помощью разноцветных маркеров или ручек. Лучше если они будут собственными, чтобы не приходилось просить их у однокурсников и тем самым не отвлекать их во время лекции. Целесообразно разработать собственную «маркографию» (значки, символы), сокращения слов. Не лишним будет и изучение основ стенографии. Работая над конспектом лекций, всегда необходимо использовать не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть знаниями.

3.2. Методика самостоятельной работы при решении задач

Подготовку к каждому практическому занятию студент должен начать с ознакомления с методическими указаниями к практическим занятиям, которые включают содержание работы и теоретические основы. Тщательное продумывание и изучение вопросов основывается на проработке текущего материала лекции, а затем изучения обязательной и дополнительной литературы, рекомендованных к данной теме.

Если программой дисциплины предусмотрено выполнение практического задания, то его необходимо выполнить с учетом рекомендаций и теоретических основ, приведенных в методических указаниях к практическим работам. Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса. Результат такой работы должен проявиться в способности студента свободно ответить на теоретические вопросы, его участии в коллективном обсуждении вопросов изучаемой темы, правильном выполнении практических заданий.

В зависимости от содержания и количества отведенного времени на изучение каждой темы практическое занятие может состоять из следующих частей:

1. Обсуждение теоретических вопросов, определенных программой дисциплины.
2. Обсуждение практических вопросов, определенных программой дисциплины.
3. Выполнение практического задания с последующим разбором полученных результатов или обсуждение практического задания.
4. Подведение итогов занятия.

Первая часть – обсуждение теоретических вопросов – проводится в виде фронтальной беседы со всей группой и включает выборочную проверку преподавателем теоретических знаний студентов. Примерная продолжительность — до 15 минут. Вторая часть — обсуждение практических приложений теоретического материала – проводится в виде фронтальной беседы со всей группой и включает выборочную проверку преподавателем практических знаний студентов. Примерная продолжительность — 20-25 минут. Если программой предусмотрено выполнение практического задания в рамках конкретной темы, то преподавателями определяется его содержание и дается время на его выполнение, а затем идет обсуждение результатов. Подведением итогов заканчивается практическое занятие.

В процессе подготовки к практическим занятиям, студентам необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у студентов свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет студентам проявить свою индивидуальность в рамках работы на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

Для лучшего усвоения практических вопросов, рассматриваемых на практических занятиях, в разделе самостоятельной работы предусмотрено самостоятельное решение задач. Практических занятий распределены следующим образом:

Темы практических занятий:

- Линейная алгебра.
- Аналитическая геометрия.

Задачи выдает преподаватель в конце практического занятия согласно графику учебного процесса из методических указаний к практическим занятиям. Для самостоятельного решения следует использовать литературу [1-7]. Форма отчётности – наличие решённых задач, представленных в рукописном виде, правильность выполнения которых проверяет преподаватель и делает соответствующие пометки в журнале.

4. Подготовка к зачету

Экзаменационная сессия – очень тяжелый период работы для студентов и ответственный труд для преподавателей. Главная задача зачетов – проверка качества усвоения содержания дисциплины.

На основе такой проверки оценивается учебная работа не только студентов, но и преподавателей: по результатам зачетов можно судить и о качестве всего учебного процесса. При подготовке к зачету студенты повторяют материал курсов, которые они слушали и изучали в течение семестра, обобщают полученные знания, выделяют главное в предмете, воспроизводят общую картину для того, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины.

При подготовке к зачетам основное направление дают программы курса и конспект, которые указывают, что в курсе наиболее важно. Основной материал должен прорабатываться по учебнику, поскольку конспекта недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть проработан в течение семестра, а перед зачетом важно сосредоточить внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением в памяти его краткого содержания в логической последовательности.

Критерии оценки.

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55.** Текущее максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла контрольное задание)
Отличный	**100**
Хороший	**80**
Удовлетворительный	**60**
Неудовлетворительный	**0**

Критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется, если студент:

- ✓ полно раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой;
- ✓ изложил материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя терминологию дисциплины и символику;
- ✓ правильно выполнил рисунки, схемы, сопутствующие ответу;
- ✓ показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применяя их в новой ситуации;
- ✓ продемонстрировал усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, сформированность и устойчивость используемых при ответе умений и навыков;
- ✓ выполнял работу самостоятельно без помощи преподавателя.

Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или выкладках, которые студент легко исправил по замечанию преподавателя.

Оценка «хорошо» выставляется, если студент:

- ✓ полно раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой;
- ✓ изложил материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя терминологию дисциплины и символику;
- ✓ правильно выполнил рисунки, схемы, сопутствующие ответу;
- ✓ показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применяя их в новой ситуации;
- ✓ продемонстрировал усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, сформированность и устойчивость используемых при ответе умений и навыков;
- ✓ выполнял работу самостоятельно без помощи преподавателя.

Ответ при этом имеет один из недостатков:

- ✓ в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие содержание ответа;

- ✓ допущены один - два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию преподавателя;
- ✓ допущена ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или выкладках, легко исправляемые по замечанию преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если:

- ✓ неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса;
- ✓ имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, схемах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если:

- ✓ не раскрыто основное содержание учебного материала;
- ✓ обнаружено незнание или непонимание учащимся большей или наиболее важной части учебного материала;
- ✓ допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, в рисунках или схемах, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросах преподавателя.

Список литературы

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные.— Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 c. — 978-5-8265-1412-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63859.html
2. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебник / А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 c. — ISBN 978-5- 94211-710-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71687.html
3. Шипачев, В. С., под ред. А. Н. Тихонова Высшая математика. Базовый курс: учеб. пособие для бакалавровМ.: Юрайт, 2013

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика: Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013. Математика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
2. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. —URL: http://www.iprbookshop.ru/49604.html

Учебно-методическое обеспечение

1. Методические указания по проведению практических работ по дисциплине «Алгебра и геометрия» для студентов направления 09.03.02 Информационные системы и технологии / Сост. Е.Н. Мельникова. – Невинномысск: НТИ (филиал) СКФУ, 2024 – 31 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению самостоятельной работы
по дисциплине «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии
Направленность (профиль) «Информационные системы управления технологическими и сервисными процессами»

Содержание

1 Подготовка к лекциям 4
2 Подготовка к практическим занятиям 7
3 Самостоятельное изучение темы. Конспект 9

1 Подготовка к лекциям

Главное в период подготовки к лекционным занятиям – научиться методам самостоятельного умственного труда, сознательно развивать свои творческие способности и овладевать навыками творческой работы. Для этого необходимо строго соблюдать дисциплину учебы и поведения. Четкое планирование своего рабочего времени и отдыха является необходимым условием для успешной самостоятельной работы. В основу его нужно положить рабочие программы изучаемых в семестре дисциплин.

Каждому студенту следует составлять еженедельный и семестровый планы работы, а также план на каждый рабочий день. С вечера всегда надо распределять работу на завтрашний день. В конце каждого дня целесообразно подводить итог работы: тщательно проверить, все ли выполнено по намеченному плану, не было ли каких-либо отступлений, а если были, по какой причине это произошло. Нужно осуществлять самоконтроль, который является необходимым условием успешной учебы. Если что-то осталось невыполненным, необходимо изыскать время для завершения этой части работы, не уменьшая объема недельного плана.

Слушание и запись лекций – сложный вид вузовской аудиторной работы. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента. Краткие записи лекций, их конспектирование помогает усвоить учебный материал. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное и сделано это самим студентом. Не надо стремиться записать дословно всю лекцию. Такое «конспектирование» приносит больше вреда, чем пользы. Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях.

Конспект лекций лучше подразделять на пункты, параграфы, соблюдая красную строку. Этому в большой степени будут способствовать пункты плана лекции, предложенные преподавателям. Принципиальные места, определения, формулы и другое следует сопровождать замечаниями «важно», «особо важно», «хорошо запомнить» и т.п. Можно делать это и с помощью разноцветных маркеров или ручек. Лучше если они будут собственными, чтобы не приходилось присить их у однокурсников и тем самым не отвлекать их во время лекции. Целесообразно разработать собственную «маркографию» (значки, символы), сокращения слов. Не лишним будет и изучение основ стенографии. Работая над конспектом лекций, всегда необходимо использовать не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть знаниями.

2 Подготовка к практическим занятиям

Подготовку к каждому практическому занятию студент должен начать с ознакомления с методическими указаниями, которые включают содержание работы. Тщательное продумывание и изучение вопросов основывается на проработке текущего материала лекции, а затем изучения обязательной и дополнительной литературы, рекомендованную к данной теме. На основе индивидуальных предпочтений студенту необходимо самостоятельно выбрать тему доклада по проблеме и по возможности подготовить по нему презентацию.

Если программой дисциплины предусмотрено выполнение практического задания, то его необходимо выполнить с учетом предложенной инструкции (устно или письменно). Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса. Результат такой работы должен проявиться в способности студента свободно ответить на теоретические вопросы семинара, его выступлении и участии в коллективном обсуждении вопросов изучаемой темы, правильном выполнении практических заданий и контрольных работ.

В зависимости от содержания и количества отведенного времени на изучение каждой темы практическое занятие может состоять из четырех-пяти частей:

1. Обсуждение теоретических вопросов, определенных программой дисциплины.

2. Доклад и/ или выступление с презентациями по выбранной проблеме.

3. Обсуждение выступлений по теме – дискуссия.

4. Выполнение практического задания с последующим разбором полученных результатов или обсуждение практического задания.

5. Подведение итогов занятия.

Первая часть – обсуждение теоретических вопросов – проводится в виде фронтальной беседы со всей группой и включает выборочную проверку преподавателем теоретических знаний студентов. Примерная продолжительность — до 15 минут. Вторая часть — выступление студентов с докладами, которые должны сопровождаться презентациями с целью усиления наглядности восприятия, по одному из вопросов практического занятия. Обязательный элемент доклада – представление и анализ статистических данных, обоснование социальных последствий любого экономического факта, явления или процесса. Примерная продолжительность — 20-25 минут. После докладов следует их обсуждение – дискуссия. В ходе этого этапа практического занятия могут быть заданы уточняющие вопросы к докладчикам. Примерная продолжительность – до 15-20 минут. Если программой предусмотрено выполнение практического задания в рамках конкретной темы, то преподавателями определяется его содержание и дается время на его выполнение, а замет идет обсуждение результатов. Подведением итогов заканчивается практическое занятие.

В процессе подготовки к практическим занятиям, студентам необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у студентов свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет студентам проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

3 Самостоятельное изучение темы. Конспект

Конспект – наиболее совершенная и наиболее сложная форма записи. Слово «конспект» происходит от латинского «conspectus», что означает «обзор, изложение». В правильно составленном конспекте обычно выделено самое основное в изучаемом тексте, сосредоточено внимание на наиболее существенном, в кратких и четких формулировках обобщены важные теоретические положения.

Конспект представляет собой относительно подробное, последовательное изложение содержания прочитанного. На первых порах целесообразно в записях ближе держаться тексту, прибегая зачастую к прямому цитированию автора. В дальнейшем, по мере выработки навыков конспектирования, записи будут носить более свободный и сжатый характер.

Конспект книги обычно ведется в тетради. В самом начале конспекта указывается фамилия автора, полное название произведения, издательство, год и место издания. При цитировании обязательная ссылка на страницу книги. Если цитата взята из собрания сочинений, то необходимо указать соответствующий том. Следует помнить, что четкая ссылка на источник – непременное правило конспектирования. Если конспектируется статья, то указывается, где и когда она была напечатана.

Конспект подразделяется на части в соответсвтии с заранее продуманным планом. Пункты плана записываются в тексте или на полях конспекта. Писать его рекомендуется четко и разборчиво, так как небрежная запись с течением времени становиться малопонятной для ее автора. Существует правило: конспект, составленный для себя, должен быть по возможности написан так, чтобы его легко прочитал и кто-либо другой.

Формы конспекта могут быть разными и зависят от его целевого назначения (изучение материала в целом или под определенным углом зрения, подготовка к докладу, выступлению на занятии и т.д.), а также от характера произведения (монография, статья, документ и т.п.). Если речь идет просто об изложении содержания работы, текст конспекта может быть сплошным, с выделением особо важных положений подчеркиванием или различными значками.

В случае, когда не ограничиваются переложением содержания, а фиксируют в конспекте и свои собственные суждения по данному вопросу или дополняют конспект соответствующими материалами их других источников, следует отводить место для такого рода записей. Рекомендуется разделить страницы тетради пополам по вертикали и в левой части вести конспект произведения, а в правой свои дополнительные записи, совмещая их по содержанию.

Конспектирование в большей мере, чем другие виды записей, помогает вырабатывать навыки правильного изложения в письменной форме важные теоретических и практических вопросов, умение четко их формулировать и ясно излагать своими словами.

Таким образом, составление конспекта требует вдумчивой работы, затраты времени и труда. Зато во время конспектирования приобретаются знания, создается фонд записей.

Конспект может быть текстуальным или тематическим. В текстуальном конспекте сохраняется логика и структура изучаемого произведения, а запись ведется в соответствии с расположением материала в книге. За основу тематического конспекта берется не план произведения, а содержание какой-либо темы или проблемы.

Текстуальный конспект желательно начинать после того, как вся книга прочитана и продумана, но это, к сожалению, не всегда возможно. В первую очередь необходимо составить план произведения письменно или мысленно, поскольку в соответствии с этим планом строится дальнейшая работа. Конспект включает в себя тезисы, которые составляют его основу. Но, в отличие от тезисов, конспект содержит краткую запись не только выводов, но и доказательств, вплоть до фактического материала. Иначе говоря, конспект – это расширенные тезисы, дополненные рассуждениями и доказательствами, мыслями и соображениями составителя записи.

Как правило, конспект включает в себя и выписки, но в него могут войти отдельные места, цитируемые дословно, а также факты, примеры, цифры, таблицы и схемы, взятые из книги. Следует помнить, что работа над конспектом только тогда будет творческой, когда она не ограничена текстом изучаемого произведения. Нужно дополнять конспект данными из другими источников.

В конспекте необходимо выделять отдельные места текста в зависимости от их значимости. Можно пользоваться различными способами: подчеркиваниями, вопросительными и восклицательными знаками, репликами, краткими оценками, писать на полях своих конспектов слова: «важно», «очень важно», «верно», «характерно».

В конспект могут помещаться диаграммы, схемы, таблицы, которые придадут ему наглядность.

Составлению тематического конспекта предшествует тщательное изучение всей литературы, подобранной для раскрытия данной темы. Бывает, что какая-либо тема рассматривается в нескольких главах или в разных местах книги. А в конспекте весь материал, относящийся к теме, будет сосредоточен в одном месте. В плане конспекта рекомендуется делать пометки, к каким источникам (вплоть до страницы) придется обратиться для раскрытия вопросов. Тематический конспект составляется обычно для того, чтобы глубже изучить определенный вопрос, подготовиться к докладу, лекции или выступлению на семинарском занятии. Такой конспект по содержанию приближается к реферату, докладу по избранной теме, особенно если включает и собственный вклад в изучение проблемы.