МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине **«Методы решения задач электроэнергетики и электротехники»**

Направление подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) подготовки – Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов

Невинномысск, 2025

Содержание

Введение

Дисциплина «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» изучается студентами направления подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника (профиль подготовки – «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов») на 1-м курсе, когда закладываются базовые знания. Так как, кроме освоения теоретического материала, требуется закрепление полученных знаний, поэтому в учебном процессе высших учебных заведений наряду с теоретическим обучением значительное место отводится выполнению практических работ. Правильное сочетание теоретических знаний с практическими работами обеспечивает высокое качество подготовки выпускников.

Основной целью дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» является формирование у студентов практических навыков по планированию, проведению, анализу и оптимизации результатов исследования сложных процессов профессиональной деятельности выпускника по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника.

Задачами курса являются: изучение методов теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, применение математического аппарата численных методов при решении задач электроэнергетики и электротехники.

Тема "Комплексные числа"

Практическое занятие №1

Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Комплексным числом Z называется выражение вида $Z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x. Число x называется действительной частью комплексного числа Z и обозначается $x = \mathrm{Re}Z$, а y – мнимой частью Z и обозначается $y = \mathrm{Im}\, Z$. Запись числа Z в виде $Z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

2. Два комплексных числа $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными ($Z_1 = Z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $Z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Пример 1. При каких действительных значениях x и y выполняются равенства:

а) $x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i$;

б) $ix^2 + (3 - i)x - (1 - 2i)y = 2 + 2i$?

Решение: а) преобразуем левую часть выражения, а именно, выделим действительную и мнимую части комплексного числа:

$2x - y - xi + 2yi = 4 - 5i$

$(2x - y) + (-x + 2y)\,i = 4 + (-5)i$

Используя условие равенства двух комплексных чисел, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} + \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 3 \\ y = \dfrac{x-5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -2 \end{cases}$$

б) аналогично преобразуем левую часть:

$3x - y + ix^2 - xi + 2yi = 2 + 2i,$

$(3x - y) + (x^2 - x + 2y)i = 2 + 2i,$ откуда

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 - x + 2(3x-2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + 5x - 6 + 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x_1 = -6; x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -20, y_2 = 1, \\ x_1 = -6, x_2 = 1. \end{cases}$$

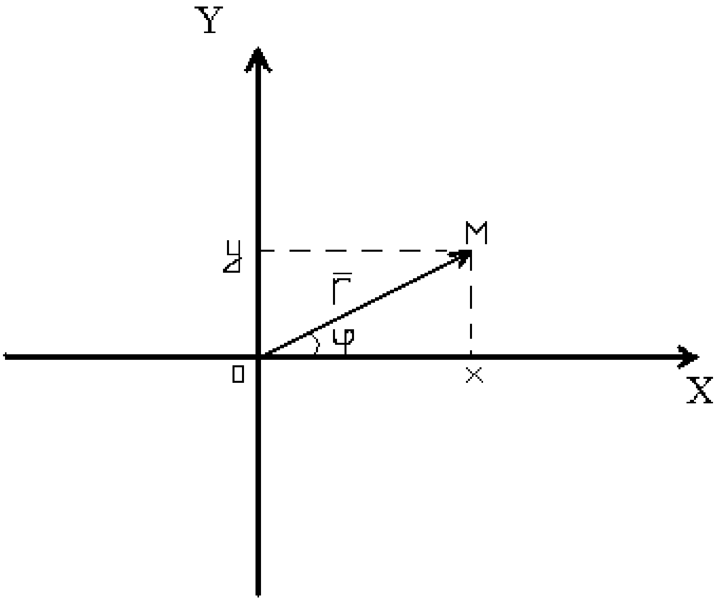
3. Два комплексных числа $Z = x + iy$ и $\bar{Z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными.**

Например: $1 + i$ и $1 - i$; $2i$ и $-2i$.

Комплексные числа, отличающиеся знаком действительной и мнимой частей, называются **противоположными.**

3. Всякое комплексное число $Z = x + iy$ можно изобразить точкой M(x;y) плоскости Oxy такой, что x = ReZ, y = ImZ. Ось OX называется действительной, ось OY-мнимой. И, наоборот, каждую точку M(x;y) координатной плоскости можно рассматривать как об-

раз комплексного числа Z = $x + iy$. Комплексное число Z можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y\}$.



Пример 2. Изобразите геометрически следующие комплексные числа и им сопряженные: а) 3; б) $2i$; в) $-2-3i$; г) $1 + 2i$.

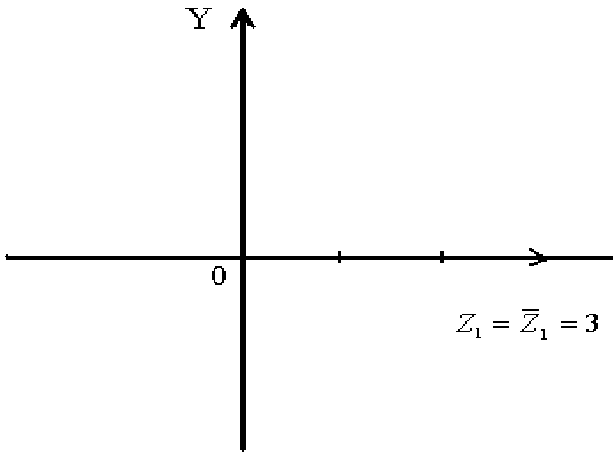
Решение:

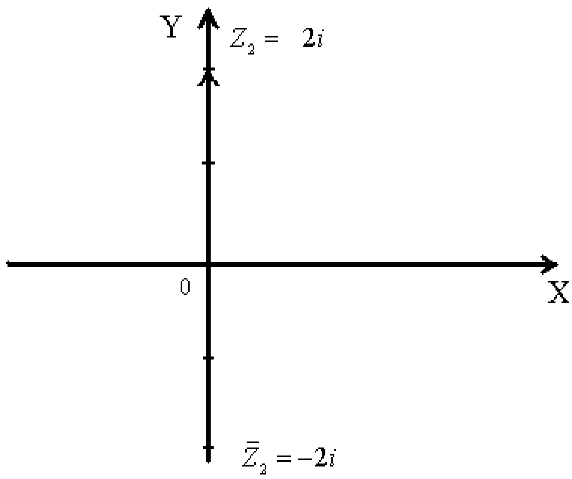
а) $Z_1 = 3 = 3 + 0i$

$\overline{Z_1} = 3 - 0i = 3$, т.е. $Z_1 = \overline{Z_1}$.

б) $Z_2 = 2i = 0 + 2i$

$\overline{Z_2} = 0 - 2i = -2i$.



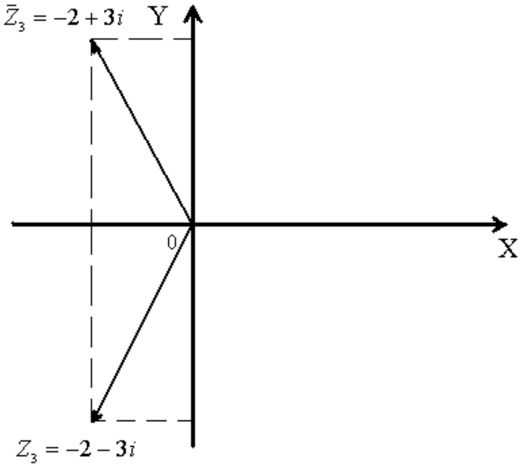


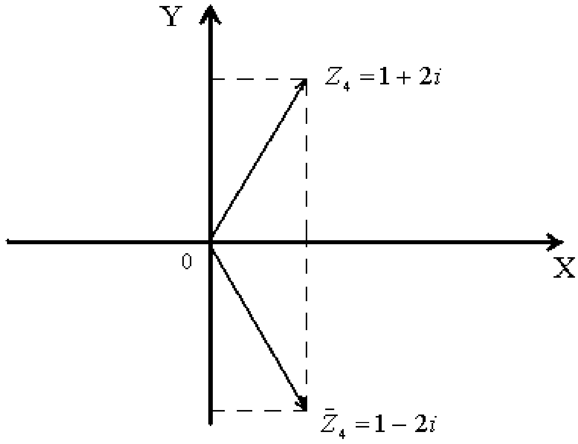
в) $Z_3 = -2 - 3i$

$\overline{Z_3} = -2 + 3i$

г) $Z_4 = 1 + 2i$

$\overline{Z_4} = 1 - 2i$





5. Длина вектора $\vec{r}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|Z|$ или r : r = $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается Arg Z или φ. Arg Z = arg Z + $2\pi\kappa$, κ- любое целое число ; arg Z – главное значение аргумента,

-π< arg Z ≤ π. Аргумент φ определяется из формулы: tg $\varphi = \frac{y}{x}$.

Так как $-\pi < \arg Z \le \pi$, то из формулы: $tg\varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg Z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & \text{Для внутренних точек I, IV четвертей} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi & \text{Для внутренних точек II четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi & \text{Для внутренних точек III четверти} \end{cases}$$

Если точка Z лежит на действительной или мнимой оси, то arg Z можно найти непосредственно.

Пример 3. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; б) –3i.

Решение:

а) $Z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $|Z_1|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$\arg Z_1 = arctg\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=arctg(-1)=-arctg1=-\frac{\pi}{4}$ - главное значение аргумента, т.к. $-\pi<-\frac{\pi}{4}<\pi$.

б) $Z_2=-3i=0-3i$

$|Z_2|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

Из изображения числа Z_2 следует, что $\arg Z_2=-\frac{\pi}{2}$ - главное значение, т.к. $-\pi<-\frac{\pi}{2}<\pi$.

6. Суммой двух комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$Z=Z_1+Z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Свойства сложения комплексных чисел:

a) $Z_1+Z_2=Z_2+Z_1$

b) $(Z_1+Z_2)+Z_3=Z_1+(Z_2+Z_3)$.

7. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Если $Z_1=x_1+iy_1, Z_2=x_2+iy_2$, то

$$Z=Z_1-Z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

8. Произведением комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равен-

ством: $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Заметим, что $Z \cdot \overline{Z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + y^2$ - действительное число.

Свойства умножения комплексных чисел:

a) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$.

b) $(Z_1 \cdot Z_2)\cdot Z_3 = Z_1(Z_2 \cdot Z_3)$

c) $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$.

Например:

$(2-3i)(-5+4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$

9. Деление определяется как действие, обратное умножению. Если $Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$, то $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 4. Выполните деление $\dfrac{1+3i}{2+i}$.

Решение: $\dfrac{1+3i}{2+i} = \dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+6i+3}{4+1} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i.$

Пример 5. Выполните указанные действия:

а) (2 – 3i) – (i – 2);

б) (2 – i) (i + 1) – (1,5i + 1) 4i;

в) $\dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{i}{2-i}$;

г) $\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{1-i}{1+2i}(2-i)$;

д) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$.

Решение:

а) (2 – 3i) – (i – 2) = 2 – 3i – i + 2 = 4 – 4i;

$б)\ \ (2-i)\cdot(i+1)-(1{,}5i+1)\cdot 4i = 2i-i^2+2-i-6i^2-4i =$
$= 2i+1+2-i+6-4i = 9-3i;$

$в)\ \ \dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{i}{2-i} = \dfrac{2-i+i(1+2i)}{(1+2i)(2-i)} = \dfrac{2-i+i+2i^2}{(1+2i)(2-i)} = \dfrac{2-i+i-2}{(1+2i)(2-i)} =$

$= \dfrac{0}{(1+2i)(2-i)} = 0;$

$г)\ \ \dfrac{2}{1+i}-\dfrac{1-i}{1+2i}\cdot(2-i) = \dfrac{2}{1+i}-\dfrac{2-2i-i+i^2}{1+2i} = \dfrac{2}{1+i}-\dfrac{2-2i-i-1}{1+2i} =$

$= \dfrac{2}{1+i}-\dfrac{1-3i}{1+2i} = \dfrac{2(1+2i)-(1-3i)(1+i)}{(1+i)(1+2i)} = \dfrac{2+4i-(1-3i+i-3i^2)}{1+i+2i+2i^2} =$

$= \dfrac{2+4i-1+3i-i-3}{1+i+2i-2} = \dfrac{-2+6i}{-1+3i} = \dfrac{2(-1+3i)}{(-1+3i)} = 2;$

$д)\ \ (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot i\sqrt{2}+(i\sqrt{2})^2 = 2+2\cdot 2i+i^2\cdot 2 = 2+4i-2 = 4i$

Пример 6. Определите полное сопротивление цепи $Z = \dfrac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}$,

если известно $Z_1 = (6+8i)$ Ом; $Z_2 = 8i$ Ом.

Решение:

$$Z = \frac{(6+8i)\cdot 8i}{6+8i+8i} = \frac{48i+64i^2}{6+16i} = \frac{-64+48i}{6+16i} = \frac{-32+24i}{3+8i} =$$
$$= \frac{(-32+24i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)} = \frac{-96+72i+256i-192i^2}{9+64} =$$
$$= \frac{-96+328i+192}{73} = \frac{96+328i}{73} \approx (1{,}32+4{,}5i)\,Ом\ .$$

Пример 7. Постройте на плоскости комплексного переменного линии, заданные уравнениями:

а) $|Z-2i| = 3;$

б) $\mathrm{Re}\left(Z^2\right) = 1;$

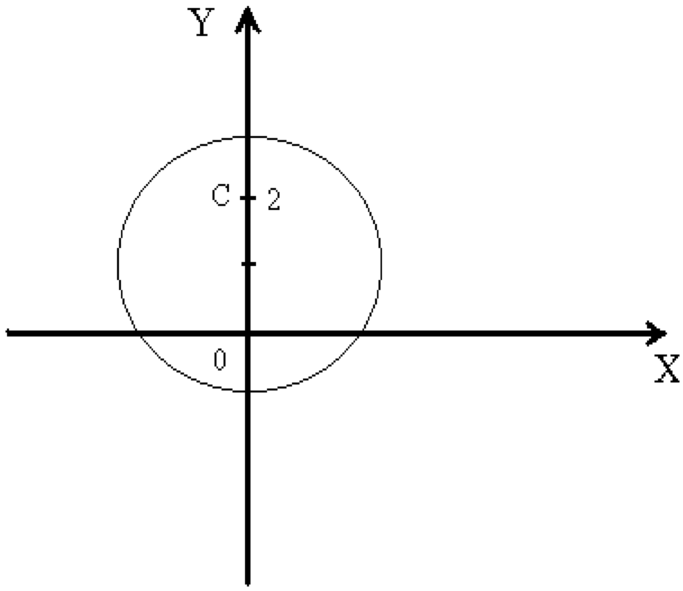
в) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $2\operatorname{Re} Z - (JmZ)^2 = 1$.

Решение: а) $|Z - 2i| = 3$.

Т.к. Z = x + iy, то Z – 2i = x + iy – 2i = x + i(y – 2).

Найдем $|Z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$. По условию $|Z - 2i| = 3$, т.е. $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3$, $x^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Это уравнение задает окружность с центром в т. С (0;2), радиуса 3.



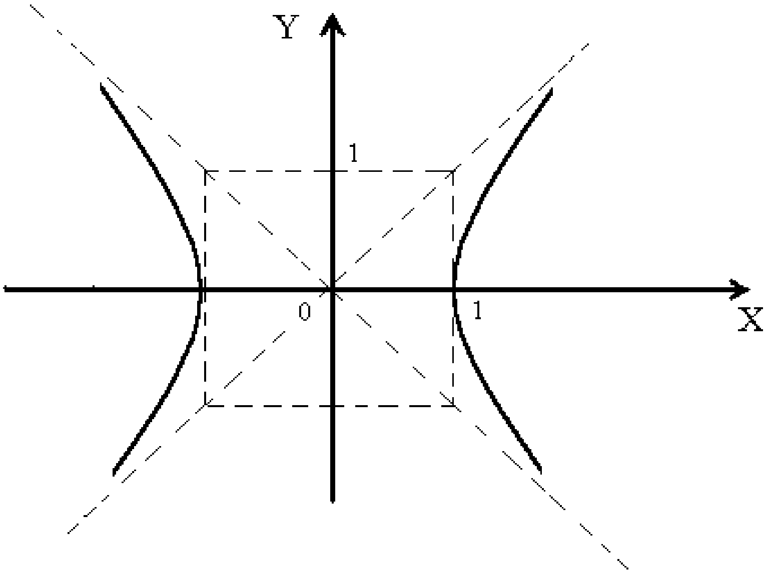
б) $\operatorname{Re}(Z^2) = 1$.

Т.к. Z = $x + iy$, то

$Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$

$\operatorname{Re}(Z^2) = x^2 - y^2.$

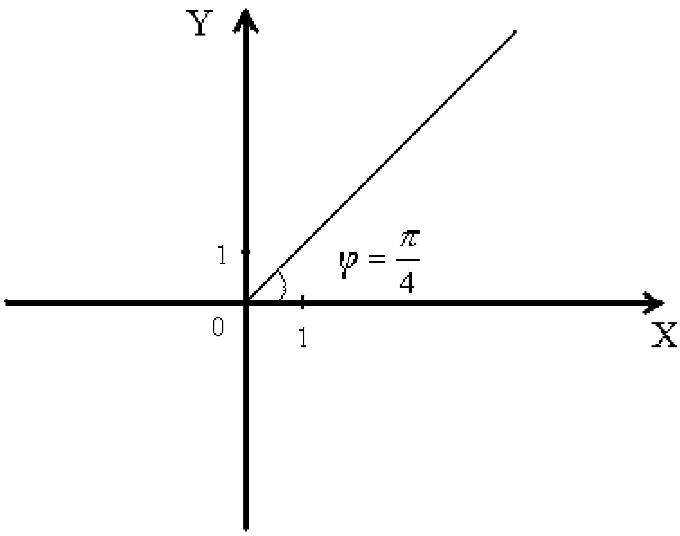
По условию $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение равнобочной гиперболы. Вершина находится в начале координат, полуоси: а = в = 1.



в) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = arctg\dfrac{y}{x}$, то $arctg\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{y}{x} = 1, y = x$. Это уравнение прямой (биссектриса I и III координатных четвертей).

Рассматриваем точки прямой y = x, лежащие только в I четверти.

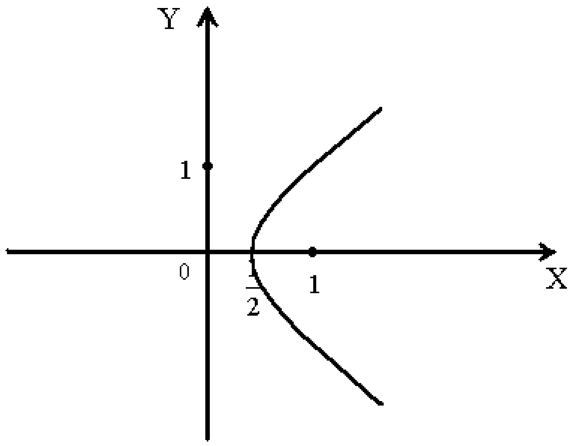


г) $2\operatorname{Re} Z - (JmZ)^2 = 1$.

Т.к. Z=x+iy, то ReZ=x, ImZ=y, тогда

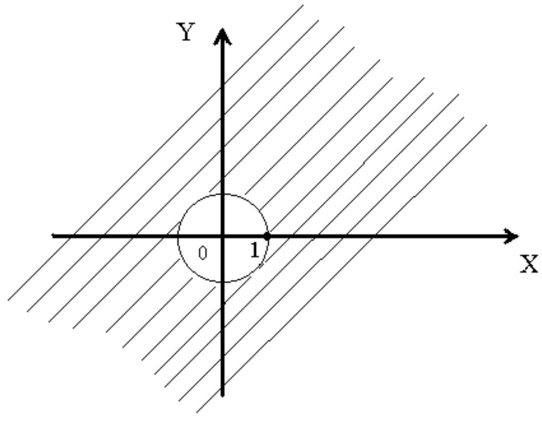
$2x - y^2 = 1, \qquad 2x = y^2 + 1, \qquad x = \dfrac{y^2 + 1}{2}.$

Это уравнение параболы, вершина в точке с координатами $\left(\frac{1}{2};0\right)$, ось OX – ось симметрии.



Пример 8. Изобразите области, заданные условиями:а) $|Z| \geq 1$; б) $|Z+2-i| \lhd 3$; в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$; г) $1 \leq |z-1+i|^2 \leq 4$; д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2, \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ Решение:

а) $|Z| \geq 1$.Т.к. Z = x + iy, $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$, то



$\sqrt{x^2+y^2} \geq 1, x^2+y^2 \geq 1$.

б) $|Z+2-i| < 3$;

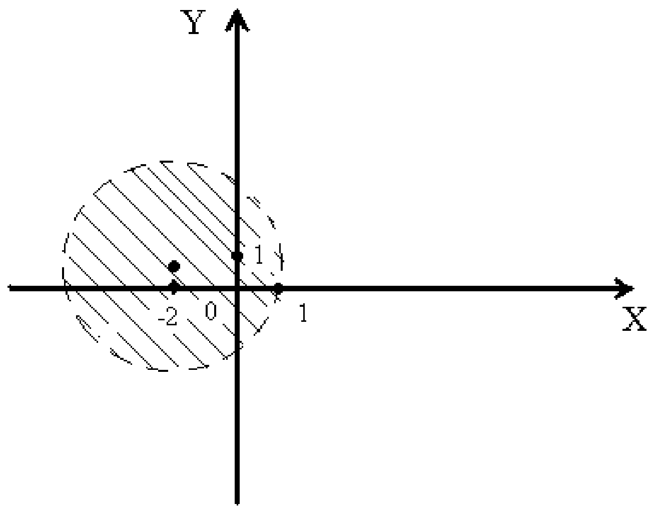
Т.к. Z = $x + iy$, то $Z+2-i = x+iy+2-i = (x+2)+(y-1)i$

Найдем $\left|Z+2-i\right|=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}.$

По условию $\left|Z+2-i\right|<3,$ т.е.

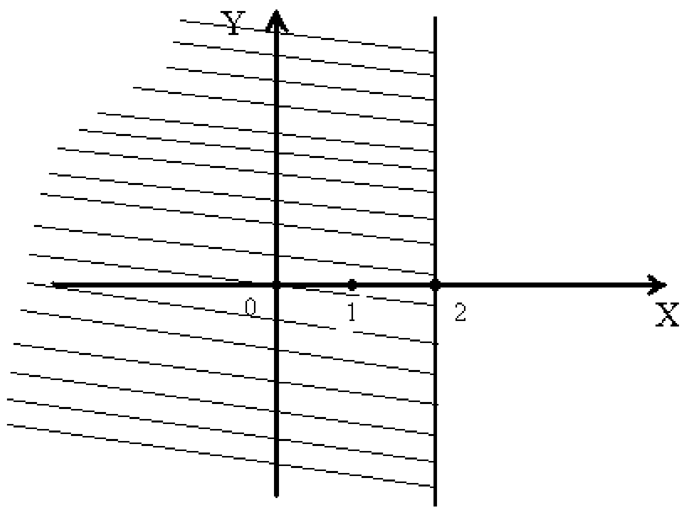
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}<3$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2<9.$$



в) $\operatorname{Re} Z \le 2.$

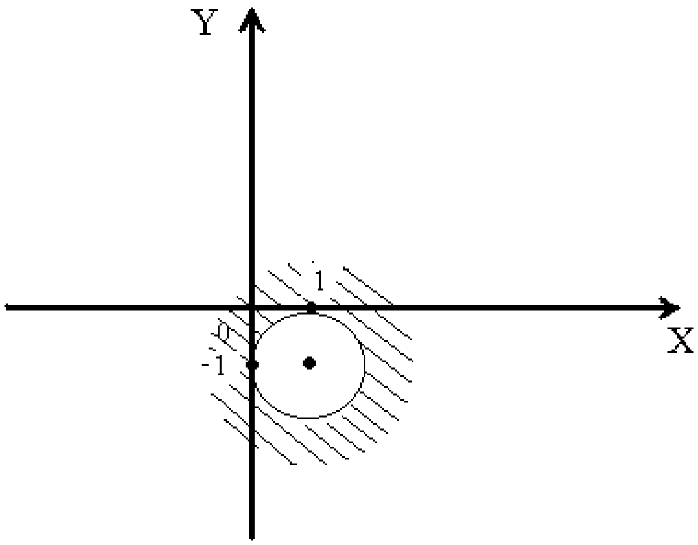
Т.к. $Z = x + iy$, $\operatorname{Re} Z = x$, то $x \le 2$.



г) $1 \le \left|Z-1+i\right|^2 \le 4.$

Т.к. $Z = x + iy$, $Z - 1 + i = x + iy - 1 + i = (x - 1) + (y + 1)\,i$,

$|Z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}, |Z-1+i|^2=(x-1)^2+(y+1)^2,$ то $1\le (x-1)^2+(y+1)^2 \le 4.$



д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \le 2 \\ 0 \le \arg Z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

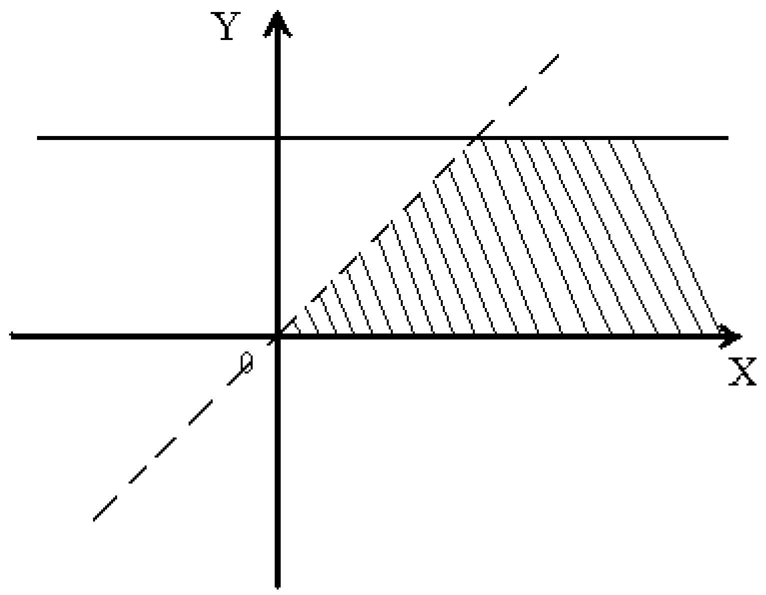
$JmZ \le 2.$

Т.к. Z = $x + iy$, ImZ = y, то $y \le 2$, $0 \le \arg Z < \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = arctg\frac{y}{x}$, то $0 \le arctg\frac{y}{x} < \frac{\pi}{4}$; $tg0 \le \frac{y}{x} < tg\frac{\pi}{4}$

$0 \le \frac{y}{x} < 1$; $0 \le y < x.$

Т.о., $\begin{cases} y \le 2 \\ 0 \le y \lhd x \end{cases}$



Решите задачи

1.1. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

2; -i; -2; 3 – 2i; 1 + 2i; - 1 – i.

1.2. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

1) $Z_1 = 4 + 5i; Z_2 = 3 - 2i.$

2) $Z_1 = 0{,}5 - 3{,}2i; Z_2 = 1{,}5 - 0{,}8i.$

3) $Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i; Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$

б) Найдите разность и частное комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

1) $Z_1 = 3 + 4i; \quad Z_2 = 0{,}4 - 0{,}2i.$

2) $Z_1 = 1 - 2i; \quad Z_2 = 0{,}6.$

3) $Z_1 = \sqrt{5} - i; \quad Z_2 = \sqrt{5} - 2i.$

1.3. Найдите мнимую часть Z, если:

1) $$Z=(2-i)^3\cdot(2+11i).$$

2) $$Z=\frac{2-3i}{1+4i}+i^6.$$

3) $$Z=\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}-\frac{1}{i}.$$

1.4. Выполните действия:

1) $$i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}.$$

2) $$2i\cdot(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\cdot(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

3) $$\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}.$$

4) $$\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}.$$

5) $$\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$$

6) $$(7+i)\cdot(2-i)-(3+5i)\cdot(-i).$$

7) $$i(3-i)-(2+3i)\cdot(1-i).$$

8) $$\frac{3}{i}+\frac{5-i}{2}-\frac{10+i}{1+i.}$$

1.6. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа:

а) $Z_1 = 2i\,(x+2yi)+3x$ и $Z_2 = 1-2i$;

б) $Z_2 = y^2-7y+9xi$ и $Z_2 = -12+20i+x^2i$

равны.

1.7. Найдите модуль комплексного числа Z:

1) Z = -4;

2) Z = $-i$;

3) $Z = -5 - 2\sqrt{6}\,i$;

4) $Z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$;

5) $Z = \dfrac{2-i}{1+i}$.

1.8. В плоскости комплексного переменного начертите линии, заданные уравнениями:

1) $|Z + 1| = 1$;

2) $|Z - 2| + |Z + 2| = 26$;

3) $|Z - 2|^2 + |Z + 2|^2 = 26$;

4) $|Z|^2 + 3Z + 3Z = 0$;

5) $|2i - Z|^2 = 1$;

6) $\mathrm{Im}Z^2 = 4$;

7) $\arg Z = \dfrac{3\pi}{4}$;

8) $(\mathrm{Im}Z)^2 = 4 - \mathrm{Re}\,Z$.

1.9. Изобразите области, заданные условиями:

1) $|Z + 2i - 1| \le 2$;

2) $|Z - i| < |Z + i|$;

3) $\lg|Z - 10i| < 2$;

4) $1 \le \mathrm{Re}\,Z \le 4$;

5) $|Z + i| \le 1$;

6) $\dfrac{\pi}{6} < \arg Z < \dfrac{\pi}{4}$;

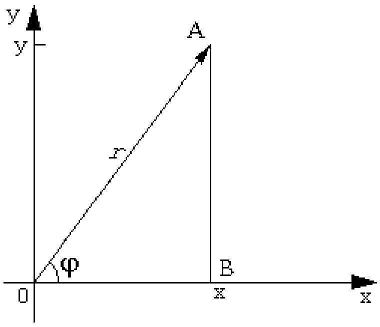
7) $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg Z \le \dfrac{\pi}{2}$;

8) $\begin{cases} 1 < \mathrm{Re}\,Z < 2 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg Z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

Практическое занятие № 2

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Показательная функция комплексного переменного

1. Рассмотрим комплексное число Z в алгебраической форме: $z = x + iy$. Изобразим это число на комплексной плоскости в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \{x, y\}$.Рассмотрим ΔAOB, где $B(x,0)$.



Пусть r - модуль комплексного числа z; -один из его аргументов (любой). Тогда из ΔAOB следует, что $x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi$. Откуда число z запишется в виде: $z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi$. Представление числа z в виде: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа z.

Пример 1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = -1 - i, z_2 = -2, z_3 = i, z_4 = -3 + 4i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, а $\varphi_1 = arctg\frac{y}{x} - \pi = arctg\frac{-1}{-1} - \pi = arctg1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$, то $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Так как $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, а $\varphi_2 = \pi$ (по изображению числа на плоскости), то $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$. Учитывая, что $|z_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, а $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$ - один из аргументов z_3, получаем $|z_3| = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

В связи с тем что $|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, а

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg}\frac{4}{-3} + \pi \approx 2{,}21424\,рад \approx 126^o 52',$$

получаем $z_4 = 5(\cos(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}) + i\sin(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}))$

или $\quad z_4 = 5(\cos 126^o 52' + i\sin 126^o 52'))$.

Пример 2. Записать числа в тригонометрической форме

$$z_1 = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4}, z_2 = -\cos\frac{\pi}{17} - i\sin\frac{\pi}{17}$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos\dfrac{7\pi}{4} = \cos(-\dfrac{\pi}{4})$, а $-\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin(-\dfrac{\pi}{4})$, тогда получим тригонометрическую форму для z_1: $\quad z_1 = 2(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4})$. Аналогично учитывая, что $-\cos\dfrac{\pi}{17} = \cos(\pi - \dfrac{\pi}{17}) = \cos\dfrac{16\pi}{17}, \sin\dfrac{\pi}{17} = \sin(\pi - \dfrac{\pi}{17}) = \sin\dfrac{16\pi}{17}$,

получаем $\quad z_2 = \cos\dfrac{16\pi}{17} - i\sin\dfrac{16\pi}{17}$.

2. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$, $\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)$,

то-

гда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_1(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Пример 3. Найти произведение чисел

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}) \text{ и } z_2 = \sqrt{8}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}).$$

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{16} = 4$.

Аргументом произведения $z_1 \cdot z_2$ будет сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}.$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 4\cos(\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8})$ или

$$z_1 \cdot z_2 = 4\cos(\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}).$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = \dfrac{(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \cdot (\sqrt{3} + i)}{i - 1}$.

Решение. Число $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, и аргумент $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$; число $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $|z| = \dfrac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \dfrac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

а аргумент $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi$.

Следовательно, $z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{11\pi}{12}) + i\sin(-\frac{11\pi}{12}))$.

3. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$ (**формула Муавра**), где $n \in \mathrm{N}$.

Пример 5. Вычислить. $(\sqrt{3} - i)^9$.

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, откуда по формуле Муавра имеем

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9(\cos 9(-\frac{\pi}{6}) + i\sin 9(-\frac{\pi}{6})) = 512(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}) = 512i.$$

4.**Корнем n-ой степени** из комплексного числа Z называется такое комплексное число W (обозначается $\sqrt[n]{Z}$), если $W^n = Z$.

Все значения корня n-ой степени из $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ содержатся в формуле $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + \pi k}{n}\right)$ (1), где k=0,1,2,…,n-1.

Пример 6.Найти все значения:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3} - i}$.

Решение: а) запишем число Z=-16 в тригонометрической форме $Z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Согласно формуле (1) получаем

$$W_k = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) = i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right)$$, где k=0,1,2,3.

Следовательно,

$$W_0 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\cdot$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right),$$ где k=0,1,2.

Получаем

$$W_0 = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

в) Пусть $Z = \sqrt{3} - i$, тогда $|Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1) = 2}$,

$$\varphi = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Поформуле (1) имеем

$$W_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2}\right)\right),$$ где k=0,1.

$$W_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}i,$$

$$W_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}i.$$

Пример7. Записать число $\dfrac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$ в алгебраической форме при условии, что действительные части корней $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5+12i}$ отрицательны.

Решение. Для извлечения квадратного корня из числа $5+12i$ положили $\sqrt{5+12i}=x+iy$, тогда $5+12i=x^2+2xyi-y^2$ и, следовательно, x и y удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases}x^2-y^2=5\\ xy=6\end{cases}$.

Решив эту систему, получим два решения $(3;2)$ и $(-3;-2)$. По условию действительная часть отрицательна, поэтому $\sqrt{5+12i}=-3-2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i}=-3+2i$. Таким образом, $Z=\dfrac{-3-2i-(-3+2i)}{-3-2i+(-3+2i)}=\dfrac{2}{3}i$.

5. Пусть $z=x+iy$. Если x и y действительные переменные, то z называется **комплексной переменной.**

Если каждому значению комплексной переменной z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w, то w есть функция комплексной переменной z. Функции комплексного аргумента обозначают w=f(z) или w=w(z)

В качестве примера рассмотрим одну функцию комплексной переменной - показательную функцию $w = e^z$, или $w = e^{x+iy}$.

Комплексные значения функции w определяются так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2)$$

Свойства показательной функции:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

3. $(e^z)^m = e^{mz}$ где m – целое число

4. $e^{z+2\pi i} = e^z$

Если в формуле (2) положим x=0, то получим $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Это есть **формула Эйлера**. С ее помощью можно от тригонометрической записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ перейти к показательной форме $z = re^{i\varphi}$ где r - модуль числа z, а φ- его аргумент.

а) Если $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$,

то $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, (3)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (4)$$

б) Если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^n e^{in\varphi}$ (5)

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi K}{n})i}$, где к=0,1,2,3,4,5...,n-1.

Пример 8. Представить в показательной форме комплексное число $z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$.

Решение. Находим модуль числа $|z|=\sqrt{\frac{3}{64}+\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$ и один из его аргументов $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$., откуда, $z=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Пример 9. Записать в показательной форме комплексное число

$$z=\frac{(-\sqrt{3}+i)(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})}{1-i}.$$

Решение: каждое из чисел $-\sqrt{3}+i,\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12},i-1$ представим в показательной форме

$$-\sqrt{3}+i=2e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})=e^{-\frac{\pi}{12}i}.$$

Используя формулы (3), (4) получаем

$$z=\frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i}e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Пример 10. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

Решение: $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi(12K+1)i}{24}}$ (к=0,1,2,3).

Решите задачи

2.1. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $Z = -\sqrt{3} + i$,

2) $Z = -1$,

3) $Z = -\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$,

4) $Z = 1 + \cos\dfrac{10\pi}{9} + i\dfrac{10\pi}{9}$,

5) $Z = \mathrm{tg}1 - i$.

2.2. Записать комплексное число

в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $$Z = \frac{i\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}},$$

2) $$Z = \frac{1}{\cos\dfrac{4\pi}{3} - i\sin\dfrac{4\pi}{3}},$$

3) $$Z = \frac{1}{(1+i)^2},$$

4) $$Z = \frac{-\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{13\pi}{12} - i\sin\dfrac{13\pi}{12}},$$

5) $$Z = \frac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}.$$

2.3. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z:

1) $Z = \dfrac{5\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)i}{3\left(\cos 40^0 - i\sin 40^0\right)}$,

2) $Z = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{5} + i\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

2.4 . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

1) $Z = \left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$,

2) $Z = \left(\cos 31^0 + i\sin 31^0\right)^{-10}$,

3) $Z = -\dfrac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^6}$,

4) $Z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

2.5. Записать комплексное число Z в тригонометрической форме:

1) $Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{100}$,

2) $Z = \left(\dfrac{\sqrt{3}i + 1}{i - 1}\right)^6$,

3) $Z = \dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n \in N$,

4) $Z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4$,

5) $Z\left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

2.6. Найти значения $\sqrt[n]{Z}$ если:

1) $Z = -1, n = 3$,

2) $Z = 8i, n = 3$,

3) $Z = 1, n = 5$,

4) $Z = 1 + i, n = 8$.

2.7 . Решить уравнения:

1) $Z^3 = 1 + i$,

2) $Z^4 + 1 = 0$,

3) $Z^5 = 1 + \sqrt{3}i$,

4) $Z^6 + 64 = 0$,

5) $Z^2 = \overline{Z}^3$.

2.8 . Представить Z в алгебраической форме:

1) $Z = e^{2-i}$,

2) $Z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i}$,

3) $Z = e^{3i + 7 + 3\pi i - \frac{\pi}{2}i}$.

2.9. Представить в показательной форме комплексное числа:

1) $Z = -\sqrt{12} - 2i$,

2) $Z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

2.10. Записать в показательной и алгебраической формах комплексное число:

1) $Z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$,

2) $Z = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{-3}$,

3) $Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$,

4) $Z=\dfrac{1}{\left(\cos 12^0+i\sin 12^0\right)^5}$,

5) $Z=\dfrac{e^{-\frac{\pi i}{3}}\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}{i}$.

2.11. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{Z}$:

1) $Z=1, n=3$,

2) $Z=-1, n=5$,

3) $Z=-4+\sqrt{48}i, n=3$,

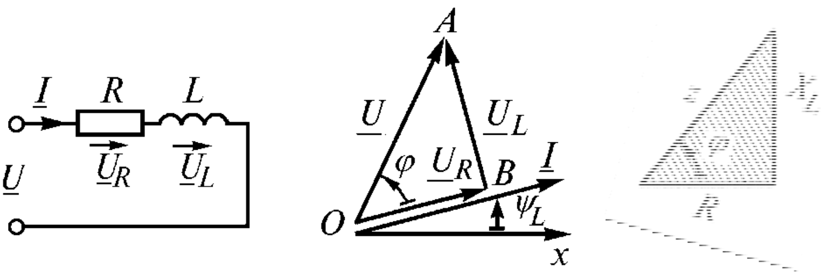
4) $Z=-1-\sqrt{3}i, n=4$.

Практическое занятие №3
Символический метод расчета цепей электрических цепей синусоидального тока

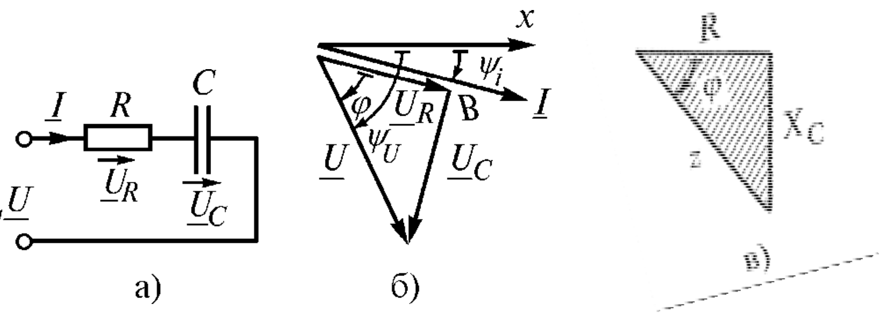
Цель занятия: объяснение символического метода расчета электрических цепей синусоидального тока; рассмотрение электрических цепей с сосредоточенными элементами (R, L, C) и представление расчета таких цепей.

Методика проведения занятия: Необходимы теоретические сведения

1. Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку:

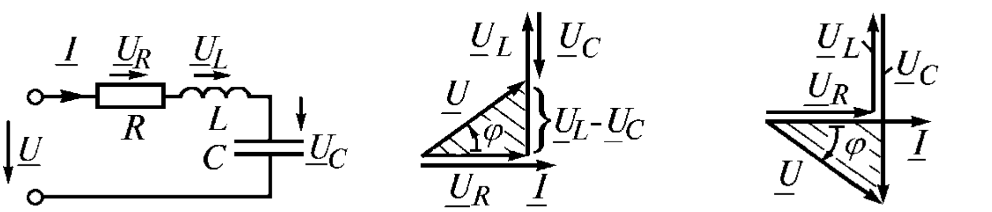


2. Цепь, содержащая резистор и конденсатор:

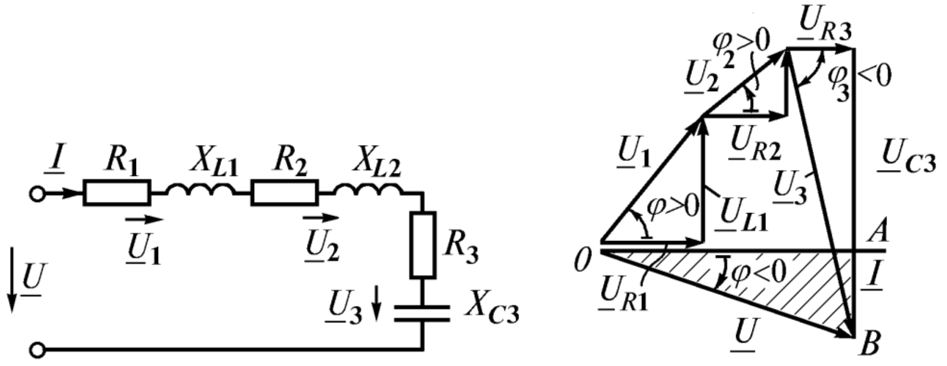


а) б)

3. Цепь, содержащая последовательное соединение резистора, катушки и

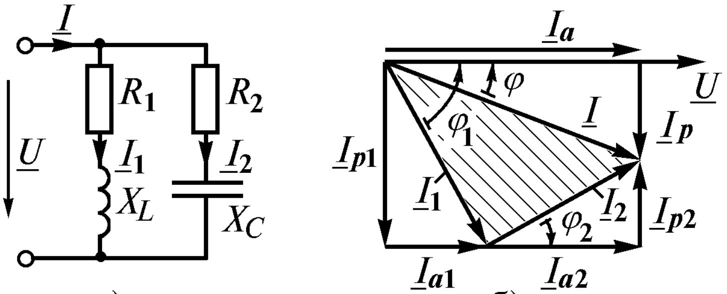


конденсатора:



а) б)

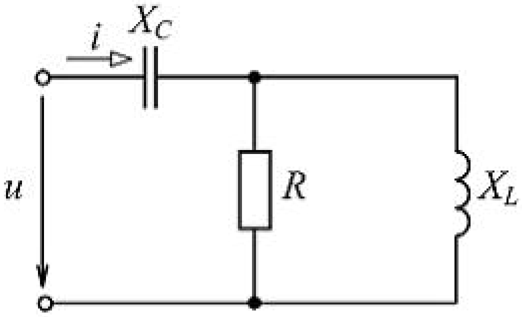
4. Цепь, содержащая параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора:



а) б)

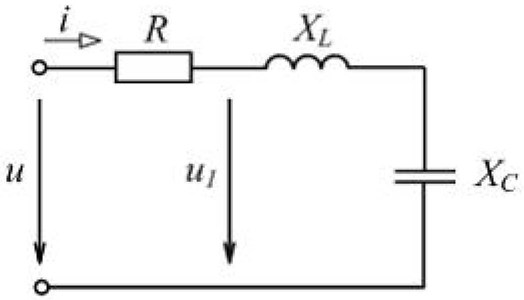
Примеры решения задач:

1. **Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями**



При $R = X_L = X_C = 20\ Ом$ комплексное входное сопротивление цепи (см. рис.) $\underline{Z}_{вх}$ равно ____ $Ом$, напряжение u __________ по фазе от тока *i* на угол …

2. **Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями**



При $u = 282{,}8 \sin \omega t\ В,\ R = 6\ Ом,\ X_L = 10\ Ом,\ X_C = 2\ Ом$ действующее значение напряжения U_1 в цепи, показанной на рисунке, равно ___ *В*. Построить векторную диаграмму.

Тема "Ряды Фурье"

Практическое занятие №4

Разложение аналитической функции в ряд Фурье

Рядом Фурье периодической функции f(x) с периодом 2π, определенной на сегменте [–π, π], называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx), \qquad (1)$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx\,(n=0,1,2,\dots), \qquad (2)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx\,(n=0,1,2,\dots), \qquad (3)$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма S(x) есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. S(x+2π) = S(x).

Теорема Дирихле. Пусть функция f(x) на сегменте [–π, π] имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента [–π, π] и сумма этого ряда S(x) вычисляется:

1) S(x) = f(x) во всех точках неразрывности f(x), лежащих внутри сегмента [–π, π];

2) $S(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0-0)]+f(x_0+0)$, где x_0 – точка разрыва 1-го рода функции f(x);

3) $S(x)=\frac{1}{2}[f(\pi-0)]+f(\pi+0)$ на концах промежутка, т.е. при $x=\pm\pi$.

В случае, когда f(x) – четная функция, ее ряд Фурье содержит только свобоный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cosnx, \qquad (4)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)cosnxdx\,(n=0,1,2,\dots). \qquad (5)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, dx, \qquad (6)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \qquad (7)$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π. В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом 2ℓ, для которой выполняются на сегменте $[-\ell, \ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \qquad (8)$$

где

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (9)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (10)$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (11)$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\,. \qquad (12)$$

В случае, когда $f(x)$- нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (13)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (14)$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную на интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

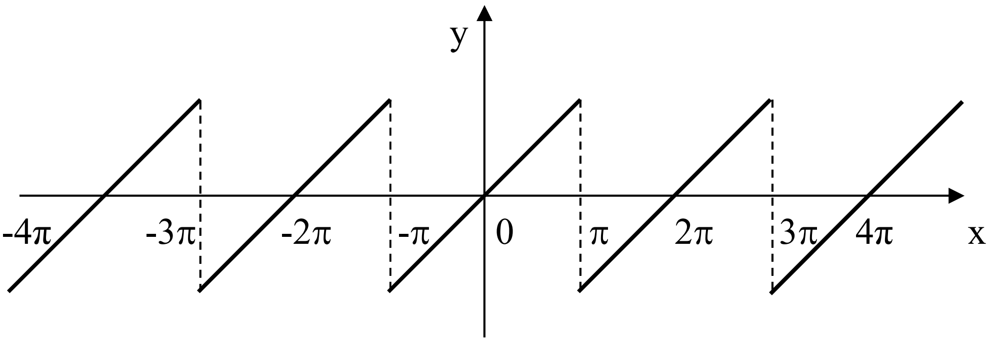


Рис. 1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты Фурье $\left(\text{интегрируем по частям} \left\| \begin{matrix} x = u, & \sin nx\,dx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right\| \right)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx}_{=0} \right] = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

т.к. $-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + ...\right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-n\pi$ и $n\pi$ сумма ряда равна нулю. На рис. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

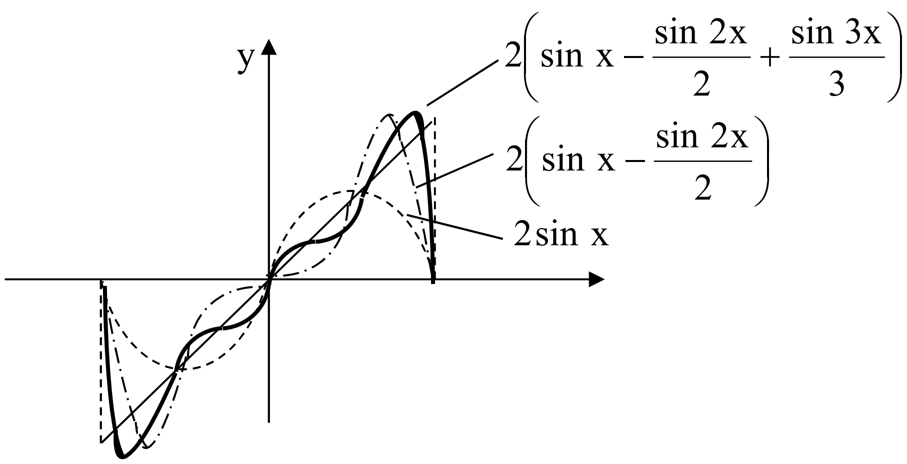


Рис. 2

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0; \quad a < x \le \pi \\ 1, & 0 < x < a \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \ x = a \end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

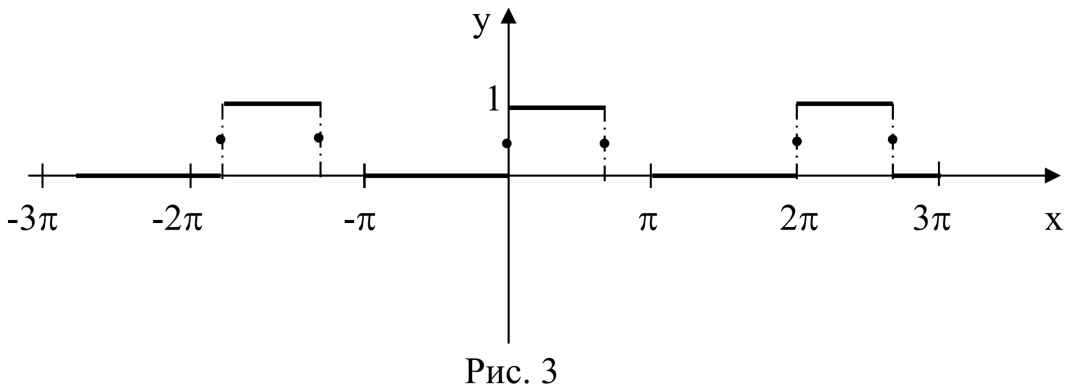


Рис. 3

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a dx = \frac{x}{\pi}\bigg|_0^a = \frac{a}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\bigg|_0^a = \frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^a f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}(-\cos nx)\Big|_0^a=\frac{\cos nx}{\pi n}\Big|_0^a=\frac{1-\cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n\pi}\cdot\cos nx+\frac{1-\cos na}{n\pi}\cdot\sin na.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T=4$, заданную на интервале $(0;4)$ формулой $f(x)=\begin{cases}6, & 0<x<2,\\ 3x, & 2<x<4.\end{cases}$

Построим график функции (рис. 4).

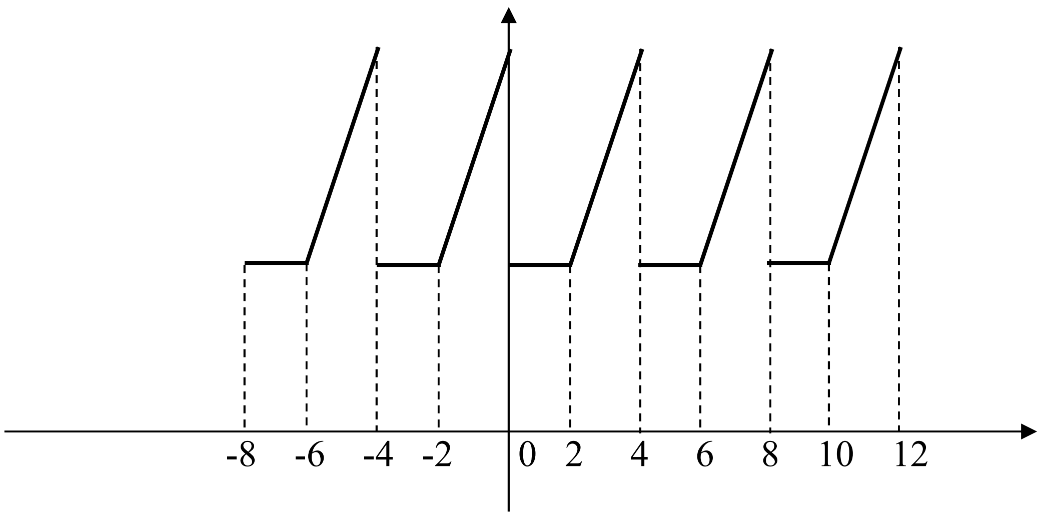


Рис. 4

Решение. Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell=2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x=2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4 3x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{2\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi),\quad n\neq 0.$$

При а – четном $\cos n\pi=1$ и $x_n=0$, при n – нечетном $\cos n\pi=-1$ и $a_n=\dfrac{12}{n^2\pi^2}$.

При n=0

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cdot 12\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_2^0+\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_2^4+\underbrace{\int_2^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}dx}_{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12(1-\cos n\pi)-3(2\cdot 4\cos 2\pi n-4\cos\pi n)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12-\cancel{12\cos n\pi}+24+\cancel{12\cos n\pi}\right]=\frac{-12}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0,2)$ сумма ряда $S(x)=6$, в интервале $(2,4)$ - $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(2-0)+f(2+0)\right]=6.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x) = |\,x\,|$ (рис. 5).

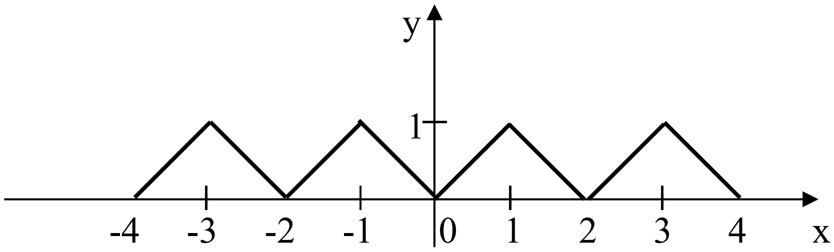


Рис. 5

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell = 1$, получим $a_0 = 2\int\limits_0^1 x\,dx = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1$,

$$a_n = 2\int\limits_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\left.\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\right|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четные}, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

Ответ: $f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{12} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[0, 2\pi]$ формулой $f(x) = \frac{x}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой $y=|\sin x|$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\dfrac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{\cos 2kx}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\ldots\right]$.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x)=\pi+x$.

Ответ: $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0\le x<1, \\ 2-x & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \end{cases} \qquad f(x+2)=f(x).$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -3<x\le 0, \\ x & \text{при} \quad 0<x<3, \end{cases} \qquad f(x+6)=f(x).$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{3}-\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{3}$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x)=10-x$ при $5<x<15$, $f(x+10)=f(x)$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\dfrac{n\pi x}{5}}{n}$.

Практическое занятие №5

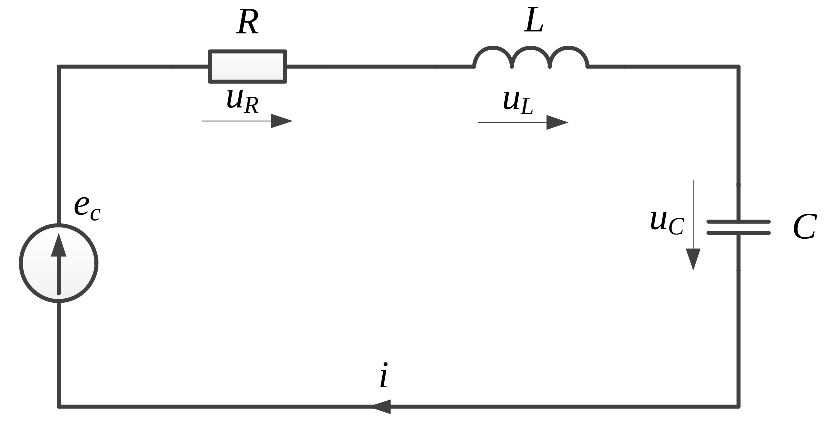
Использование комплексных чисел и рядов Фурье к расчету электрических цепей несинусоидального тока

Цель: закрепить навыки использования комплексных чисел и рядов Фурье для анализа электрических цепей.

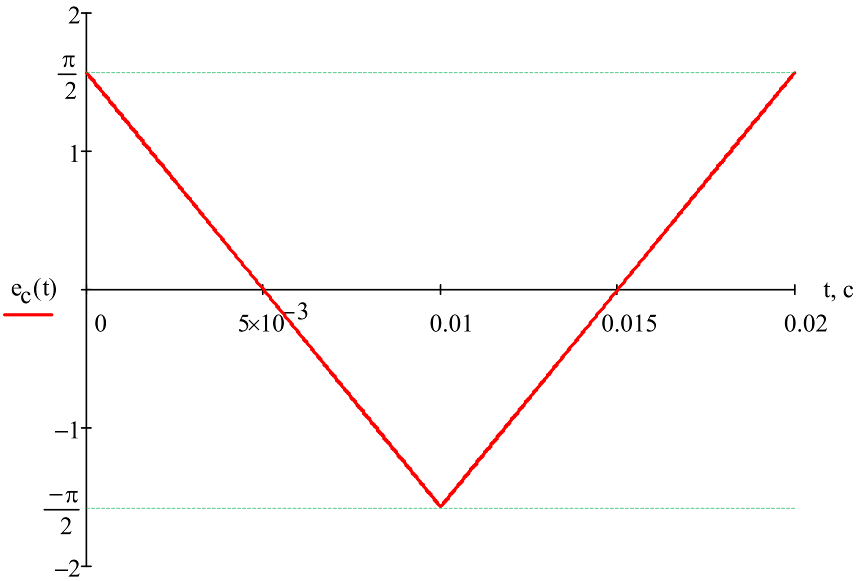
Задание: используя разложение в ряд Фурье сигналов (треугольного и однополупериодного выпрямления), рассчитать электрическую цепь, состоящую из последовательного соединения источника несинусоидального напряжения, резистивного, емкостного и индуктивного элемента. При разложении в ряд Фурье ограничиться 7 первыми гармониками, построить временные зависимости тока, протекающего в электрической цепи, напряжений на резистивного, емкостного и индуктивного элементах.

Указания: параметры элементов L = 100 мГн; C = 100 мкФ; R = 30 Ом.
Частота основной (первой) гармоники 50 Гц.
Для расчета необходимо перейти от мгновенного значения каждой гармоники к комплексу ее действующего значения, рассчитать комплексное сопротивление элементов, произвести расчет для данной гармоники, произвести переход от комплекса действующего значения к мгновенному.

Схема цепи



Форма воздействующего напряжения



Частота воздействующего напряжения

$f = 50\text{Гц} \quad \omega = 2\pi f = 314.159\cdot\text{рад/с}$

Разложение в ряд Фурье (пример 5 из ПЗ № 6 с заменой cosφ на sin(φ+π/2))

$$e_c(t) = \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{100}\frac{\sin\left[(2k+1)\cdot\omega\cdot t+\frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)^2}$$

Мгновенные значения первых гармоник

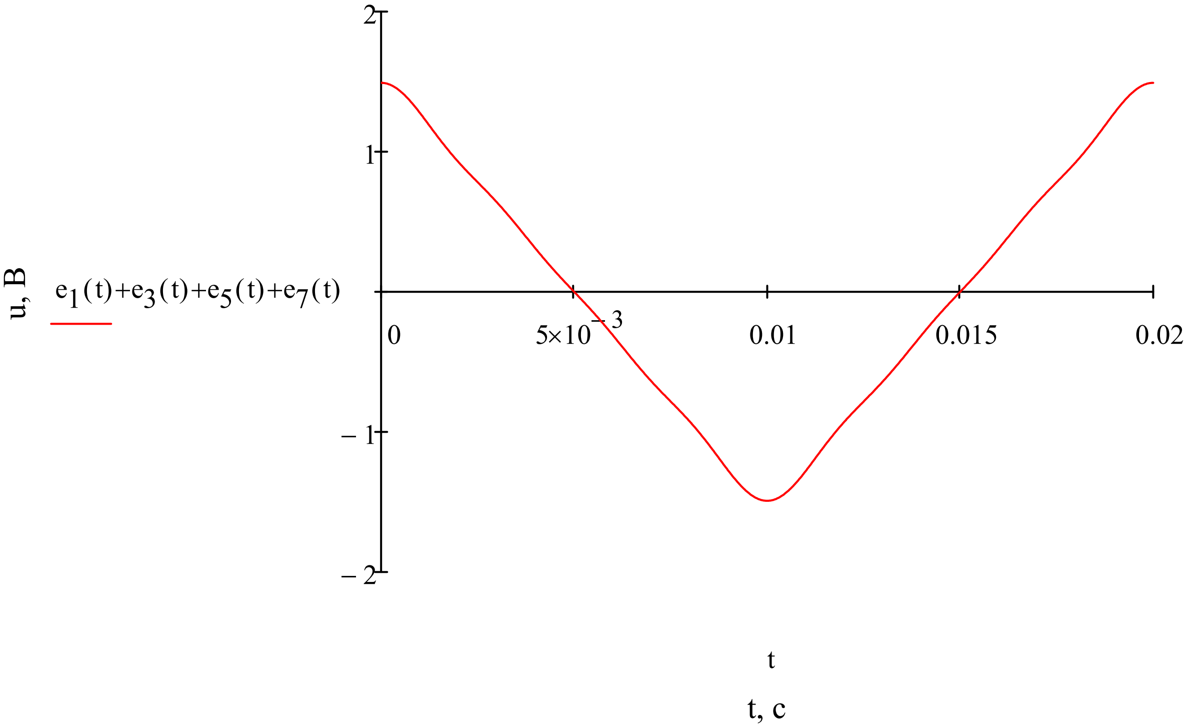
$$e_1(t) = \frac{4}{\pi}\cdot\sin\left(100\pi\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\text{В}$$

$$e_3(t) = \frac{4}{9\pi}\cdot\sin\left(300\pi\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\text{В}$$

$$e_5(t) = \frac{4}{25\pi}\cdot\sin\left(500\pi\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\text{В}$$

$$e_7(t) = \frac{4}{49\pi}\cdot\sin\left(700\pi\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\text{В}$$

Исходный сигнал



Комплексы действующих значений первых гармоник

$$\underline{E_1} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.9j\cdot B$$

$$\underline{E_3} = \frac{4}{9\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.1j\cdot B$$

$$\underline{E_5} = \frac{4}{25\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.036j\cdot B$$

$$\underline{E_7} = \frac{4}{49\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.018j\cdot B$$

Параметры элементов

$C = 100\cdot10^{-6}Ф \quad L = 100\cdot10^{-3}Гн \quad R = 30Ом$

Сопротивления для гармоник, нулевая (постоянная составляющая) отстутствует

$$\underline{x_{C1}} = \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C} = -31.831j\cdot Ом$$

$$\underline{x_{L1}} = j\cdot\omega\cdot L = 31.416j\cdot Ом$$

$$\underline{Z_1} = R + \underline{x_{C1}} + \underline{x_{L1}} = (30 - 0.415j)\cdot Ом$$

$$\underline{x_{C3}} = \frac{\underline{x_{C1}}}{3} = -10.61j\cdot Ом$$

$$\underline{x_{L3}} = \underline{x_{L1}}\cdot 3 = 94.248j\cdot Ом$$

$\underline{Z_3} = R + \underline{X_{C3}} + \underline{X_{L3}} = (30 + 83.637j)\cdot Ом$

$\underline{X_{C5}} = \frac{\underline{X_{C1}}}{5} = -6.366j\cdot Ом$

$\underline{X_{L5}} = \underline{X_{L1}}\cdot 5 = 157.08j\cdot Ом$

$\underline{Z_5} = R + \underline{X_{C5}} + \underline{X_{L5}} = (30 + 150.713j)\cdot Ом$

$\underline{X_{C7}} = \frac{\underline{X_{C1}}}{7} = -4.547j\cdot Ом$

$\underline{X_{L7}} = \underline{X_{L1}}\cdot 7 = 219.911j\cdot Ом$

$\underline{Z_7} = R + \underline{X_{C7}} + \underline{X_{L7}} = (30 + 215.364j)\cdot Ом$

Расчет для первой гармоники

$\underline{I_1} = \frac{\underline{E_1}}{\underline{Z_1}} = \left(-4.151\times 10^{-4} + 0.03j\right)\cdot A$

$\left|\underline{I_1}\right| = 0.03\cdot A \qquad \psi 1 = \arg\left(\underline{I_1}\right) = 1.585 = 90.814\cdot °$

$\underline{U_{R1}} = \underline{I_1}\cdot R = (-0.012 + 0.9j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{R1}}\right| = 0.9\cdot B \qquad \psi_{R1} = \arg\left(\underline{U_{R1}}\right) = 1.585 = 90.814\cdot °$

$\underline{U_{L1}} = \underline{I_1}\cdot\underline{X_{L1}} = (-0.943 - 0.013j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{L1}}\right| = 0.943\cdot B \qquad \psi_{L1} = \arg\left(\underline{U_{L1}}\right) = -3.128 = -179.221\cdot °$

$\underline{U_{C1}} = \underline{I_1}\cdot\underline{X_{C1}} = (0.955 + 0.013j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{C1}}\right| = 0.955\cdot B \qquad \psi_{C1} = \arg\left(\underline{U_{C1}}\right) = 0.01383 = 0.792\cdot °$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_1(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{I_1}\right|\cdot\sin(100\pi\cdot t + \psi 1) = 0.04244\cdot\sin(314.2\cdot t + 1.585) \ A$

$u_{R1}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{R1}}\right|\cdot\sin\left(100\pi\cdot t + \psi_{R1}\right) = 1.273\cdot\sin(314.2\cdot t + 1.585) \ B$

$u_{L1}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{L1}}\right|\cdot\sin\left(100\pi\cdot t + \psi_{L1}\right) = 1.333\cdot\sin(314.2\cdot t - 3.128) \ B$

$u_{C1}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{C1}}\right|\cdot\sin\left(100\pi\cdot t + \psi_{C1}\right) = 1.351\cdot\sin(314.2\cdot t + 0.01383) \quad B$

Расчет для третьей гармоники

$\underline{I_3} = \frac{\underline{E_3}}{\underline{Z_3}} = \left(1.06\times 10^{-3} + 3.801j\times 10^{-4}\right)\cdot A$

$\left|\underline{I_3}\right| = 1.126\times 10^{-3}\cdot A \quad \psi 3 = \arg\left(\underline{I_3}\right) = 0.3444 = 19.733\cdot °$

$\underline{U_{R3}} = \underline{I_3}\cdot R = (0.032 + 0.011j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{R3}}\right| = 0.034\cdot B \qquad \psi_{R3} = \arg\left(\underline{U_{R3}}\right) = 0.3444 = 19.733\cdot °$

$\underline{U_{L3}} = \underline{I_3} \cdot \underline{X_{L3}} = (-0.036 + 0.1j) \cdot B$

$\left|\underline{U_{L3}}\right| = 0.106 \cdot B \qquad \psi_{L3} = \arg\left(\underline{U_{L3}}\right) = 1.915 = 109.721 \cdot {}^\circ$

$\underline{U_{C3}} = \underline{I_3} \cdot \underline{X_{C3}} = \left(4.033 \times 10^{-3} - 0.011j\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{C3}}\right| = 0.012 \cdot B \qquad \psi_{C3} = \arg\left(\underline{U_{C3}}\right) = -1.226 = -70.245 \cdot {}^\circ$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{I_3}\right| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi 3) = 0.001592 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.344 \cdot A$

$u_{R3}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{R3}}\right| \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \psi_{R3}\right) = 0.04776 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.3444) \;\; B$

$u_{L3}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{L3}}\right| \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \psi_{L3}\right) = 0.1501 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 1.915) \;\; B$

$u_{C3}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{C3}}\right| \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \psi_{C3}\right) = 0.01689 \cdot \sin(942.5 \cdot t - 1.226) \quad B$

Расчет для пятой гармоники

$\underline{I_5} = \dfrac{\underline{E_5}}{\underline{Z_5}} = \left(2.298 \times 10^{-4} + 4.575j \times 10^{-5}\right) \cdot A$

$\left|\underline{I_5}\right| = 2.344 \times 10^{-4} \cdot A \qquad \psi 5 = \arg\left(\underline{I_5}\right) = 0.1965 = 11.259 \cdot {}^\circ$

$\underline{U_{R5}} = \underline{I_5} \cdot R = \left(6.895 \times 10^{-3} + 1.373j \times 10^{-3}\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{R5}}\right| = 7.031 \times 10^{-3} \cdot B \qquad \psi_{R5} = \arg\left(\underline{U_{R5}}\right) = 0.1965 = 11.259 \cdot {}^\circ$

$\underline{U_{L5}} = \underline{I_5} \cdot \underline{X_{L5}} = \left(-7.186 \times 10^{-3} + 0.036j\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{L5}}\right| = 0.037 \cdot B \qquad \psi_{L5} = \arg\left(\underline{U_{L5}}\right) = 1.767 = 101.242 \cdot {}^\circ$

$\underline{U_{C5}} = \underline{I_5} \cdot \underline{X_{C5}} = \left(2.913 \times 10^{-4} - 1.463j \times 10^{-3}\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{C5}}\right| = 1.492 \times 10^{-3} \cdot B \qquad \psi_{C5} = \arg\left(\underline{U_{C5}}\right) = -1.374 = -78.724 \cdot {}^\circ$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_5(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{I_5}\right| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi 5) = 0.0003314 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$

$u_{R5}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{R5}}\right| \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \psi_{R5}\right) = 0.009943 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$

$u_{L5}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{L5}}\right| \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \psi_{L5}\right) = 0.05206 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 1.767)$

$u_{C5}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{C5}}\right| \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \psi_{C5}\right) = 0.00211 \cdot \sin(1571.0 \cdot t - 1.374)$

Расчет для седьмой гармоники

$\underline{I_7} = \dfrac{\underline{E_7}}{\underline{Z_7}} = \left(8.369 \times 10^{-5} + 1.166j \times 10^{-5}\right) \cdot A$

$\left|\underline{I_7}\right| = 8.45 \times 10^{-5} \cdot A \qquad \psi 7 = \arg\left(\underline{I_7}\right) = 0.1384 = 7.93 \cdot {}^\circ$

$\underline{U_{R7}} = \underline{I_7} \cdot R = \left(2.511 \times 10^{-3} + 3.497j \times 10^{-4}\right) \cdot B$

$\left|\underline{U_{R7}}\right| = 2.535 \times 10^{-3} \cdot B \qquad \psi_{R7} = \arg\left(\underline{U_{R7}}\right) = 0.1384 = 7.93 \cdot {}^\circ$

$$\underline{U}_{L7} = \underline{I}_7 \cdot \underline{X}_{L7} = \left(-2.564 \times 10^{-3} + 0.018j\right) \cdot B$$

$$\left|\underline{U}_{L7}\right| = 0.019 \cdot B \qquad \psi_{L7} = \arg\left(\underline{U}_{L7}\right) = 1.709 = 97.918 \cdot °$$

$$\underline{U}_{C7} = \underline{I}_7 \cdot \underline{X}_{C7} = \left(5.301 \times 10^{-5} - 3.806j \times 10^{-4}\right) \cdot B$$

$$\left|\underline{U}_{C7}\right| = 3.842 \times 10^{-4} \cdot B \qquad \psi_{C7} = \arg\left(\underline{U}_{C7}\right) = -1.432 = -82.048 \cdot °$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_7(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{I}_7\right| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi 7) = 0.0001195 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 0.1384)$$

$$u_{R7}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U}_{R7}\right| \cdot \sin\left(700\pi \cdot t + \psi_{R7}\right) = 0.003585 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 0.1384)$$

$$u_{L7}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U}_{L7}\right| \cdot \sin\left(700\pi \cdot t + \psi_{L7}\right) = 0.02628 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 1.709)$$

$$u_{C7}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U}_{C7}\right| \cdot \sin\left(700\pi \cdot t + \psi_{C7}\right) = 0.0005434 \cdot \sin(2199.0 \cdot t - 1.432)$$

Суммируем все гармоники

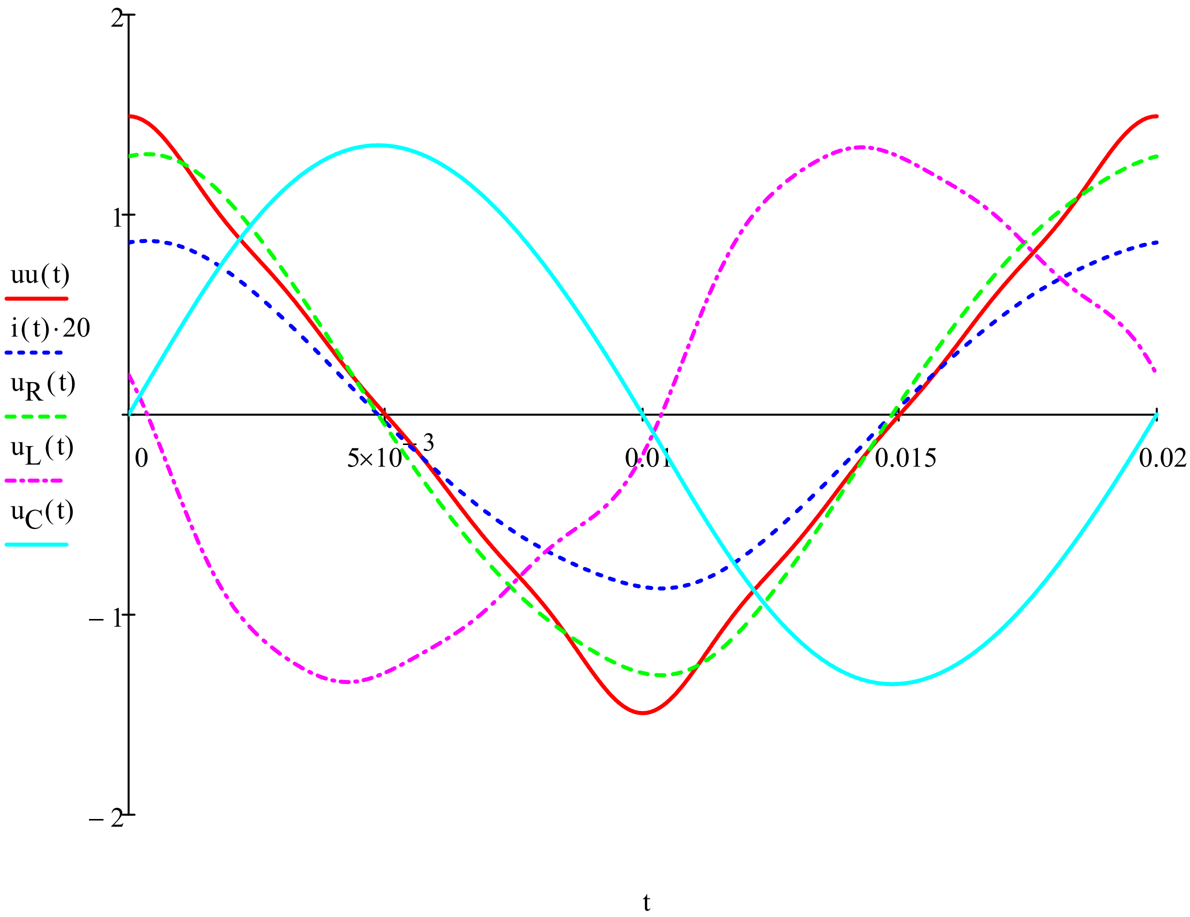
$$u_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R3}(t) + u_{R5}(t) + u_{R7}(t)$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C3}(t) + u_{C5}(t) + u_{C7}(t)$$

$$u_L(t) = u_{L1}(t) + u_{L3}(t) + u_{L5}(t) + u_{L7}(t)$$

$$uu(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) + i_7(t)$$



Тема "Основы операционного исчисления"

Практическое занятие №6

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами

Для того чтобы найти решение x(t) линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t), \tag{11}$$

(где $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \tag{12}$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т.е. от уравнения (11) с условиями (12) перейти к операторному уравнению

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p),$$

где X(p) – изображение искомого решения, F(p) – изображение функции f(t), а Q(p) – некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных x_0, $x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x_0' = \cdots = x_0^{(n-1)} =$ $= 0$. Решив операторное уравнение относительно

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n -$ характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для X(p), получим искомое решение x(t). Если считать $x_0,\ x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (11). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо операторного уравнения получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = -e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq p\,X(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2\,X(p) - p - 2.$$

Кроме того, $-e^t \doteq -\frac{1}{p-1}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид $p^2X(p) - p - 2 + 4X(p) = -\frac{1}{p-1}$.

Отсюда находим $X(p) = \frac{p^2 + p - 3}{(p-1)\left(p^2 + 4\right)}$.

Разлагая эту дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{-1}{5(p-1)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{6p + 11}{p^2 + 4}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, находим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5}\,e^t + \frac{6}{5}\cos 2t + \frac{11}{10}\sin 2t.$$

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 0{,}5; \quad z(0) = 0. \\ z' = z - x; \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = x(t) \doteq X(p) = X$; $y = y(t) \doteq Y(p) = Y$; $z = z(t) \doteq Z(p) = Z$.

Находим, что $x' \doteq p\,X$; $y' \doteq p\,Y - 0{,}5$; $z' \doteq p\,Z$.

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX + Y - Z = 0, \\ \quad pY - Z = 0{,}5 + \dfrac{2}{p+1}, \\ X + (p-1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)\,(p^2-p+1)}{2(p^4-1)},$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2(p^2+1)} \doteq$$

$$\doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2}\sin t.$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)} \doteq \frac{5}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

Ответ: $\quad x(t) \doteq -e^{-t} + \cos t - \dfrac{3}{2}\sin t,$

$$y(t) \doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t},$$

$$z(t) \doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 3. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = e^{2t}\cos^2 6t + \sin 2t \sin 4t + 3.$$

Решение. В силу свойства линейности преобразования Лапласа найдем изображение каждого слагаемого:

$$\cos^2 6t = \frac{1+\cos 12t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12t \doteq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+12^2}.$$

Применяя теорему смещения изображения к первому слагаемому, получим

$$e^{2t}\cos^2 6t \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+144}.$$

Изображение первого слагаемого можно было найти также по таблице оригиналов и изображений, используя формулу 9.

Второе слагаемое

$$\sin 2t \sin 4t = \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 6t \doteq \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}.$$

Третье слагаемое $3 \doteq \frac{3}{p}$. Окончательно получаем

$$f(t) \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2+144} + \frac{p}{2(p^2+4)} - \frac{p}{2(p^2+36)} + \frac{3}{p}.$$

Пример 4. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t \in (1,\ 3) \\ 0, & t \notin (1,\ 3) \end{cases}$$

Решение. Из рисунка 8 видно, что $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$; $f_1(t)=f_3(t-1)$; $f_2=f_4(t-3)$.

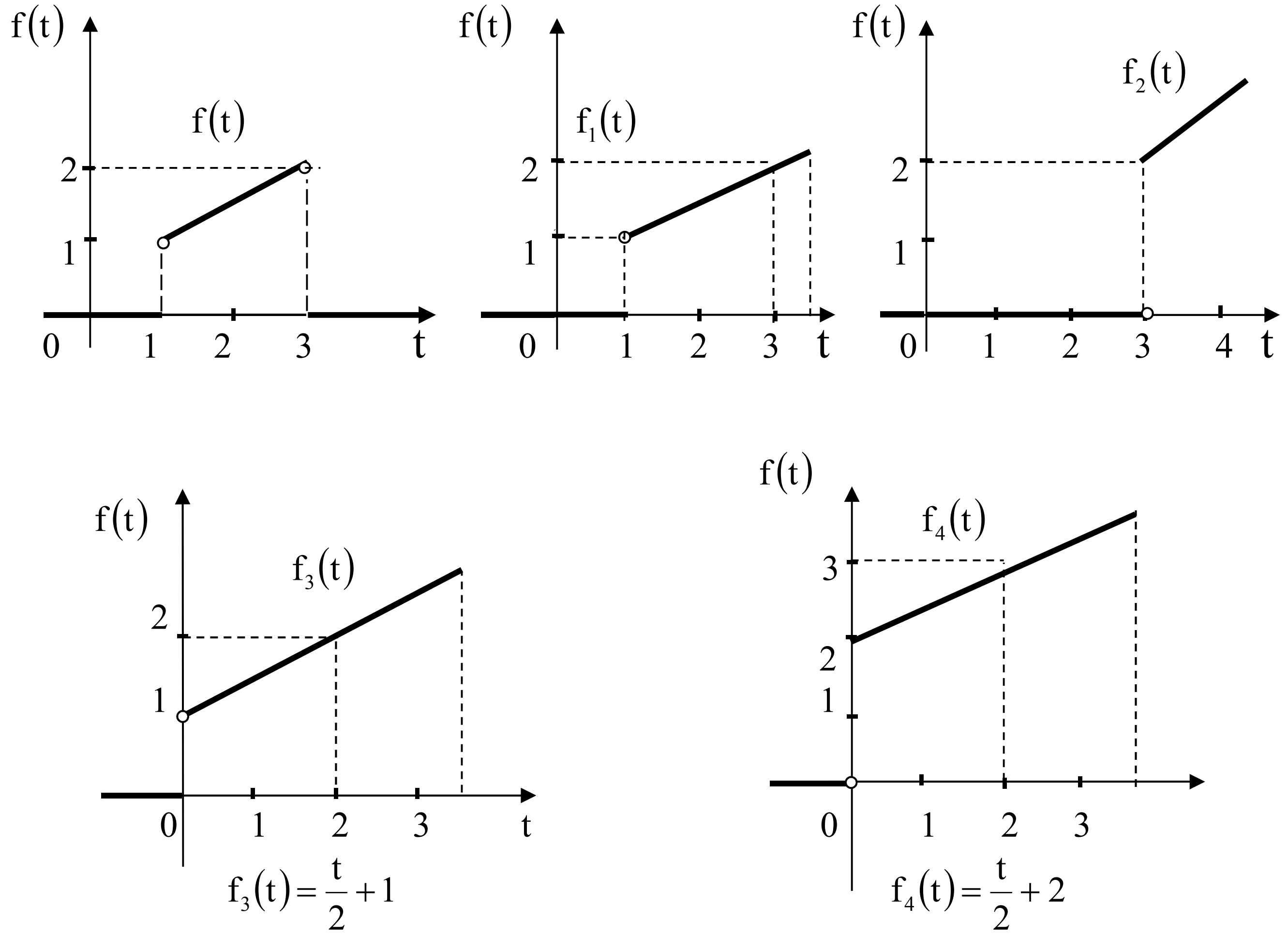


Рисунок 8

Так как $f_3(t)\doteq\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{1}{p}$; $f_4(t)\doteq\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{2}{p}$, по свойству запаздывания оригинала

получаем
$$f(t)\doteq\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{2}{p}\right)e^{-3p}.$$

Образцы решения типовых заданий представлены примерами №№ 10 – 14.

Задания для самостоятельного решения

1 Решить данные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$x''+2x'-3x=e^{-t}, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=1.$$

Данные системы дифференциальных уравнений решить операционным методом при указанных начальных условиях. В некоторых вариантах в скобках указан один из корней характеристического уравнения. $\dot{x}$ означает $\dfrac{dx}{dt}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^{2}. \end{cases} \qquad x(0) = 2, \;\; y(0) = 1.$$

Тема "Численные методы"

Практическое занятие №7

Обработка опытных данных методами интерполирования и аппроксимации

x = 1,54

Прямая интерполяционная формула Ньютона

$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$, где $q = \frac{x - x_0}{h},\ y_i = f_i$, а выражения вида $\Delta^k y_i$ — конечные разности.

Обратная интерполяционная формула Ньютона

$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$, где $q = \frac{x - x_n}{h}$

Решение в Excel приведено на следующей странице.

Результат 21,759.

Решение в Mathcad:

linterp – линейная интерполяция, interp – сплайн интерполяция, cspline – функция подбирающая коэффициенты для кубических сплайнов.

$$x := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 2.718 \\ 3.320 \\ 4.055 \\ 4.953 \\ 6.049 \\ 7.389 \\ 9.025 \\ 11.023 \\ 13.464 \\ 16.445 \\ 20.086 \\ 24.533 \\ 29.964 \\ 36.598 \\ 44.701 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{linterp}(x, y, 1.54) = 21.865$

$\mathrm{interp}(\mathrm{cspline}(x, y), x, y, 1.54) = 21.759$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2	x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
3	0,5	***2,718***	***0,602***	***0,133***	***0,030***	***0,005***	***0,006***	***-0,011***	***0,024***	***-0,044***	***0,071***	***-0,099***	***0,112***	***-0,077***	***-0,063***	***0,390***		
4	0,6	3,320	0,735	0,163	0,035	0,011	-0,005	0,013	-0,020	0,027	-0,028	0,013	0,035	-0,140	0,327			
5	0,7	4,055	0,898	0,198	0,046	0,006	0,008	-0,007	0,007	-0,001	-0,015	0,048	-0,105	0,187				
6	0,8	4,953	1,096	0,244	0,052	0,014	0,001	0,000	0,006	-0,016	0,033	-0,057	0,082					
7	0,9	6,049	1,340	0,296	0,066	0,015	0,001	0,006	-0,010	0,017	-0,024	0,025						
8	1	7,389	1,636	0,362	0,081	0,016	0,007	-0,004	0,007	-0,007	0,001							
9	1,1	9,025	1,998	0,443	0,097	0,023	0,003	0,003	0,000	-0,006								
10	1,2	11,023	2,441	0,540	0,120	0,026	0,006	0,003	-0,006									
11	1,3	13,464	2,981	0,660	0,146	0,032	0,009	-0,003										
12	1,4	16,445	3,641	0,806	0,178	0,041	0,006											
13	1,5	20,086	4,447	0,984	0,219	0,047												
14	1,6	24,533	5,431	1,203	0,266													
15	1,7	29,964	6,634	1,469														
16	1,8	36,598	8,103	=B17-B16														
17	1,9	44,701																
18	x=	1,540																
19	h=	0,10	=A4-A3															
20	t=	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	=(B18-A3)/B19	
21			10,4	97,76	821,18	6076,76	38891,3	2E+05	924057	3E+06	8E+06	1E+07	4E+06	-3E+06	4E+06	-1E+07	=C21*(D20+1-D2)	
22		2,718	6,261	6,501	4,106	1,266	1,945	-3,209	4,400	-3,429	1,475	-0,288	0,012	0,000	0,000	0,000	=C3*C21/ФАКТР(C2)	
23		21,75899	=СУММ(B22:P22)															
24																		
25	t=	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	=(B18-A17)/B19	
26			-3,600	9,36	-14,976	8,9856	3,59424	5,032	12,0766	41,061	180,67	975,6	6243,8	46204	388117	4E+06	=C26*(D25+D2-1)	
27		44,701	-29,1708	6,87492	-0,6639	0,0176	0,00018	-2E-05	-1,4E-05	-6E-06	5E-07	7E-06	1E-05	2E-05	2E-05	2E-05	=C26*C16/ФАКТР(C2)	
28		21,75899	=СУММ(B27:P27)															
29																		

В задании в соответствии с вариантом выполнить:

а) пользуясь формулами интерполяции Ньютона (1-ой и 2-ой) . вычислить e^x или sin(x) для заданных значений аргумента x в Excel;

б) полученные решения проверить интерполированием в MathCAD;

в) выполнить в MathCAD линейную регрессию (аппроксимацию). Для первых 10 вариантов найти значение e^x, для вторых 10 – sin(x). Значение Σ равно сумме двух последних цифр шифра зачетной книжки.

Таблица 7.1 - Значения аргументов интерполяционных многочленов

Σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0,507	0,512	0,523	0,527	0,533	0,541	0,547	0,553	0,558	0,563

Σ	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x	1,151	1,218	1,345	1,421	1,538	1,609	1,732	1,849	1,929

Таблица 7.2 - Значения функции $y = e^x$

x	e^x	x	e^x	x	e^x
0,50	1,6487	0,54	1,7160	0,58	1,7860
0,51	1,6653	0,55	1,7333	0,59	1,8040
0,52	1,6820	0,56	1,7507	0,60	1,8221
0,53	1,6989	0,57	1,7683	-	-

Таблица 7.3 - Значения функций y = sin(x)

x	sinx	x	sinx	x	sinx
1,1	0,89121	1,5	0,99749	1,9	0,94630
1,2	0,93204	1,6	0,99957	2,0	0,90930
1,3	0,96356	1,7	0,99166	-	-
1,4	0,98545	1,8	0,97385	-	-

Практическое занятие №8
Численные методы решения дифференциальных уравнений

R = 5 Ом

$C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф

E = 100 В

Подставим в уравнение $U'_C = E / (R \cdot C) - U_C / (R \cdot C)$ значения из задания, получим: $U'_C = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_C$

Найдем шаг Δt из условия что на графике будет отражено 20 точек и переходный процесс завершиться за $4 \cdot R \cdot C$, следовательно, $\Delta t = 4 \cdot R \cdot C / 20 = 5 \cdot 10^{-6}$.

Метод Эйлера решения дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$U_i = U_{i-1} + \Delta t \cdot U'_{i-1}$

$t_i = t_{i-1} + \Delta t$

Составим таблицу в Excel, при t=0 напряжение U=0, так как конденсатор заряжается.

U=	0	=B2+5*(10^-6)*B4
t=	0	=B3+5*(10^-6)
U'=	=4*(10^6)-4*(10^4)*B2	

Вычислим 20 значений:

№ шага	0	1	2	3	4	5	6	7
U=	0	20	36	48,8	59,04	67,232	73,7856	79,02848
t=	0	0,000005	0,00001	0,000015	0,00002	0,000025	0,00003	0,000035
U'=	4000000	3200000	2560000	2048000	1638400	1310720	1048576	838860,8

№ шага	8	9	10	11	12	13	14
U=	83,22278	86,57823	89,26258	91,41007	93,12805	94,50244	95,60195
t=	0,00004	0,000045	0,00005	0,000055	0,00006	0,000065	0,00007
U'=	671088,6	536870,9	429496,7	343597,4	274877,9	219902,3	175921,9

№ шага	15	16	17	18	19	20
U=	96,481563	97,1852502	97,7482	98,19856	98,55885	98,84708
t=	0,000075	0,00008	0,000085	0,00009	0,000095	0,0001
U'=	140737,49	112589,991	90071,99	72057,594	57646,08	

Вычислительный эксперимент:

Изменим, значение E в 5, 10 и 50 раз, получим три новых дифференциальных уравнения:

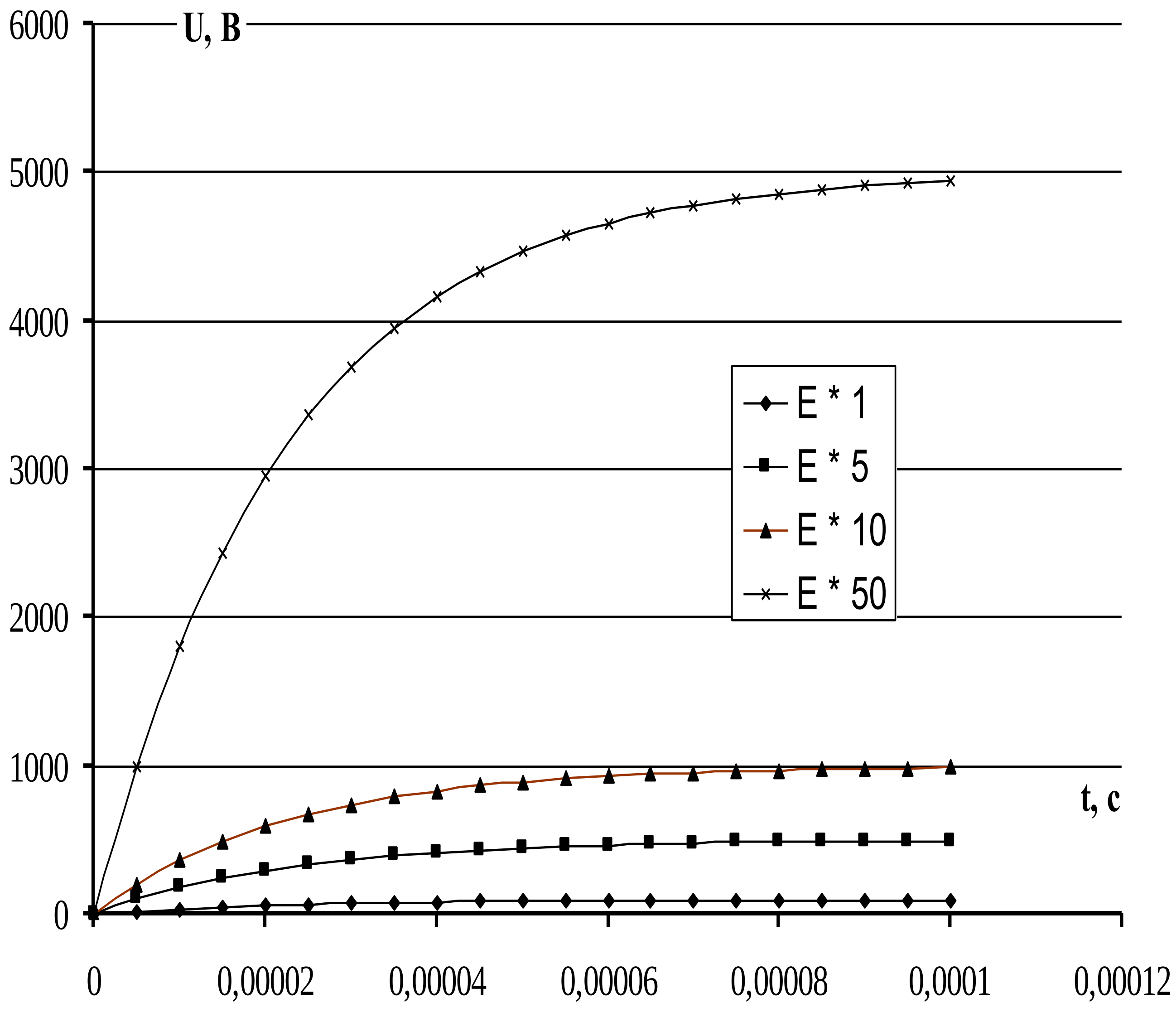
$U'_C = 4\cdot10^6 - 4\cdot10^4\cdot U_C$

$U_5'_C = 20\cdot10^6 - 4\cdot10^4\cdot U_{5C}$

$U_{10}'_C = 40\cdot10^6 - 4\cdot10^4\cdot U_{10C}$

$U_{50}'_C = 200\cdot10^6 - 4\cdot10^4\cdot U_{50C}$

Аналогично предыдущему решению строятся таблицы для 20 значений для каждого из уравнений. По полученным таблицам строятся графики:



В задании в соответствии вариантом выполнить:

а) описать переходный процесс в электрической цепи в виде дифференциального уравнения;

б) решить полученное уравнение методом Эйлера в Excel, исполь зуя рекуррентное выражение;

в) исследовать динамическую модель при изменении одного из параметров в 2, 5 и 10 раз. Построить

графики зависимостей.

При включении ключа «Я» конденсатор заряжается до $U_c = E$.

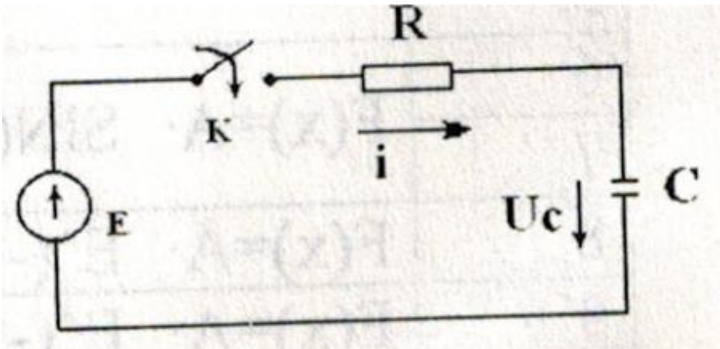
Дифференциальное уравнение заряда $RC\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ (*).

Моделируя уравнение (*) на ЭВМ, заменяя R C на τ, перепишем:

$\tau\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ или $\frac{dU_c}{dt} = \frac{\mathrm{E}}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$

Примечание: считать, что переходный процесс завершен через t = (3-4)τ, $\tau = R{\cdot}C$

Соответственно следует выбирать и шаг интегрирования м для получения полной картины заряда конденсатора.



Из уравнения $RC\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ имеем $\tau\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ или $\frac{dU_c}{dt} = \frac{\mathrm{E}}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$.

Для $R = 100$ Ом и С=1 мкФ, получим $U_c' = 10^6 - \frac{U_c}{10^{-4}}$.

При моделировании дифференциального уравнения следует правильно выбирать диапазон аргумента (интервал времени) и его шаг изменения.

Так как процесс заряда конденсатора определяется постоянной времени и завершается через 3-4 τ, то Δt - шаг изменения аргумента искомой функции $U_c = f(t)$ должен быть выбран из этих соображений.

Так, например, для $R = 100$ Ом и С=1 мкФ $\tau = RC = 100{\cdot}10^{-6} = 10^{-4}$, откуда для получения 10 точек на графике при полном заряде конденсатора $\Delta e = 0.1{\cdot}3\tau = 3{\cdot}10^{-5}$.

Ниже приведен график заряда конденсатора при различном интервале моделирования (t = 0-2 - кривая **1** и t = 0—100000 - кривая **2**).

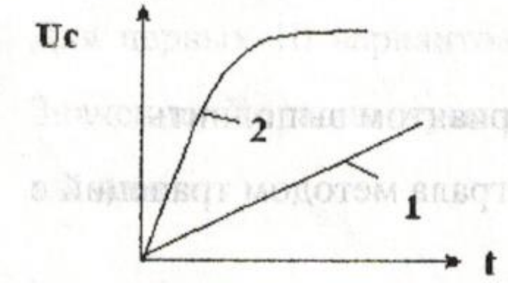


Таблица 3 - Значения параметров электрической цепи

№ варианта	R (Ом)	C (мкф)	E (B)
1	2	3	4
*0	10	1	100
*2	5	0,5	50
3	100	1	100
*4	50	1	100
5	100	0,5	50
*6	10	10	100
7	5	5	100
*8	100	10	100
9	50	10	100
10	1	5	100
11	25	15	100
12	50	5	50
1	100	3	100
-	2	3	4
13	50	15	100
14	25	1	100
15	100	0,5	100
16	50	5	100
17	100	3	50
18	50	10	50

Список рекомендуемой литературы

1. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев, О.В. Зимина, А.И. Кириллов [и др.]; под ред. проф. А.И. Кириллова. - [2-е изд., стер.]. - М.: Физматлит, 2003. - 400 с. - (Решебник). - ISBN 5-9221-0423-3
2. Методы решения специальных задач с использованием информационных технологий Электронный ресурс: Практикум / сост. А. С. Ермаков. - Москва: Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2014. - 133 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-0973-3
3. Порсев, Е. Г.
    Организация и планирование экспериментов : учебное пособие / Е.Г. Порсев ; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск: НГТУ, 2010. - 155 с. - http://biblioclub.ru/. - ISBN 978-5-7782-1461-30.
4. Ашихмин, В. Н.
    Введение в математическое моделирование Электронный ресурс : Учебное пособие / В. Н. Ашихмин, М. Б. Гитман, И. Э. Келлер. - Введение в математическое моделирование,2019-04-20. - Москва: Логос, 2004. - 439 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 5-94010-272-7
5. Краснов, М. Л.
    Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - Москва: Наука, 1971. - 254 с.: ил. - (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов). - http://biblioclub.ru/
6. Семенов, Б. А. (д-р техн. наук). Инженерный эксперимент в промышленной теплотехнике, теплоэнергетике и теплотехнологиях:

учеб. пособие для вузов / Б.А. Семенов. - 2-е изд., доп. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. - 393 с.: ил.; 21. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Гриф: Доп. УМО. - Библиогр.: с. 388-390. - ISBN 978-5-8114-1392-8

7. Яковлев, С. В. (СКФУ). Методы и алгоритмы решения задач системного анализа: учебное пособие: практикум / С. В. Яковлев; Сев.-Кав. федер.ун-т. - Ставрополь: СКФУ, 2014. - 85 с. - Неопубликованное издание